УДК

ПРОГРАММА ВИЗУАЛИЗАЦИИ И ПОДСЧЕТА ЧИСЛА ФРОБЕНИУСА НА ОСНОВЕ ДВУХКОНТУРНОЙ СЕТИ И ФОРМУЛЫ РЁДСЕТА

Химич Н. А., Быков А. Д., студенты гр. 124405.
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З. Н. – канд. физ.-мат. наук

Аннотация. В данной работе рассматриваются числа Фробениуса и составлена программа для их нахождения с помощью двухконтурных сетей и цепных дробей.

Ключевые слова. Число Фробениуса, двухконтурная сеть, формула Рёдсета.

Введение. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — натуральные числа, взаимно простые в совокупности (наибольший общий делитель всех чисел равен 1). Числом Фробениуса $g(a_1, a_2, \dots a_n)$ называется наибольшее целое число, непредставимое в виде линейной комбинации

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n, \#(1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — целые неотрицательные числа.

Задачу о нахождении числа Фробениуса также называют *“Задачей Фробениуса с обменом монет”, поскольку* число Фробениуса — это максимальная сумма, которую нельзя представить купюрами номиналом $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Множеством NR называется конечное множество всех целых чисел, непредставимых в виде линейной комбинации (1), числом Фробениуса - наибольшее число из этого множества.

Известна формула, полученная Сильвестром [1], нахождения числа Фробениуса при $n = 2$:

$$g(a_1, a_2) = a_1 a_2 - a_1 - a_2. \#(2)$$

Нахождение числа Фробениуса при $n = 3$ с использованием цепных дробей рассматривается в работах Сельмера, А. О. Бейера и О. Дж. Рёдсета [2].

При $n \geq 4$ известны формулы для нахождения $g(a_1, a_2, \dots a_n)$ лишь для некоторых частных случаев. Показано [3], что для фиксированного n решение можно найти за полиномиальное время, а при произвольно выбранном n такая задача является NP-трудной.

Нахождение числа Фробениуса с использованием двухконтурных сетей изучено А.В. Устиновым [4]. Формула нахождения числа Фробениуса при помощи цепных дробей получена Рёдсетом [3].

В статье рассматривается нахождение числа Фробениуса двумя способами: с помощью двухконтурных сетей и цепных дробей. Составлен алгоритм и написана программа нахождения числа Фробениуса при $n = 3$ указанными способами.

Формула Джонсона [5]. При нахождении числа Фробениуса $g(a, b, c)$ можно избавляться от общих делителей аргументов

$$g(d \cdot a, d \cdot b, c) = d \cdot g(a, b, c) + c \cdot (d - 1). \#(3)$$

Учитывая данную формулу, в дальнейшем будем считать, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c) = \text{НОД}(a, c) = 1$.

Двухконтурная сеть. Допустим, что $a = max(a, b, c)$. Каждой тройке чисел a, b, c поставим в соответствие двухконтурную сеть – ориентированный граф с a вершинами $0, 1, \dots, a - 1$ и ребрами двух типов: $j \to j + b \ (mod\ a)$ и $j \to j + c \ (mod\ a)$ весами $wb = b$ и $wc = c$ соответственно.

На рисунке 1 приведен пример двухконтурной сети для $a = 7,\ b = 3,\ c = 5$. Черным пунктиром обозначены связи с весом $wb = 3$. Синими обозначены связи с весом $wc = 5$.

Красным изгибом обозначен самый длинный путь с самым большим суммарным весом из вершины 0.

