УДК 514.144

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Целью данной работы является описание четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем действительных чисел. В публикации определены основные понятия: почти симплектическая структура, изотропное представление, изотропно-точная пара, комплексификация алгебры Ли, антиинволюция, вещественная форма. Приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой. Описано нахождение вещественных форм как подалгебр линейных алгебр Ли, так и изотропно-точных пар и проведено в явном виде описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств в вещественном случае. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и структур на них. Полученные результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики, а алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Ключевые слова: алгебра Ли, однородное пространство, вещественная форма, изотропное представление, почти симплектическая структура.

Для цитирования: Можей Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Вещественный случай // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2 (248). С. 15–21.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

FOUR-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES WITH ALMOST SYMPLECTIC STRUCTURE. THE REAL CASE

The purpose of the work is a description of four-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure over the field of real numbers. It defines the basic concepts: almost symplectic structure, isotropic representation, isotropically-faithful pair, complexification of Lie algebra, anti-involution, real form. The algorithm for classifying isotropically-faithful homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure is presented. Finding real forms of both subalgebras of linear Lie algebras and isotropically-faithful pairs is described, and an explicit description of four-dimensional isotropically-faithful almost symplectic homogeneous spaces in the real case is given. The features of the methods presented in the work are the application of a purely algebraic approach to the description of homogeneous spaces and structures on them. The results obtained in the paper can be used in works on differential geometry, differential equations, topology, as well as in other areas of mathematics and physics. The algorithms given in the work can be computerized and used for the decision of similar problems in large dimensions.

Key words: Lie algebra, homogeneous space, real form, isotropic representation, almost symplectic structure.

For citation: Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The real case. *Proceedings of BSTU*, *issue 3*, *Physics and Mathematics*. *Informatics*, 2021, no. 2 (248), pp. 15–21 (In Russian).

Введение. Симплектическое многообразие – это многообразие с заданной на нем симплектической формой (замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой). Интерес к симплектическим многообразиям возродился после публикации трудов А. Лихнеровича [1], А. Кириллова [2], А. Вайнштейна [3] и др. Симплектическое многообразие позволяет естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам. Аппарат симплектической геометрии переносится с геометрической оптики и классической механики и на квантовую механику.

В работе [4] автором описаны подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, а в работе [5] – четырехмерные изотропно-точные почти симплектические однородные пространства над полем $\mathbb{C}$, там же даны основные определения и приведено более подробное обоснование применяемых методов, целью же данной работы является классификация четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем $\mathbb{R}$.

Основная часть. Пусть $(\bar{G}, M)$ – четырехмерное однородное пространство, а $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Паре $(\bar{G}, G)$ поставим в соответствие пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\bar{G}$ и $\mathfrak{g}$ – подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G. *Изотропное представление* пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это отображение

$$x.(y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g} \text{ для всех } x \in \mathfrak{g},\ y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$.

Пространство $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ называется *комплексификацией* вещественного векторного пространства V. Если на V задана структура вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то она продолжается до структуры комплексной алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$[g_1 \otimes z_1, g_2 \otimes z_2] = [g_1, g_2] \otimes z_1 z_2;$$
$$g_1, g_2 \in \mathfrak{g}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{a}$ – вещественная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (алгебру над $\mathbb{C}$ можно рассматривать как алгебру над $\mathbb{R}$ вдвое большей размерности). Подалгебра $\mathfrak{a}$ называется *вещественной формой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *если* $\mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \cap i\mathfrak{a} = 0$ (тогда $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$).

Пусть $\mathfrak{a}$ – вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. *Сопряжением относительно* $\mathfrak{a}$ *называется отображение* $\sigma: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\sigma(x + iy) = x - iy\ \forall x, y \in \mathfrak{a}$. Отображение называется *антиинволюцией,* если оно обладает следующими свойствами:

$$\sigma^2 = id_{\mathfrak{g}}; \quad [\sigma(x), \sigma(y)] = \sigma([x, y]);$$
$$\sigma(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}\sigma(x) + \bar{\mu}\sigma(y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Нетрудно проверить, что сопряжение является антиинволюцией.

