Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (129), 2021

УДК 514.765.1

Редуктивные пространства, допускающие как эквиаффинную, так и нормальную связность

Н.П. Можей

Изучаются трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие как эквиаффинную, так и нормальную связность, рассмотрен случай разрешимой группы Ли преобразований. Определены основные понятия: однородное пространство, эффективная пара, изотропно-точная пара, редуктивное пространство, (инвариантная) аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная (локально эквиаффинная) связность, алгебра голономии, нормальная связность. Найдены и описаны в явном виде эквиаффинные (локально эквиаффинные) и нормальные связности на трехмерных редуктивных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований.

Ключевые слова: эквиаффинная связность, нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, тензор Риччи.

We study three-dimensional reductive homogeneous spaces, admitting both equiaffine and normal connections. We considered the case, when Lie group of transformations is solvable. The basic notions, such as homogeneous space, an effective pair, an isotropically-faithful pair, reductive space, an (invariant) affine connection, a curvature tensor, a torsion tensor, Ricci tensor, an equiaffine (locally equiaffine) connection, holonomy algebra, a normal connection are defined. Equiaffine (locally equiaffine) and normal connections on three-dimensional reductive homogeneous spaces with a solvable transformation group are found and described in an explicit form.

Keywords: equiaffine connection, normal connection, reductive space, transformation group, Ricci tensor.

Введение. Во многих математических и физических моделях требуется решать некоторые дифференциальные уравнения. Если предположить, что эти уравнения являются ковариантными объектами (т. е. при преобразовании координат преобразуются по тензорным правилам), то результаты не будут зависеть от выбора системы отсчета. Чтобы строить такие модели, используется понятие связности, т. к. обычные частные производные не приводят к тензорным объектам, компоненты же аффинной связности позволяют строить новые тензорные поля из заданных. В работе обсуждаются существование и свойства инвариантных связностей на однородных пространствах, результаты Вана [1] применяются к ситуации, когда существует инвариантная структура на однородном пространстве, а именно, конструкция используется для случая редуктивного пространства. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П.К. Рашевским, М. Куритой, Э.Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [2] и др. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан (для риманова многообразия, см. [3]). Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [4]). Трехмерные редуктивные однородные пространства разрешимых групп Ли изучались в [5], в данной работе находятся и описываются в явном виде эквиаффинные (локально эквиаффинные) и нормальные связности на указанных пространствах.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – *однородное пространство*, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$, пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$.

Пусть $M = \bar{G}/G$ – однородное пространство, на котором связная группа $\bar{G}$ действует транзитивно и эффективно. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$ – инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M ,$\bar{G}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G всегда точное. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид:

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \text{ для всех } x, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Определим *тензор Риччи* $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$.

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна. Действительно, $Ric(y, z) - Ric(z, y) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z - R(x, z)y\}$. С учетом первого тождества Бьянки получаем $Ric(y, z) - Ric(z, y) = \mathrm{tr}\{x \mapsto -R(y, z)x\} = -\mathrm{tr}R(y, z)$, $Ric(y, z) - Ric(z, y) = -\mathrm{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \mathrm{tr}\Lambda([y, z]) = \mathrm{tr}\Lambda([y, z])$. Следовательно, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\Lambda([y, z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$. Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

Описание эквиаффинных и нормальных связностей. Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [5], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема 1. Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие как локально эквиаффинную, так и нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

2.9.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

,

2.20.18,α=0.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	$-u_1$	$-u_2$	0

,

2.9.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

2.21.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

,

2.9.4, $\mu=0,-1$.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

,

2.9.5,2.9.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$
u_2	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	$-u_1$	$\mp e_2$	$-\alpha u_2$	0

$,\alpha\geq 0,$

2.9.7.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

,

2.17.2, 2.17.3.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	u_1
e_2	0	0	0	0	u_2
u_1	0	0	0	0	$\pm e_1$
u_2	0	0	0	0	αe_2
u_3	$-u_1$	$-u_2$	$\mp e_1$	$-\alpha e_2$	0

