

УДК 628.336

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И ДИСКРЕТНАЯ СВЕРТКИ

Ревтович П. И.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники¹

г. Минск, Республика Беларусь

Данейко Т.М. – старший преподаватель кафедры ИКТ

Аннотация. В данной статье рассмотрено применение свертки как основной операции в цифровой обработке сигналов, а также отмечены их основные свойства. Приведены примеры использования свертки для решения различных задач цифровой обработки. Смоделирована схема генерации дискретной свертки в приложении к пакету MATLAB Simulink.

Ключевые слова. Цифровая обработка сигналов, дискретная свертка, Simulink, схема генерации, моделирование, операции, свойства.

Введение

В век информационных технологий ключевую роль играет цифровая обработка сигналов (ЦОС), которая оказывает существенное влияние на многие технологические области: обработка изображений, распознавание речи, телекоммуникации, биомедицина, потребительские цели. Обусловлено это многими преимуществами ЦОС:

- *превосходная производительность*, позволяющая выполнять функции невозможные при аналоговой обработке;
- *гарантированная точность*, обусловленная количеством битов;
- *большая гибкость* — важнейшая особенность ЦОС. Возможность перепрограммирования систем без изменения оборудования;
- *совершенная воспроизводимость*, которая позволяет многократно воспроизводить и копировать цифровые записи без ухудшения качества сигнала.

На данный момент существует несколько различных алгоритмов ЦОС, для которых, впрочем, используются одни и те же операции, несмотря на различную сложность этих алгоритмов. Основными из этих операций являются: свертка, фильтрация, корреляция, модуляция и преобразования. Однако, несмотря на кажущуюся сложность цифровой обработки, все операции базируются на простых арифметических действиях — сложения, умножения, вычитания и операции сдвига.

Интегральная свертка в цифровой обработке сигналов

В теории сигналов и цифровой обработке информации важное значение имеют две теоремы: о свертке и произведении сигналов. Представить их можно в следующем виде:

$$S_{12}(t) = S_1(t) \otimes S_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_1(f)\dot{U}_2(f) \quad (1)$$

$$S_1(t)S_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_1(f) \otimes \dot{U}_2(f) = \dot{U}_{12}(f) \quad (2)$$

Знаком \otimes обозначена операция интегральной свертки, а знаком \leftrightarrow — отображение по Фурье.

Свертка функций — особая математическая операция, одна из наиболее часто используемых в ЦОС. Возникновение такого рода операции обусловлено физическими задачами, связанными с наблюдением объектов с помощью приборов. Свертку можно представить как результат преобразования сигнала $S(t)$ в линейной системе с постоянными параметрами:

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (3)$$

Большая часть всех основных функциональных преобразований сигнала сводятся к подобному интегралу, который называются интегралом свертки. Отличительной особенностью такого интеграла является то, что одна из функций должна быть обращена во времени (в нашем случае это функция $g(t)$, которая представляет собой импульсную характеристику системы). Проверить это можно, представив результат в виде суммы двух компонент:

$$S_{\text{вых}}(t) = I_1(t) + I_2(t) \quad (4)$$

где $I_1(t)$ и $I_2(t)$ соответственно равны следующим интегралам:

$$I_1(t) = \int_{-\infty}^t S(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (5)$$

$$I_2(t) = \int_t^{\infty} S(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (6)$$

Компонента $I_1(t)$ показывает реакцию системы до момента времени t (на «прошлое» воздействие), а $I_2(t)$ — реакция системы после момента времени t (на «будущее» воздействие). То есть теоретически двухсторонняя импульсная характеристика возможна, кроме того, она может иметь четную или нечетную симметрию. Однако реальные системы никоим образом не могут реагировать на «будущее» поведение сигнала $S(t)$, на основании чего можно сделать вывод о том, что в реальных системах точный результат свертки не достижим.

Второй же неприятной особенностью свертки является протяженность свертываемых функций, то есть, если импульсная характеристика имеет большую протяженность, то реакция на воздействие будет затянутой.