Вещественные формы алгебры Ли – неподвижные точки антиинволюций. Действительно, если $\mathfrak{a}$ – вещественная форма, то множество $\{g \mid \sigma(g) = g\}$ есть алгебра $\mathfrak{a}$:

$$x + iy = \sigma(x + iy) = x - iy; \quad y = 0, x \in \mathfrak{a}.$$

С другой стороны, пусть σ – антиинволюция,

$$\mathfrak{g} = P_+(\mathfrak{g}) \oplus P_-(\mathfrak{g}),$$

где $P_{\pm} = \dfrac{1 \pm \sigma}{2}$; $P^2 = P$; $P_+(\mathfrak{g})$ – множество неподвижных точек σ.

Две вещественные формы переводятся друг в друга автоморфизмом тогда и только тогда, когда соответствующие антиинволюции сопряжены. Действительно, если σ – антиинволюция, φ – автоморфизм $\mathfrak{g}$, то $\tilde{\sigma} = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ – тоже антиинволюция, причем если $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, то $\tilde{\sigma}(\varphi(\mathfrak{a})) = \varphi(\mathfrak{a})$.

Таким образом, чтобы классифицировать вещественные формы абстрактной алгебры Ли, нужно классифицировать с точностью до группы автоморфизмов все антиинволюции.

Пусть $V = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ – $\mathfrak{g}$-модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $B(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить

$$(x.b)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2),$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in V$, $b \in B(V)$. *Почти симплектической структурой на* $\mathfrak{g}$*-модуле* V называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b \in B(V)$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Другими словами, $b \in B(V)^{\mathfrak{g}}$. Множество всех эндоморфизмов пространства V, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму b, является алгеброй Ли, которая обозначается $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Возникает вопрос: как связаны между собой классификации подалгебр в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ и в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, т. е. в вещественном и комплексном случаях. Можно классифицировать подалгебры над полем $\mathbb{R}$, используя классификацию над полем $\mathbb{C}$. Этот способ основан на понятии вещественных форм линейных алгебр Ли. Основная идея – нахождение всех вещественных форм для комплексной линейной алгебры Ли. Выше определены основные понятия для абстрактного случая. Рассмотрим теперь случай линейных алгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ – вещественная линейная алгебра Ли, V – вещественное векторное пространство. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ может быть естественным образом рассмотрена как алгебра Ли эндоморфизмов комплексного векторного пространства $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

$$(x \otimes \alpha).(v \otimes \beta) = (x.v) \otimes (\alpha\beta),$$

$x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Полученную линейную алгебру $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(V^{\mathbb{C}})$ будем называть *комплексификацией линейной алгебры Ли* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$.

Опишем конструкцию, обратную данной. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ – комплексная линейная алгебра Ли; W – комплексное векторное пространство. *Вещественной формой линейной алгебры Ли* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ называется пара $(\mathfrak{g}, V)$, где $\mathfrak{g}$ – вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{h}$; V – вещественная форма пространства W, причем $\mathfrak{g}(V) \subset V$. В этом случае $\mathfrak{g}$ может быть рассмотрена как подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, т. е. как вещественная линейная алгебра Ли, действующая на вещественном векторном пространстве V (действительно, если $x.V = \{0\}$

для некоторого $x \in \mathfrak{g}$, то $x.(iV) = i(x.V) = \{0\}$. Следовательно, $x.W = \{0\}$ и $x = 0$).

