УДК 681.5

Частотная характеристика КИХ-фильтров с линейной фазой

Крыжевич Н.А., студент гр.960801

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

г. Минск, Республика Беларусь

Данейко Т.М. – старший преподаватель каф. ИКТ

Аннотация. Работа представляет собой описание частотной характеристики ких=фильтров с линейной фазой.

Ключевые слова. Ких-фильтр, частотная характеристика, уравнение, преобразование.

Зададим линейную ФЧХ цифрового фильтра вида:

$$\Phi(\omega)=K\cdot\omega+B, \qquad (1)$$

где K - тангенс угла наклона ФЧХ, а $B=\Phi(0)$. Согласно определению, ФЧХ можно получить из комплексного коэффициента передачи цифрового фильтра $H\left(e^{j\cdot\omega}\right)$:

$$\Phi(\omega)=\arctan\left(\frac{\Im\left[H\left(e^{j\cdot\omega}\right)\right]}{\Re\left[H\left(e^{j\cdot\omega}\right)\right]}\right)=\ldots$$
$$\ldots=\arctan\left(\frac{-\sum_n h(n)\cdot\sin(n\cdot\omega)}{\sum_n h(n)\cdot\cos(n\cdot\omega)}\right)=K\cdot\omega+B \qquad (2)$$

Групповая задержка фильтра при этом будет равна $\tau(\omega)=-K$. При отрицательном K мы получим положительную групповую задержку, что важно, так как отрицательная задержка соответствует физически нереализуемым фильтрам, когда отклик на воздействие возникает раньше самого воздействия.

Из выражения (5) можно выразить:

$$\frac{-\sum_n h(n)\cdot\sin(n\cdot\omega)}{\sum_n h(n)\cdot\cos(n\cdot\omega)}=\tan(K\cdot\omega+B)=\frac{\sin(K\cdot\omega+B)}{\cos(K\cdot\omega+B)}, \qquad (3)$$

Откуда в свою очередь следует, что:

$$-\sum_n h(n)\cdot\sin(n\cdot\omega)\cdot\cos(K\cdot\omega+B)=\sum_n h(n)\cdot\cos(n\cdot\omega)\cdot\sin(K\cdot\omega+B). \qquad (4)$$

Вспомним тригонометрические тождества, тогда (7) можно представить:

$$-\sum_n h(n)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\sin\left((n+K)\cdot\omega+B\right)+\sin\left((n-K)\cdot\omega-B\right)\right]=\dots$$
$$\dots=\sum_n h(n)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\sin\left((K+n)\cdot\omega+B\right)+\sin\left((K-n)\cdot\omega+B\right)\right]. \qquad (5)$$

После переноса в одну сторону и упрощения выражения (8) получим:

$$\sum_n h(n)\cdot\sin\left((n+K)\cdot\omega+B\right)=0. \qquad (6)$$

Таким образом выражение (6) задает уравнение, которому должна удовлетворять импульсная характеристика цифрового фильтра, чтобы фильтр имел линейную ФЧХ. Уравнение (6) должно выполняться при фиксированных K и B и для всех ω

Для вычисления нужно записать частотную характеристику КИХ-фильтров с линейной фазой в виде

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H^*\left(e^{j\omega}\right)e^{j(\beta-\alpha\omega)} \qquad (7)$$

где $H^*\left(e^{j\omega}\right)$ — действительная функция, а α и β определяются формулами (7), выразим функцию $H^*\left(e^{j\omega}\right)$ через значения коэффициентов импульсной характеристики для каждого из четырех видов фильтров с линейной фазой. Соответствующие формулы будут получены в данном разделе. Позже они будут использованы при изложении различных методов расчета КИХ- фильтров с заданными частотными характеристиками.