,

Пара	*Совпадает с 2.17.2, за исключением*
2.17.4	$[u_1,u_3]=\alpha e_1-e_2,[u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2,\alpha\geq 0$
2.17.6, 2.17.7	$[u_1,u_3]=\pm e_1,[u_2,u_3]=e_1+e_2$
2.17.8	$[u_1,u_3]=\delta e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2+\alpha u_2,-1<\alpha<1$
2.17.9	$[u_1,u_3]=\delta e_1+e_2+u_1,[u_2,u_3]=\gamma e_1+\beta e_2+\alpha u_1,-1<\alpha<1$
2.17.10	$[u_1,u_3]=\delta e_1+u_1,[u_2,u_3]=e_1+\beta e_2+\alpha u_2,-1<\alpha<1$
2.17.13, 2.17.14	$[u_1,u_3]=\alpha e_1-e_2,[u_2,u_3]=\alpha e_2+u_1$
2.17.15	$[u_1,u_3]=\alpha e_1,[u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2+u_1$
2.17.17	$[u_1,u_3]=e_2,[u_2,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1$
2.17.18	$[u_1,u_3]=\gamma e_2+u_1,[u_2,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1+u_2$
2.17.19	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2+u_1+u_2$
2.17.20	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_1+\alpha e_2+u_1+u_2$
2.17.21	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=e_1+\alpha e_2+u_2$
2.17.22	$[u_1,u_3]=\alpha e_1-\beta e_2+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_1+\alpha e_2+u_2,\beta>0$
2.17.23	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2+u_2,\lvert\alpha\rvert\leqslant\lvert\beta\rvert$
2.17.24	$[u_1,u_3]=\delta e_1+\gamma e_2+\alpha u_1-u_2,[u_2,u_3]=\beta e_1+\delta e_2+u_1+\alpha u_2,\lvert\beta\rvert\leqslant\lvert\gamma\rvert$
2.17.25	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+u_1,[u_2,u_3]=\beta e_2-u_2,\lvert\alpha\rvert\leqslant\lvert\beta\rvert$
2.17.26	$[u_1,u_3]=\alpha e_1+\beta e_2+u_1,[u_2,u_3]=e_1+\gamma e_2-u_2,-1\leqslant\beta\leqslant 1$

Доказательство для случая нормальной связности приведено в [5]. Выберем из пространств, найденных в [5], допускающие эквиаффинную (локально эквиаффинную) связность.

Рассмотрим, например, пару 2.9.1 (при $\lambda=0$, $\mu=-1$), тогда аффинная связность:

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & q_{2,2} & 0\\ 0 & 0 & q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & p_{1,2} & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кручения – $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0),(0,2p_{2,3},0),(0,0,q_{1,1}-p_{1,2})$, связность является нормальной при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $q_{2,2}=-2q_{1,1}$. Тензор кручения нулевой при $q_{1,1}=p_{1,2}$, $p_{2,3}=0$, связность является локально эквиаффинной при $\operatorname{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$, в данном случае это условие выполняется. Связность эквиаффинная, если $\operatorname{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$, то есть при $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$, следовательно $q_{2,2}=-2q_{1,1}$, тогда (с учетом T=0) $q_{2,2}=-2p_{1,2}$. Получаем, что эквиаффинная (локально эквиаффинная) связность имеет вид, приведенный в теореме 2. Тензор Риччи является симметрическим (т. е. связность является локально эквиаффинной) при $p_{2,3}(p_{1,2}-q_{1,1}+q_{2,2})=0$, в частности, при $T=0$, что соответствует полученному ранее. У пары 2.9.2 ($\mu=-1$) аффинная связность совпадает с выписанной для 2.9.1, тензор кручения – $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0),(0,2p_{2,3}-1,0),(0,0,q_{1,1}-p_{1,2})$. Связность является нормальной либо при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}\neq 0$, либо при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$. Тензор кручения нулевой при $q_{1,1}=p_{1,2}$, $p_{2,3}=1/2$, а связность является локально эквиаффинной при $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$, тогда (с учетом $T=0$) имеем $q_{2,2}=-2p_{1,2}$. Полученная связность эквиаффинная, поскольку $\operatorname{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$ и принимает вид, приведенный в теореме 2. Тензор Риччи является симметрическим при $q_{1,1}=p_{2,3}(q_{1,1}-p_{1,2}-q_{2,2})$, в случае $T=0$ имеем $q_{2,2}=-2p_{1,2}$, что соответствует полученному выше. У пары 2.9.4 при $\mu=-1$ связность совпадает со случаем 2.9.1, тензор кручения – $(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0),(0,2p_{2,3},0),(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}+1)$. Связность является нормальной при $p_{1,2}\neq 0$, $p_{2,3}\neq 0$, $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$. Тензор кручения нулевой при $q_{1,1}=p_{1,2}-1$, $p_{2,3}=0$, тогда имеем локально эквиаффинную связность. Связность является эквиаффинной при $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$ (и $\mu=-1$), тогда (с учетом $T=0$) получаем $q_{2,2}=-2p_{1,2}+2$. В данном случае тензор Риччи также является симметрическим при $p_{2,3}(q_{1,1}-p_{1,2}-q_{2,2}-1)=0$, в частности, при $T=0$.

Прямыми вычислениями получаем результаты для всех остальных случаев. У пар 2.17.2–2.17.4, 2.17.6–2.17.10, 2.17.13–2.17.15, 2.17.17–2.17.26 связность имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

Условия существования нормальной связности в этих случаях:

Пара	Аффинная связность нормальна при
2.17.2, 2.17.3, 2.17.13, 2.17.14, 2.17.15, 2.17.17, 2.17.20, 2.17.21	$a\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.4, 2.17.6, 2.17.7	$p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.8, 2.17.10	$b\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.9	$b\delta\neq\gamma$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.18	$a\delta\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.19, 2.17.23, 2.17.25	$ab\neq 0$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.22	$a^2+b^2\neq 0$ (всегда, т. к. $b>0$), $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.24	$\delta^2\neq b\gamma$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$
2.17.26	$b\neq a\gamma$, $p_{1,3}=r_{1,1}=p_{2,3}=q_{2,3}=q_{1,3}=0$

Для пары 2.20.18 при α = 0 аффинная связность:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{11}+p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{11} & 0 \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix},$$

а для пар 2.9.4 (μ = 0), 2.9.5, 2.9.6, 2.9.7 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix}.$$

Тензоры кручения указанных связностей:

Пара	Тензоры кручения
2.17.2, 2.17.3, 2.17.4, 2.17.6, 2.17.7	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{2,3}, 0), (2q_{1,3}, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3}, 0)$
2.17.8, 2.17.10	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 2p_{2,3}, 0), (2q_{1,3}, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3} - \alpha, 0)$
2.17.9	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 2p_{2,3}, 0), (2q_{1,3} - \alpha, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3}, 0)$
2.17.13, 2.17.14, 2.17.15, 2.17.17	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{2,3}, 0), (2q_{1,3} - 1, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3}, 0)$
2.17.18, 2.17.19, 2.17.20	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 2p_{2,3}, 0), (2q_{1,3} - 1, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3} - 1, 0)$
2.17.21, 2.17.22, .17.23	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 2p_{2,3}, 0), (2q_{1,3}, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3} - 1, 0)$
2.17.24	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1} - \alpha, 2p_{2,3}+1, 0), (2q_{1,3} - 1, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3} - \alpha, 0)$
2.17.25, 2.17.26	$(0, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1} - 1, 2p_{2,3}, 0), (2q_{1,3}, 2q_{2,3} - r_{1,1} - p_{1,3}+1, 0)$
2.20.18 при $\alpha = 0$	$(p_{12} - q_{11}, 0, 0), (p_{13} - r_{11} - 1, 0, 0), (q_{13} - r_{12}, p_{13} - r_{11} - 1, q_{11} - p_{12})$
2.9.4 при μ = 0	$(p_{12} - q_{11} - 1, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0), (0, q_{23} - r_{22}, q_{11} - p_{12} + 1)$
2.9.5, 2.9.6.	$(p_{12} - q_{11}, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0), (0, q_{23} - r_{22} - a, q_{11} - p_{12})$
2.9.7.	$(p_{12} - q_{11}, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0), (0, q_{23} - r_{22} - 1, q_{11} - p_{12})$