Множество всех вещественных форм линейной алгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ *находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких антиинволюций* σ *пространства* W, *что* $\sigma \circ \mathfrak{h} \circ \sigma = \mathfrak{h}$. Действительно, пусть σ – такая антиинволюция пространства W, что $\sigma \circ \mathfrak{h} \circ \sigma = \mathfrak{h}$ и $\tilde{\sigma} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ – антиинволюция алгебры Ли $\mathfrak{h}$, определенная как $\tilde{\sigma}(y) = \sigma \circ y \circ \sigma$. Тогда, как нетрудно проверить, пара $(\mathfrak{h}^{\tilde{\sigma}}, W^{\sigma})$ является вещественной формой линейной алгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ и σ – антиинволюция пространства W, соответствующая вещественной форме V:

$$\sigma : v_1 + iv_2 \mapsto v_1 - iv_2; \quad v_1, v_2 \in V.$$

Для любого элемента $y \in \mathfrak{h}$, однозначно представимого в виде $y = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, имеем:

$$\sigma \circ (x_1 + ix_2) \circ \sigma.(v_1 + iv_2) = \sigma \circ (x_1 + ix_2).(v_1 - iv_2) =$$
$$= \sigma.((x_1.v_1 + x_2.v_2) - i(x_1.v_2 - x_2.v_1)) =$$
$$= (x_1.v_1 + x_2.v_2) + i(x_1.v_2 - x_2.v_1) =$$
$$= (x_1 - ix_2).(v_1 + iv_2),$$

для всех $v_1, v_2 \in V$. Т. е. $\sigma \circ (x_1 + ix_2) \circ \sigma = x_1 - ix_2$, и отображение $\tilde{\sigma} : y \mapsto \sigma \circ y \circ \sigma$, $y \in \mathfrak{h}$ является антиинволюцией алгебры Ли $\mathfrak{h}$, соответствующей вещественной форме $\mathfrak{g}$.

Для ссылки на подалгебры, полученные в работе [4], будем использовать обозначение d.n, где d – размерность подалгебры, a n – ее порядковый номер. Будем говорить, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет тип (d.n), если изотропное представление пары сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$, номер которой (d.n). На пары, приведенные в статье [5], будем ссылаться через d.n.m, где m – порядковый номер пары типа (d.n).

В качестве примера классификации пар с заданным изотропным представлением рассмотрим пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9, т. е. имеющие подалгебру $\mathfrak{g}$ следующего вида:

$$\begin{array}{|cccc|} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{array}.$$

Теорема 1. *Любая вещественная форма линейной алгебры Ли 2.9 сопряжена одной и только одной из следующих линейных алгебр Ли:*

$$1. \begin{array}{|cccc|} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{array}, \quad 2. \begin{array}{|cccc|} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{array},$$

$$3. \begin{array}{|cccc|} 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{array}, \quad 4. \begin{array}{|cccc|} x & -y & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & y & -x \end{array}.$$

Доказательство. Справедливость утверждения будет следовать из классификации пар, но можно провести и независимое доказательство. Каждая антиинволюция σ векторного пространства $\mathbb{C}^4$ порождается матрицей A:

$$\sigma_A : v \mapsto A\bar{v}, \; A\bar{A} = E.$$

Из этого следует, что $\tilde{\sigma}_A : \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, $X \mapsto A\overline{XA}$, $A\bar{A} = E$.

Требование $\tilde{\sigma}_A(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ дает ограничение на вид матрицы A:

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^i \times \right.$$
$$\left. \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \middle| \; abcd \neq 0, i, j, k \in \{0,1\}, A\bar{A} = E \right\}.$$

Классифицируем все такие A (соответственно σ_A) с точностью до группы автоморфизмов. Если $f.\sigma = f \circ \sigma \circ f^{-1}$, $f \in A(\mathfrak{g})$, то $f.\sigma$ и σ сопряжены. В матрицах это имеет вид: $A \mapsto FA\bar{F}^{-1}$. Условие $f \in A(\mathfrak{g})$ в нашем случае дает

$$f \in \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^i \times \right.$$
$$\left. \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \middle| \; abcd \neq 0, i, j, k \in \{0,1\} \right\}.$$

Рассмотрим случаи, не сопряженные относительно $A(\mathfrak{g})$:

1) $i = j = k = 0$;

2) $i = 1$, $j = k = 0$ (или $k = 1 = i = j$, сопряжены относительно $A(\mathfrak{g})$);

3) $j=1,\ i=k=0$ (или $k=1,\ i=j=0$, сопряжены относительно $A(\mathfrak{g})$);

4) $j=k=1,\ i=0$.