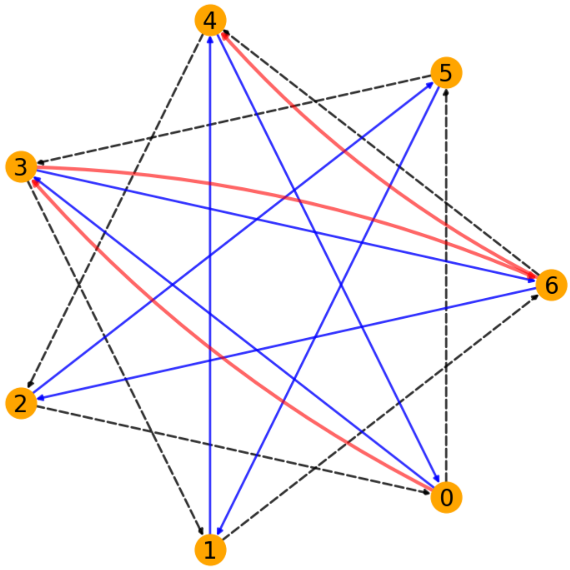

Рисунок 1 - Схема двухконтурной сети для $a = 7, b = 3, c = 5$

Введем функцию $time(x, y) = bx + cy$, которая определяет суммарный вес пути, где x - количество ребер весом wb, а y - количество ребер весом wc. Для каждого кратчайшего пути из вершины 0 до каждой другой вершины двухконтурной сети поставим в соответствие клетку с координатами (x, y) и запишем в нее значение $time(x, y)$ - сумма весов маршрута. Получится диаграмма, приведенная на рисунке 2.1. Построим вторую диаграмму, для каждого значения $time(x, y)$ запишем в клетку с координатами (x, y) значение $point(x, y) = time(x, y)(mod\ a)$ (рисунок 2.2). Из построения получим: чтобы дойти из вершины 0 до вершины, записанной в клетке полученной диаграммы, координаты которой (x, y), надо пройти x ребер с весом wb, и y ребер с весом wc.

Диаграмма (рисунок 2.1), построенная в соответствии с графом (рисунок 1), имеет L-образную форму. Тогда пусть точка $C = (x_C, y_C)$ и $E = (x_E, y_E)$ - крайние правые точки ступеней построенной L-образной диаграммы. В примере: $time(x_C, y_C) = 11$ и $time(x_E, y_E) = 9$ соответственно.

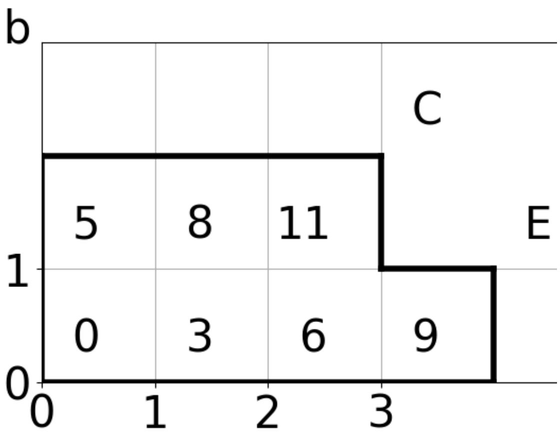

Рисунок 2.1

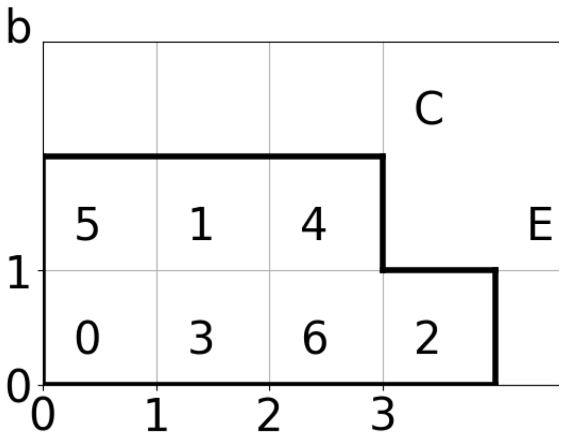

Рисунок 2.2

Теорема 1. Число Фробениуса равно:

$$g(a,b,c) = \max\{t(x_C,y_C), t(x_E,y_E)\} - a - b - c. \#(4)$$

Формула Рёдсета. Составим дробь $\frac{a}{S_0}$, где целое число S_0 определяется из условия:

$$bS_0 \equiv c \ (mod\ a), \ \ 0 \le S_0 < a.$$

Построим числовую последовательность $\{S_i\}$, используя алгоритм Евклида в виде:

$$\begin{cases} a = S_{-1} = q_1 S_0 - S_1, & 0 \le S_1 < S_0; \\ S_0 = q_2 S_1 - S_2, & 0 \le S_2 < S_1; \\ S_1 = q_3 S_2 - S_3, & 0 \le S_3 < S_2; \\ \ldots \\ S_{m-2} = q_m S_{m-1} - S_m, & 0 \le S_m < S_{m-1}; \\ S_{m-1} = q_{m+1} S_m, & 0 \le S_{m+1} < S_m. \end{cases}$$

