DOI: 10.34220/MPST2022_235-237
УДК 512.815.6

О НАХОЖДЕНИИ ПОДАЛГЕБР МАЛОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР ЛИ

ON FINDING SUBALGEBRAS OF SMALL DIMENSIONS LINEAR LIE ALGEBRAS

Можей Наталья Павловна
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий», Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР), г. Минск, Беларусь, mozhey@bsuir.by

Аннотация. Цель работы – описание с точностью до сопряженности подалгебр маломерных линейных алгебр Ли. Определены основные понятия – линейная алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли, разделяющая оболочка, автосопряжение, специальное автосопряжение, подалгебра Леви–Картана, линейный нильрадикал, подалгебра Мальцева. Приведен алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом, затем решается задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с данной разделяющей оболочкой. Результаты работы могут быть использованы при исследовании приложений однородных пространств и структур на них в математике и физике.

Abstract. The purpose of the work is a description up to conjugacy of subalgebras of small dimensions linear Lie algebras. The basic concepts are defined – linear Lie algebra, dividing Lie algebra, dividing cover, auto-conjugation, special auto-conjugation, Levi–Cartan subalgebra, linear nilradical, Maltsev's subalgebra. The classification algorithm for dividing Lie algebras with a given linear nilradical is presented, then the problem of classifying non-dividing linear Lie algebras with a given dividing cover is solved. The results of the work can be used in the study of applications of homogeneous spaces and structures on them in mathematics and physics.

Ключевые слова: линейная группа Ли, алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли.

Keywords: linear Lie group, Lie algebra, dividing Lie algebra.

Целью данной работы является описание любых подалгебр линейных алгебр Ли малых размерностей с точностью до сопряженности. Пусть V – фиксированное конечномерное векторное пространство над полем нулевой характеристики. Напомним, что подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ называются *линейными* алгебрами Ли. Линейная алгебра Ли называется *разделяющей*, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента. *Разделяющей оболочкой* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется минимальная разделяющая линейная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{g}$, она обозначается $e(\mathfrak{g})$ [1].

Группа $GL(V)$ действует на алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ при помощи ее автоморфизмов: $\varphi.x = \varphi \cdot x \cdot \varphi^{-1}$, где $\varphi \in GL(V)$ и $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Если n – нильпотент-ный эндоморфизм пространства V, то $(\exp ad n)(x) = (\exp n) \cdot x \cdot (\exp(-n)) = (\exp n).x$ для всех $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Если $\mathfrak{g}$ – линейная алгебра Ли (т. е. $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$), то элементы группы $A(\mathfrak{g}) = \{\varphi \in GL(V) \mid \varphi.\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\}$ назовем *автосопряжениями* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{r}$ – радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то автосопряжения вида $\exp n\, (n \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}])$ называются *специальными*. Они образуют подгруппу группы $A(\mathfrak{g})$.

Пусть $\mathfrak{s}$ – подалгебра Леви алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана алгебры Ли $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. Подалгебра $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ называется *подалгеброй Леви–Картана* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – линейная разделяющая алгебра Ли; M – множество подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, редуктивных в $\mathfrak{gl}(V)$ и дополнительных в $\mathfrak{g}$ к идеалу $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$, и Q – множество подалгебр Леви–Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда:

(i) Существует взаимно однозначное соответствие между множествами M *и* Q.

Если $\mathfrak{m} \in M$; $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$ ($\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ *и* $\mathfrak{t}$ *– центр алгебры Ли* $\mathfrak{m}$), *то* $\mathfrak{h} = Z_{Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})}(\mathfrak{t})$ *– подалгебра Картана алгебры Ли* $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ *и* $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \in Q$.

Если $\mathfrak{q} \in Q$; $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ *и* $\varphi(\mathfrak{h})$ *– множество полупростых эндоморфизмов, лежащих в* $\mathfrak{h}$, *то* $\mathfrak{s} \oplus \varphi(\mathfrak{h}) \in M$.

(ii) Группа специальных автосопряжений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *действует на множестве* M *транзитивно.*

Напомним, что идеал $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$ называется *линейным нильрадикалом* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а элементы множества M *– подалгебрами Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ *– линейная разделяющая алгебра Ли*; $\mathfrak{n}$ *– ее линейный нильрадикал и* $\mathfrak{m}$ *– ее подалгебра Мальцева. Тогда:*

(i) Если $\mathfrak{a}$ *– подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *редуктивная в* $\mathfrak{gl}(V)$, *то существует специальное автосопряжение алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *переводящее* $\mathfrak{a}$ *в некоторую подалгебру в* $\mathfrak{m}$.

(ii) $\mathfrak{m}$ *является максимальным элементом множества подалгебр алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *редуктивных в* $\mathfrak{gl}(V)$.

Если $\mathfrak{h}$ *– подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *содержащая ее коммутант* $\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, *то подалгебры* $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ *и* $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ *являются разделяющими.*

Пусть $\mathfrak{g}$ *– линейная разделяющая алгебра Ли,* $\mathfrak{n}$ *– ее линейный нильрадикал и* $\mathfrak{m}$ *– ее подалгебра Мальцева. Если подалгебры* $\mathfrak{m}_1$ *и* $\mathfrak{m}_2$ *алгебры Ли* $\mathfrak{m}$ *сопряжены при помощи группы* $A(\mathfrak{g})$, *то они сопряжены при помощи группы* $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}) = A(\mathfrak{g}) \cap A(\mathfrak{m})$.