Если $i=k=1,\ j=0$ или $i=j=1,\ k=0$, то $A\overline{A}\neq E$.

1) Тогда $a\overline{a}=1,\ b\overline{b}=1,\ c\overline{c}=1,\ d\overline{d}=1$. Автоморфизм переводит

$$a\mapsto pa\overline{p}^{-1}, b\mapsto qb\overline{q}^{-1}, c\mapsto rc\overline{r}^{-1}, d\mapsto sd\overline{s}^{-1}.$$

F можно выбрать так, чтобы $pa\overline{p}^{-1}$, $qb\overline{q}^{-1}$, $rc\overline{r}^{-1}$, $sd\overline{s}^{-1}$ стали единицами. Следовательно, $A=E$ и $V^{\sigma_A}=<e_1,e_2,e_3,e_4>$,

$$\mathfrak{g}^{\sigma_A}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x&0&0&0\\ 0&y&0&0\\ 0&0&-x&0\\ 0&0&0&-y\end{pmatrix}\right| x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

2) $a\overline{b}=1, c\overline{d}=1$.

$$\begin{pmatrix} 0&a&0&0\\ b&0&0&0\\ 0&0&0&c\\ 0&0&d&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} p&0&0&0\\ 0&q&0&0\\ 0&0&r&0\\ 0&0&0&s\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0&a&0&0\\ b&0&0&0\\ 0&0&0&c\\ 0&0&d&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{p}^{-1}&0&0&0\\ 0&\overline{q}^{-1}&0&0\\ 0&0&\overline{r}^{-1}&0\\ 0&0&0&\overline{s}^{-1}\end{pmatrix}.$$

$$a\mapsto pa\overline{q}^{-1},\ \ c\mapsto rc\overline{s}^{-1}.$$

F можно выбрать так, чтобы

$$A=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} \overline{y}\\ \overline{x}\\ \overline{t}\\ \overline{z}\end{pmatrix}$$

и $V^{\sigma_A}=<e_1+e_2, ie_1-ie_2, e_3+e_4, ie_3-ie_4>$,

$$\begin{pmatrix} x&0&0&0\\ 0&y&0&0\\ 0&0&-x&0\\ 0&0&0&-y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} \overline{y}&0&0&0\\ 0&\overline{x}&0&0\\ 0&0&-\overline{y}&0\\ 0&0&0&-\overline{x}\end{pmatrix}.$$

$$X_1=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} i&0&0&0\\ 0&-i&0&0\\ 0&0&-i&0\\ 0&0&0&i\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}^{\sigma_A}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x&-y&0&0\\ y&x&0&0\\ 0&0&-x&y\\ 0&0&-y&-x\end{pmatrix}\right| x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

Аналогично получаем

$$3)\ \mathfrak{g}^{\sigma_A}=\left\{\left.\begin{pmatrix} 0&0&-x&0\\ 0&y&0&0\\ x&0&0&0\\ 0&0&0&-y\end{pmatrix}\right| x,y\in\mathbb{R}\right\};$$

$$4)\ \mathfrak{g}^{\sigma_A}=\left\{\left.\begin{pmatrix} 0&0&-x&0\\ 0&0&0&-y\\ x&0&0&0\\ 0&y&0&0\end{pmatrix}\right| x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

Теперь остановимся подробнее на классификации пар. Рассмотрим пару $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ называется *комплексификацией пары* $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$; пара $(\overline{\mathfrak{a}},\mathfrak{a})$ называется *вещественной формой пары* $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, если $\overline{\mathfrak{a}}$ – вещественная форма алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$, а $\mathfrak{a}$ – вещественная форма подалгебры $\mathfrak{g}$.

Множество всех вещественных форм пары $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких антиинволюций* σ *алгебры* $\overline{\mathfrak{g}}$, *что* $\sigma(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$.