Фильтр вида 1. Симметричная импульсная характеристика, нечетное N . Для этого случая $H\left(e^{j\omega}\right)$ можно представить в виде

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h(n)e^{-j\omega n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega(N-1)/2}+\sum_{n=(N+1)/2}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n} \qquad (8)$$

Делая замену $m=N-1-n$ во второй сумме, получим

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h(n)e^{-j\omega n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega(N-1)/2}+\sum_{m=0}^{(N-3)/2}h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)} \qquad (9)$$

Поскольку $h(n)=h(N-n-1)$, две суммы в (3.21) можно объединить, а член вынести за скобки, что дает

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}\left[\sum_{n=0}^{(N-3)/2}h(n)\left\{e^{j\omega[(N-1)/2-n]}+e^{-j\omega[(N-1)/2-n]}\right\}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\right] \qquad (10)$$

или

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}\left\{\sum_{n=0}^{(N-3)/2}2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\right\} \qquad (11)$$

Подставив $m=(N-1)/2-n$, получим

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}\left[\sum_{n=0}^{(N-3)/2}2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\cos\left(\omega m\right)+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\right] \quad (12)$$

Окончательно при $a\left(0\right)=h\left[\left(N-1\right)/2\right]$ и $a\left(n\right)=2h\left[\left(N-1\right)/2-n\right]$, где $n=1,2,\ldots,\left(N-1\right)/2$, выражение (3.24) принимает вид

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}\left[\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a\left(n\right)\cos\left(\omega n\right)\right] \quad (13)$$

что и дает искомую частотную характеристику. Таким образом, для фильтра вида 1

$$H^*\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a\left(n\right)\cos\left(\omega n\right) \quad (14)$$

Фильтр вида 2. Симметричная импульсная характеристика, четное N. В этом случае $H\left(e^{j\omega}\right)$ принимает вид

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}\left\{\sum_{n=0}^{(N-1)/2}2h\left(n\right)\cos\left[\omega\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \quad (15)$$

Подставляя в это выражение

$$b\left(n\right)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\quad n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

получим

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}\left\{\sum_{n=1}^{N/2}b\left(n\right)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \quad (3.28)$$

Таким образом, для фильтра вида 2

$$H^*\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=1}^{N/2}b\left(n\right)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \quad (3.29)$$

Необходимо отметить, что $H^*\left(e^{j\omega}\right)=0$ при $\omega=\pi$ независимо от значений $b\left(n\right)$ [или $h\left(n\right)$].

Отсюда следует, что нельзя использовать фильтры этого вида для аппроксимации частотной характеристики, отличной от нуля при $\omega=\pi$ (например, при проектировании фильтров верхних частот).

Фильтр вида 3. Антисимметричная импульсная характеристика, нечетное N.

В этом случае вывод формулы для $H^*\left(e^{j\omega}\right)$ почти такой же, как и для фильтров вида 1, за исключением того, что из-за антисимметрии $\left\{h\left(n\right)\right\}$ сумма косинусов заменяется на сумму синусов, умноженную на j, т. е. вместо формулы (3.24) следует записать