Чтобы избежать указанные проблемы, при проектировании систем используют различные методы: аппроксимацию коэффициента передачи и импульсной характеристики, ввод задержки, обратные связи. Но в таком случае схемы получаются довольно дорогими и с невысоким качеством обработки сигналов. Поэтому более предпочтительным является перевод задачи свертки из интегрального в дискретный вариант:

$$S_{\text{вых}}(m\Delta t) = \sum_{-\infty}^{\infty} S(n\Delta t)g((m - n)\Delta t) \quad (7)$$

Все компоненты в данном случае представлены своими отсчетами с одинаковым интервалом времени Δt . Но стоит отметить, что формальный переход к дискретному варианту не снимает вышеперечисленных проблем. Для этого необходимо модифицировать исходные данные.

Переход к модифицированным исходным данным и моделирование схемы вычислителя свертки в Simulink

Представим импульсную характеристику $g_0(t)$ и коэффициент передачи $K_0(f)$ идеализированного аналогового преобразователя в усеченном виде. Причем таким образом, чтобы сохранились взаимная однозначность и характерные свойства. Модифицированные импульсная характеристика и коэффициент передачи назовем эталонными и на их основе определим параметры дискретного преобразователя. При усечении необходимо сохранить строгие симметрию и асимметрию компонент в частотной и временной областях. Для формирования эталонных характеристик используем прямоугольную стробирующую функцию. Окончательный вид эталонных характеристик:

(8)

$$\dot{K}_3(f) = \int_{-F}^F \dot{K}_0(x)W(f-x; 2T)dx$$

$$g_3(t) = g_F(t)\Pi(t; 2T)$$

(9)

Данные характеристики устанавливают общие правила модификации исходных данных. Они снимают многие проблемы при разработке реальных систем обработки сигналов. Следующим шагом необходимо перейти к дискретному времени. Для этого зададим частоту дискретизации. Следует обеспечить два условия. Первое условие связано с минимизацией перехлеста в частотной области. Частоту дискретизации выбирают с запасом в диапазоне:

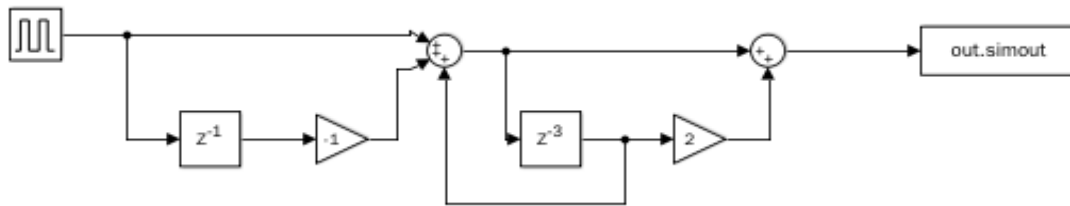


Рис. 1. Схема генерации дискретной свертки

$$f_0 = (2,5)F_{\max}, F_{\max} = \max(F_s, F)$$

(10)

где F_s и F — граничные частоты сигнала и преобразователя. Второе же условие связано с тем, что на отрезке $2T$ должно уложиться целое число интервалов Dt :

$$N = 2Tf_0 + 1$$

(11)

где N — число отсчетов эталонной импульсной характеристики на указанном отрезке, определяющее порядок преобразователя.

Таким образом, импульсную характеристику реализуемого преобразователя должна представлять отсчеты смещенной эталонной импульсной характеристики. Тогда аналоговую свертку можно заменить на дискретную и

$$g(n) = g_3(n - a), n = 0(1)N - 1$$

реализуемую:

$$m = 0, 1, \dots$$

(12)

$$S_{\text{вых}}(m) = \sum_{n=m-N}^m S(n)g(m-n),$$

Простейшую схему вычислителя свертки (12) можно составить по системной функции, которая представляет собой Z-преобразование последовательности $g(n)$:

$$D(z) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)z^{-n}$$

(13)

Предположим, что системная функция явно определена и имеет вид:

$$D(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-3})}{1 - z^2}$$

(14)

Исходя из данной системной функции без проблем можно смоделировать схему генерации свертки в рекурсивном виде. Вид схемы вычислителя свертки представлен на рисунке 1.