С учетом вышеизложенного, решение проблемы классификации четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой разобьем на следующие части.

1. Классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих (1), что равносильно классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$. Это проделано в работе [4].

2. Для каждой подалгебры $\mathfrak{g}$ из пункта 1 производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Подробнее с этим пунктом можно ознакомиться в работе [5].

3. Для каждой пары $(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ находим (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$.

Таким образом, остановимся подробнее на п. 3 и получим классификацию в вещественном случае. Ограничимся случаем, когда множество нильпотентных элементов алгебры $\rho(\mathfrak{g})$ отлично от $\rho(\mathfrak{g})$.

Пусть $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ($n=\dim\mathfrak{g}$) и $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ – базис векторного пространства, дополнительного к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$. Рассмотрим, например, пару 2.9.2, имеющую следующий вид:

2.9.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

Теорема. *Любая вещественная форма пары* 2.9.2 *(над полем* $\mathbb{C}$*) эквивалентна одной и только одной из пар* 2.9.5–2.9.10, где

2.9.5	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2.9.6	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	0

2.9.7	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_3	0	$-u_1$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_3$	0	0	0	$2e_1$	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_1	0	$-2e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2.9.8	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_3	0	$-u_1$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_3$	0	0	0	$-2e_1$	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_1	0	$2e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2.9.9	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_3	0	$-u_1$	0
e_2	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
u_1	$-u_3$	0	0	0	$2e_1$	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0
u_3	u_1	0	$-2e_1$	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	0

2.9.10	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_3	0	$-u_1$	0
e_2	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
u_1	$-u_3$	0	0	0	$-2e_1$	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0
u_3	u_1	0	$2e_1$	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	0

Доказательство. Множество автоморфизмов пары 2.9.2 имеет вид:

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&a&0&0&0\\0&0&0&b&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{a}&0\\0&0&0&0&0&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&a&0&0&0\\0&0&0&0&0&c\\0&0&0&0&\frac{1}{a}&0\\0&0&0&b&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{a}&0\\0&0&0&b&0&0\\0&0&a&0&0&0\\0&0&0&0&0&c\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{a}&0\\0&0&0&0&0&c\\0&0&a&0&0&0\\0&0&0&b&0&0\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{C}^*\right\}.$$

Классифицируем антиинволюции с точностью до группы автоморфизмов. В матричной форме это обозначает следующее: антиинволюции $I,\tilde{I}\in\mathcal{I}$ сопряжены тогда и только тогда, когда существует $A\in\mathcal{A}$ такая, что $\tilde{I}=\bar{A}IA^{-1}$. Отсюда получаем, что любая антиинволюция пары сопряжена одной и только одной из следующих антиинволюций:

$$I_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$I_{3,4}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&\pm1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&\pm1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$I_{5,6}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&\pm1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&\pm1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Для I_1 очевидно, что таблица умножения вещественной формы имеет вид 2.9.5.

Найдем множество неподвижных точек отображения I_2. Пусть $X=(a,b,x,y,z,t)$, $I_2(X)= =(\overline{a},-\overline{b},\overline{x},\overline{t},\overline{z},\overline{y})$, $I_2(X)=X$. Следовательно, получим $X=(a,b,x,y,z,\overline{y})$, где $y\in\mathbb{C}$, $b\in\mathbb{R}i$, a, x, $z\in\mathbb{R}$. Выберем базис множества неподвижных точек:

$$e_1'=e_1;\ e_2'=ie_2;\ u_1'=u_1;\ u_2'=u_2+u_4;$$
$$u_3'=u_3;\ u_4'=iu_2-iu_4.$$

В этом базисе таблица умножения вещественной формы, соответствующей антиинволюции I_2, имеет вид 2.9.8.