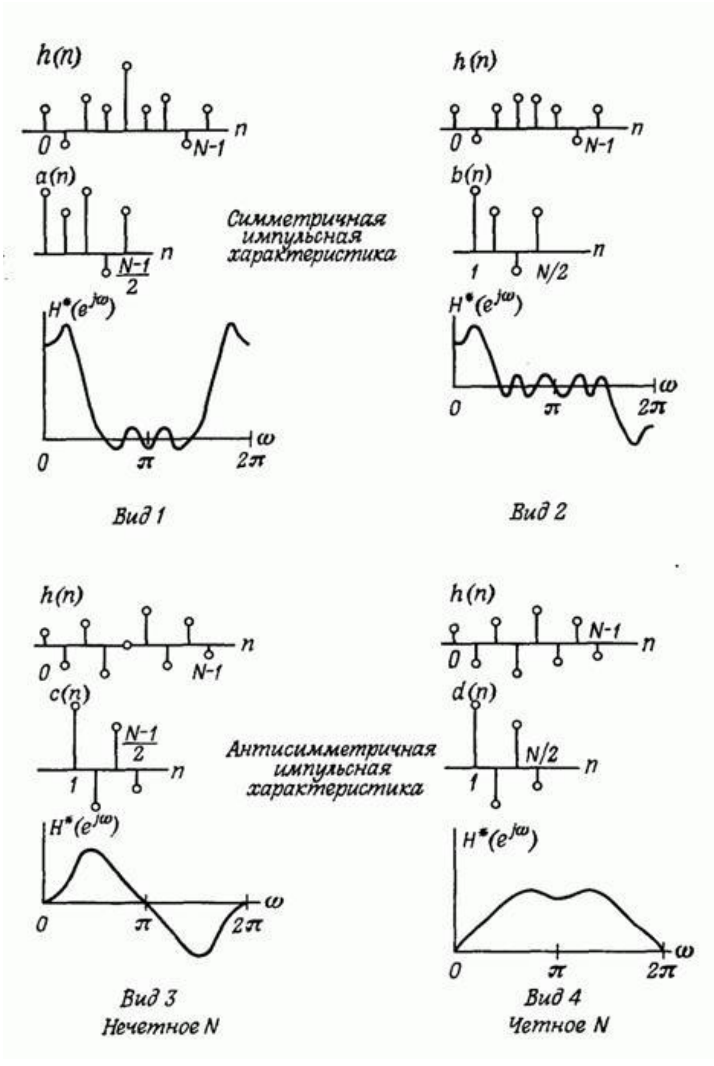
$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}e^{j\pi/2}\left[\sum_{m=0}^{N/2}2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\cos(\omega m)\right] \qquad (3.30)$$

где $h\left[(N-1)/2\right]=0$, как было показано выше. Делая подстановку $c(n)=2h\left[(N-1)/2-n\right]$ при $n=1,2,\ldots,(N-1)/2$, получим

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega(N-1)/2}e^{j\pi/2}\left[\sum_{n=1}^{(N-1)/2}c(n)\sin(\omega n)\right]. \qquad (3.31)$$

Таким образом, для фильтра вида 3

$$H^*\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2}c(n)\sin(\omega n). \qquad (3.32)$$



Фиг. 3.4. Четыре вида фильтров с линейной фазовой характеристикой.

Видно, что $H^*\left(e^{j\omega}\right)=0$ на частотах $\omega=0$ и $\omega=\pi$ независимо от значений $c(n)$ [или значений $h(n)$, что то же самое]. Более того, множитель $e^{j\pi/2}=j$ в формуле (3.31) показывает, что без учета множителя с линейным изменением фазы частотная характеристика является чисто мнимой функцией. Поэтому этот вид фильтров наиболее пригоден для проектирования преобразователей Гильберта и дифференциаторов.

Фильтр вида 4. Антисимметричная импульсная характеристика, четное N .

В этом случае есть аналогия с фильтрами вида 2. Заменяя сумму косинусов суммой синусов, умноженной на j , вместо (3.27) получим

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{j\pi/2} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} \quad (3.33)$$

Подстановка в это выражение

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}$$

дает

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{j\pi/2} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2-1} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \quad (3.34)$$

Таким образом, для фильтра вида 4

$$H^*\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (3.35)$$

причём $H^*\left(e^{j\omega}\right) = 0$ при $\omega = 0$. Следовательно, этот вид фильтров больше всего подходит для аппроксимации дифференциаторов и преобразователей Гильберта.

На фиг. 3.4 графически представлены все основные результаты, полученные в этом разделе, а именно типичные импульсные характеристики $h(n)$, соответствующие им сдвинутые последовательности [от $a(n)$ до $d(n)$ для каждого конкретного случая] и типичные частотные характеристики $H^*\left(e^{j\omega}\right)$ для каждого из четырех видов КИХ-фильтров с линейной фазой.

Список использованных источников:

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М: Мир, 1978.Глава 3.5

UDC 681.5

FREQUENCY RESPONSE OF FIR FILTERS WITH LINEAR PHASE

Kryzhevich N.A., student group 960801

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Minsk, Republic of Belarus

Daneiko T.M. – senior lecturer of the Department of ICT

Annotation. The work is a description of the frequency response of FIR=filters with a linear phase.

Keywords. FIR filter, frequency response, equation, transformation..