Зафиксируем некоторую линейную алгебру Ли $\mathfrak{n}$, состоящую из нильпотентных эндоморфизмов (классификация таких алгебр приведена, например в [2]). Нормализатор $N(\mathfrak{n})$ подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{gl}(V)$ является разделяющей подалгеброй. Зафиксируем некоторую подалгебру Мальцева $\overline{\mathfrak{m}}$ алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ и положим $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$. Ясно, что $\overline{\mathfrak{g}}$ является разделяющей алгеброй Ли, $\mathfrak{n}$ – ее линейным нильрадикалом и $\overline{\mathfrak{m}}$ – ее подалгеброй Мальцева. Все разделяющие алгебры Ли указанного вида сопряжены алгебре Ли $\overline{\mathfrak{g}}$, т. к. специальные автосопряжения алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ сохраняют идеал $\mathfrak{n}$.

Любая разделяющая алгебра Ли с линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ *сопряжена некоторой разделяющей алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *с подалгеброй Мальцева* $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \overline{\mathfrak{m}}$.

Пусть $\mathfrak{m}_1$ *и* $\mathfrak{m}_2$ *– подалгебры алгебры Ли* $\overline{\mathfrak{m}}$, *редуктивные в* $\mathfrak{gl}(V)$. *Тогда для того, чтобы алгебра Ли* $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}$ *была сопряжена алгебре Ли* $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}$, *необходимо и достаточно, чтобы подалгебра* $\mathfrak{m}_1$ *переводилась в подалгебру* $\mathfrak{m}_2$ *при помощи группы* $A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}})$.

Итак, алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом $\mathfrak{n}$ выглядит следующим образом:

1) Строится нормализатор $N(\mathfrak{n})$ подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{gl}(V)$.

2) Фиксируется некоторая подалгебра Мальцева $\overline{\mathfrak{m}}$ алгебры Ли $N(\mathfrak{n})$ и строится разделяющая алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$.

3) С точностью до сопряженности относительно группы $A(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{m}})$ описываются подалгебры $\mathfrak{m}_\alpha$ алгебры Ли $\overline{\mathfrak{m}}$, редуктивные в $\mathfrak{gl}(V)$, и выписываются разделяющие подалгебры $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{n}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ *– линейная разделяющая алгебра Ли;* $\mathfrak{n}$ *– ее линейный нильрадикал;* $\mathfrak{m}$ *– ее подалгебра Мальцева и* $\mathfrak{h}$ *– некоторая подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда для того, чтобы* $e(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* $1. \mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$; $2. \mathfrak{h} + \mathfrak{m} = \mathfrak{g}$; $3. \mathfrak{h} + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} / \mathcal{D}\mathfrak{g}$ и $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ – каноническая сюръекция. Группа $A(\mathfrak{g})$ естественным образом действует на пространстве $\mathfrak{a}$. При этом ограничение этого действия на подгруппу специальных автосопряжений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тривиально.

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством подалгебр $\mathfrak{h}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *для которых* $e(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, *и множеством подпространств* U *пространства* $\mathfrak{a}$, *для которых* $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ *и* $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$. *При этом соответствии* $\mathfrak{h} \mapsto p(\mathfrak{h})$; $U \mapsto p^{-1}(U)$. *Если* $\mathfrak{h}_1$ *и* $\mathfrak{h}_2$ *– такие подалгебры алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *что* $e(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{g}$ *и* $e(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{g}$, *то подалгебры* $\mathfrak{h}_1$ *и* $\mathfrak{h}_2$ *сопряжены друг другу тогда и только тогда, когда соответствующие им подпространства* $p(\mathfrak{h}_1)$ *и* $p(\mathfrak{h}_2)$ *сопряжены друг другу относительно действия группы* $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$.

Итак, задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с разделяющей оболочкой $\mathfrak{g}$ сводится к классификации подпространств $U \subset \mathfrak{a}$, таких, что $U \neq \mathfrak{a}$, $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$, с точностью до сопряженности относительно действия группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$.

Если $\mathfrak{t}$ *– центр алгебры Ли* $\mathfrak{m}$, *то* $p(\mathfrak{m}) = p(\mathfrak{t})$. *Из этого, в частности, следует, что* $\mathfrak{a} = p(\mathfrak{t}) \oplus p(\mathfrak{n})$.

Пусть $\mathfrak{g}$ *– линейная алгебра Ли,* L *– множество подалгебр алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *редуктивных в* $\mathfrak{gl}(V)$, *и* M *– множество максимальных элементов в множестве* L. *Тогда группа специальных автосопряжений алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *действует на множестве* M *транзитивно.*

Для классификации неразделяющих подалгебр $\mathfrak{h}$ с данной разделяющей оболочкой $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ требуется описать такие собственные подпространства U в $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} / \mathcal{D}\mathfrak{g}$, что $U + p(\mathfrak{n}) = U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$, с точностью до группы $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$.

Приведен и применен алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом, затем решена задача классификации неразделяющих маломерных линейных алгебр Ли с данной разделяющей оболочкой. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании приложений однородных пространств и структур на них в математике и физике.

Библиографический список

1. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли, гл. I–VIII / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1972–1978.

2. Можей, Н. П. Линейные алгебры Ли, состоящие из нильпотентных эндоморфизмов / Н. П. Можей // Труды БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информатика. – 2020. – Т. 1 (230). – С. 20–25.