Тогда число $\frac{a}{S_0}$ *можно представить в виде цепной дроби:*

$$\frac{a}{S_0} = q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ldots - \cfrac{1}{q_{m-1} - \cfrac{1}{q_m}}}}$$

Также определим целочисленную последовательность $\{P_i\}$: $P_{-1} = 0, P_0 = 1$, $P_{i+1} = q_{i+1}P_i - -P_{i-1}, i = 0,1,2,\ldots,m$. Полагая, что $\frac{S_{-1}}{P_{-1}} = \infty$, и так как $q_i \ge 2$, последовательность $\{P_i\}$ монотонно возрастает, $\{S_i\}$ монотонно убывает, значит имеет место неравенство:

$$0 = \frac{S_{m+1}}{P_{m+1}} < \frac{S_m}{P_m} < \cdots < \frac{S_0}{P_0} < \frac{S_{-1}}{P_{-1}} = \infty$$

Найдем номер $v, -1 \le v \le m$, такой, что $\frac{S_{v+1}}{P_{v+1}} \le \frac{c}{b} < \frac{S_v}{P_v}$.

Теорема 2. Пусть a, b, c – положительные целые числа и a, b взаимно простые. Число Фробениуса определяется по формуле:

$$g(a,b,c) = -\mathrm{a} + \mathrm{b} \cdot (S_v - 1) + \mathrm{c} \cdot (P_{v+1} - 1) - \min(\mathrm{b} \cdot S_{v+1}, \mathrm{c} \cdot P_v) . \# \qquad (5)$$

Результат работы. Результатом работы является составленная нами программа, которая быстро подсчитывает число Фробениуса двумя способами: на основе двухконтурной сети и формулы Рёдсета. А также рисует двухконтурную сеть, две диаграммы и подробный ход нахождения числа Фробениуса с использованием цепных дробей. Скриншот работы программы для примера $\mathrm{a} = 12, b = 17, c = 11$ приведен на рисунке 3.

Части интерфейса программы. Программа условно поделена на четыре части: поле ввода данных, поле вывода численных данных, 3 графика, относящиеся к методу двухконтурных сетей, и 1 график с подсчётом через формулу Рёдсета.

Часть ввода данных представлена в виде надписи «Введите 3 числа:» и трех полей ввода, где пользователь может ввести три числа, для которых будет найдено число Фробениуса.

Ниже находиться кнопка «Посчитать», нажатие на которую запускает программу.

Часть вывода численных данных представлена в виде четырех полей: в поле «Упрощенные числа» выводятся числа a, b, c после применения формулы Джонсона (3). В поле «Делители» выводятся общие делители аргументов функции, полученные при применении формулы Джонсона. В поле «Число Фробениуса» выводится посчитанное число Фробениуса с помощью Двухконтурной сети. И в поле «NR множество» выводиться NR множество.

Три графика «Граф», «Сумма пути до вершины» и «Путь до вершины» соответствуют рисункам 1, 2.1 и 2.2 в пункте «Двухконтурные сети».

График «Число Фробениуса через цепные дроби» содержит в себе алгоритм, описанный в пункте «Формула Рёдсета».