Таким образом, прямыми вычислениями получаем следующую теорему:

Теорема 2. Эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности (без кручения) на трехмерных редуктивных однородных пространствах разрешимых групп Ли, приведенных в теореме 1, имеют следующий вид:

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
2.9.1	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
2.9.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
2.9.4, μ =0	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}-1 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & -3p_{13} \\ 0 & 0 & p_{1,2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -3p_{13} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$
2.9.4, μ =–1	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}-1 & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
2.9.5,2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23}-\alpha & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix},$ при $\alpha \neq 0$ $q_{22} = -2p_{12}$

2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{12} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23}-1 & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$
2.20.18	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13}-1 & q_{13} & r_{13} \\ 0 & p_{13}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{13}-1 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевая
2.17.2, 2.17.3, 2.17.4, 2.17.6, 2.17.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.17.8, 2.17.10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}+\alpha/2-1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-1 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}-\alpha/2-1/2 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-1 \end{pmatrix}$
2.17.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & p_{1,3}-1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-1 & -\alpha/2 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}-1/2 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-1 \end{pmatrix}$
2.17.13, 2.17.14, 2.17.15, 2.17.17	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & -1/2 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.17.18, 2.17.19, 2.17.20	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-1 & -1/2 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}-1 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-1 \end{pmatrix}$
2.17.21, 2.17.22 2.17.23	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-1 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}-1 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-1 \end{pmatrix}$
2.17.24	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-\alpha & -1/2 & r_{1,3} \\ 1/2 & p_{1,3}-\alpha & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-\alpha \end{pmatrix}$
2.17.25, 2.17.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-1 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-1 \end{pmatrix}$

Пара	Эквиаффинная связность (без кручения)
2.9.1	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$
2.9.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$
2.9.4, μ =0	не допускает эквиаффинных связностей
2.9.4, μ =–1	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$
2.9.5, 2.9.6, 2.9.7	не допускает эквиаффинных связностей

2.20.18	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 & q_{13} & r_{13} \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевая
2.17.2, 2.17.3, 2.17.4, 2.17.6, 2.17.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.17.8, 2.17.10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (\alpha+5)/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (5\alpha+1)/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\alpha-3)/8 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & (-3\alpha+1)/8 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & (\alpha+1)/4 \end{pmatrix}$
2.17.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/8 & -\alpha/2 & r_{1,3} \\ 0 & 1/8 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$
2.17.13, 2.17.14, 2.17.15, 2.17.17	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.17.18, 2.17.19, 2.17.20	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & r_{1,3} \\ 0 & -1/4 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
2.17.21, 2.17.22, 2.17.23	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & -1/4 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
2.17.24	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\alpha/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3\alpha/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha/4 & -1/2 & r_{1,3} \\ 1/2 & -\alpha/4 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & \alpha/2 \end{pmatrix}$
2.17.25, 2.17.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 1/2 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Заключение. Найдены и описаны в явном виде эквиаффиные (локально эквиаффинные) связности на трехмерных редуктивных однородных пространствах с разрешимой группой преобразований. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. Результаты, полученные в работе, могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики.

Литература

1. Wang, H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. –№ 13. – P. 1–19.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 414 с.

3. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.

4. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.

5. Можей, Н. П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2016. – № 6 (99). – С. 74–81.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 12.02.2021