Свойства свертки

Операция свертки обладает следующими тремя свойствами:

1. *Закон коммутативности* — независимость результата операции свертки от перестановки сигналов местами.

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = x_2(t) \otimes x_1(t) \quad (15)$$

2. *Закон дистрибутивности* — свертка сигнала $x_1(t)$ с суммой сигналов $x_2(t)$ и $x_3(t)$ равнозначна сумме двух сверток сигнала $x_1(t)$ с каждым из них.

$$x_1(t) \otimes [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) \otimes x_2(t) + x_1(t) \otimes x_3(t) \quad (16)$$

3. *Закон ассоциативности* — позволяет по-разному группировать операцию свертки.

$$x_1(t) \otimes [x_2(t) \otimes x_3(t)] = [x_1(t) \otimes x_2(t)] \otimes x_3(t) \quad (17)$$

Все эти свойства можно доказать, расписав соответствующие интегралы, или же рассмотрев свертку как взаимную корреляцию одной последовательности с обращенной во времени другой.

Примеры использования

В данном разделе рассмотрим основные примеры использования свертки для различных задач.

1. БИХ- и КИХ-фильтры

Работа БИХ- и КИХ-фильтров является хорошим практическим примером свертки. Фильтры могут проектироваться таким образом, чтобы они выполняли свертку последовательностей либо более общую цифровую фильтрацию. Спектр применения БИХ- и КИХ-фильтров обширен. Они могут использоваться как для обработки изображений (подавление шумов, распознавание, очистка изображений), так и для обработки речи (получение кодов РСМ, субполосные кодеры).

2. Сверточное кодирование

Сверточные коды используются для корректировки возникающих ошибок. Это достигается путем введения в код цифр контроля четности.

3. Обращение свертки

Вход абсолютно всех существующих систем сворачивается с импульсной характеристикой системы и может исказить выход. В системах телекоммуникаций это приводит к необходимости использовать эквалайзер, который представляет собой линейный фильтр, восстанавливающий исходный сигнал по выходу. Для разработки эквалайзера необходимо определить импульсную характеристику системы. Такой процесс называется идентификацией системы.

4. Речь

Использование операции свертки в данной области обусловлено тем, что речевой сигнал можно смоделировать как свертку серии импульсов, представляющих основные тоны, активирующих импульсов и импульсной характеристики речевого тракта. Данную тройную свертку можно без проблем обратить в форму, подходящую для линейной независимой от времени системы.

Заключение

В результате проведенного исследования рассмотрена основополагающая операция цифровой обработки сигналов под названием свертка. Отмечены особенности интегральной свертки, не позволяющие ее использование в реальных системах цифровой обработки. Рассмотрен метод и необходимые параметры для перехода от интегральной свертки к дискретной и подходящей для реализации реальных систем. На основании всего вышеперечисленного представлен пример одной из возможных схем генерации дискретной свертки, смоделированный при помощи программного средства MATLAB Simulink. Также были отмечены основные свойства данной операции: ассоциативность, дистрибутивность, коммутативность.

Немаловажным пунктом является рассмотрение примеров использования свертки для совершенно различных задач цифровой обработки — от речевого синтеза до обработки изображений. Такой широкий спектр областей позволяет ощутить масштабы использования данной операции и подчеркивает необходимость ее изучения студентами технических специальностей.

Литература

1. *Солонина А.И.* Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 768 с.
2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов; пер. с англ. М.: Мир, 1978. С. 748
3. *Айфичер Э., Джервис Б.* Цифровая обработка сигналов, практический подход; пер. с англ. М.: Изд. Дом «Вильямс», 2004, 992 с.
4. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов: учеб. для вузов. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
5. *Лосев В.В.* Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: учеб. для вузов. Минск: Выш. шк. 1990. 132 с.
6. *Солонина А.И.* Цифровая обработка сигналов и MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург. 2013. 512 с.