Найдем множество неподвижных точек I_3. Пусть $I_3(X)=(-\overline{a},\overline{b},-\overline{z},\overline{y},-\overline{x},\overline{t})$, отсюда следует: $X=(a,b,x,y,-\overline{x},t)$, $x\in\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}i$, $b,y,t\in\mathbb{R}$. Базис множества неподвижных точек:

$$e_1'=ie_1;\ e_2'=e_2;\ u_1'=u_1-u_3;\ u_2'=u_2;$$
$$u_3'=i(u_1+u_3);\ u_4'=u_4.$$

В этом базисе таблица умножения вещественной формы, соответствующей I_3, имеет вид 2.9.7.

Аналогично для отображения I_4: $I_4(X)= =(-\overline{a},\overline{b},\overline{z},\overline{y},\overline{x},\overline{t})$, тогда $X=(a,b,x,y,\overline{x},t)$, где $x\in\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}i$, $b,y,t\in\mathbb{R}$. Базис множества неподвижных точек:

$$e_1'=ie_1;\ e_2'=e_2;\ u_1'=u_1+u_3;\ u_2'=u_2;$$
$$u_3'=i(u_1-u_3);\ u_4'=u_4,$$

таблица умножения вещественной формы, которая соответствует антиинволюции I_4, имеет вид 2.9.6.

Найдем множество неподвижных точек I_5: $I_5(X)=(-\overline{a},-\overline{b},-\overline{z},\overline{t},-\overline{x},\overline{y})$, отсюда следует: $X= =(a,b,x,y,-\overline{x},\overline{y})$, $x,y\in\mathbb{C}$, $a,b\in\mathbb{R}i$. Базис множества неподвижных точек:

$$e_1'=ie_1;\ e_2'=ie_2;\ u_1'=u_1-u_3;\ u_2'=u_2+u_4;$$
$$u_3'=iu_1+iu_3;\ u_4'=iu_2-iu_4,$$

таблица умножения вещественной формы, соответствующей I_5, имеет вид 2.9.10. Аналогично для I_6: $I_6(X)=(-\overline{a},-\overline{b},\overline{z},\overline{t},\overline{x},\overline{y})$, следовательно, $X=(a,b,x,y,\overline{x},\overline{y})$, где $x,y\in\mathbb{C}$, $a,b\in\mathbb{R}i$. Базис:

$$e_1'=ie_1;\ e_2'=ie_2;\ u_1'=u_1+u_3;\ u_2'=u_2+u_4;$$
$$u_3'=iu_1-iu_3;\ u_4'=iu_2-iu_4,$$

таблица умножения вещественной формы, соответствующей I_6, имеет вид 2.9.9.

Применяя аналогичные рассуждения для всех остальных случаев, получаем искомый результат классификации пар над полем $\mathbb{R}$.

Заключение. Приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой. Описано нахождение вещественных форм как подалгебр линейных алгебр Ли, так и изотропно-точных пар и проведено в явном виде описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств в вещественном случае. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях, а полученные в работе результаты могут найти приложения в различных отраслях математики и физики.

Список литературы

1. Lichnerowicz A. Les vari´et´es de Poisson et leurs alg`ebres de Lie associ´ees // J. Differential Geometry. 1977. No. 2. P. 253–300.

2. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли // Успехи мат. наук. 1976, № 4 (190). С. 57–76.

3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // J. Differential Geom. 1983. № 3. P. 523–557.

4. Можей Н. П. Почти симплектические однородные пространства // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. Вып. XVII. С. 17–20.

5. Можей Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической стуктурой. Комплексный случай // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 8–13.

References

1. Lichnerowicz A. Les vari´et´es de Poisson et leurs alg`ebres de Lie associ´ees. *J. Differential Geometry*, 1977, no. 2, pp. 253–300.

2. Kirillov A. A. Local Lie algebras. *Uspekhi mat. nauk* [Success math. sciences], 1976, no. 4 (190), pp. 57–76 (In Russian).

3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geometry*, 1983, no. 3, pp. 523–557.

4. Mozhey N. P. Almost simplexic homogeneous spaces. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2009, issue XVII, pp. 17–20 (In Russian).

5. Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physic and Mathematic. Informatics, 2021, no. 1 (242), pp. 8–13 (In Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 29.03.2021