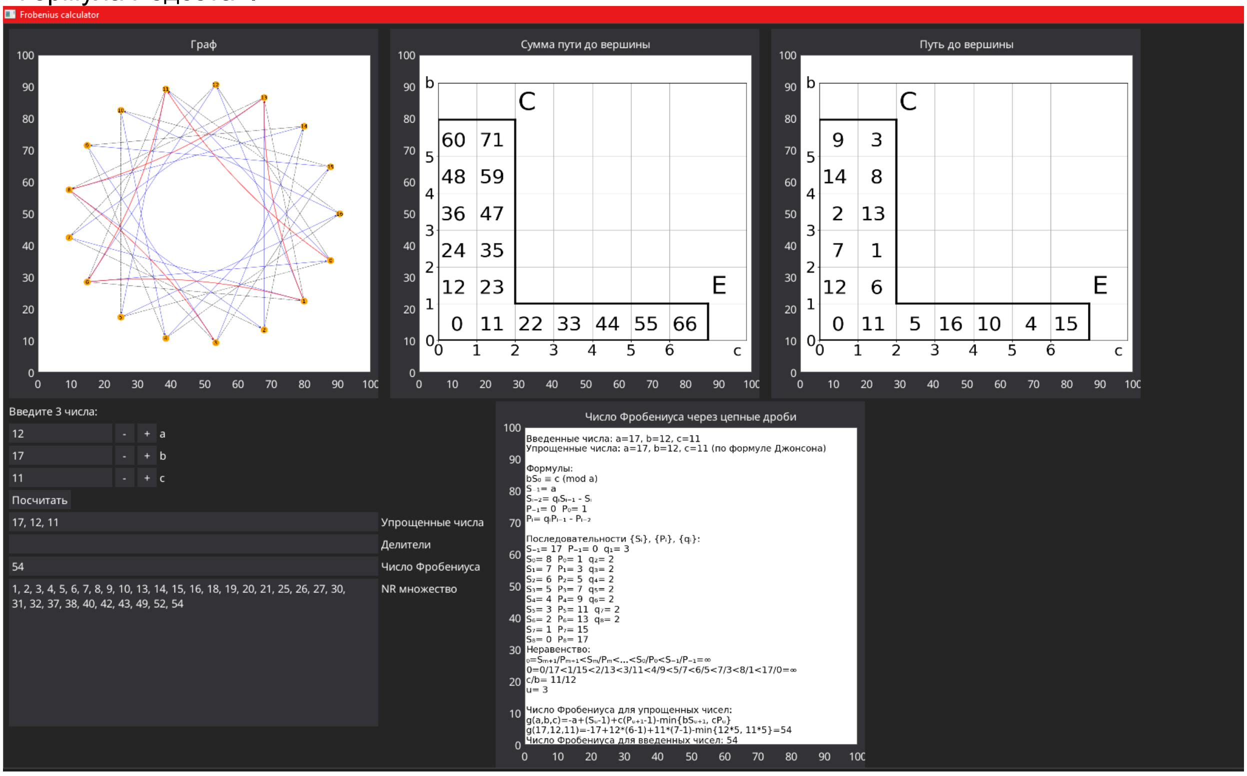

Рисунок 3 - Результат работы программы для примера $a = 12, b = 17, c = 11$.

Вывод. Сконструированная программа позволяет быстро и наглядно находить число Фробениуса для $n = 3$, поскольку решение этой задачи занимает огромное количество времени. За счет наглядности геометрического способа и структурированного вывода нахождения числа Фробениуса через цепные дроби, пользователь способен в краткие сроки обучиться методам нахождения числа Фробениуса.

Список использованных источников:

1. Sylvester J.J. Question 7382 // Educ. Times. 1884. V. 37. P. 26; Mathematics from the Educational Times, with additional papers and solutions // Mathematical questions, with their solutions, from the “Educational Times”. London: F. Hodgson, 1884. V. 41. P. 21.

2. Rodseth O.J. On a linear Diophantine problem of Frobenius // J. reine angew. Math. 1978. Bd. 301. S. 171–178.

3. Kannan R. Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem // Combinatorica. 1992. V. 12, N 2. P. 161–177.

4. A. V. Ustinov, Geometric proof of Rødseth’s formula for Frobenius numbers, Trudy Mat. Inst. Steklova, 2012, Volume 276, 280–287

5. Johnson S.M. A linear diophantine problem // Can. J. Math. 1960. V. 12. P. 390–398.

UDC

PROGRAM FOR VISUALIZATION AND CALCULATION OF THE FROBENIUS NUMBER ON THE BASIS OF A DUAL CIRCUIT NETWORKS AND THE RÖDSET FORMULA

Khimich N. A., Bykov A. D.
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus
Primicheva Z. N. - Ph.D. in Physics and Mathematics

Annotation. The article discusses Frobenius numbers and developed program, which designed to calculate the Frobenius number by dual circuit networks and continued fractions.

Keywords. Frobenius number, dual circuit networks, Rödset formula.4