

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных средств

М. И. Вашкевич, М. И. Порхун

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для специальности 1-40 02 02 «Электронные вычислительные средства»*

Минск БГУИР 2022

УДК 621.391(076)
ББК 32.811я73
В23

Рецензенты:

кафедра математической кибернетики
Белорусского государственного университета (протокол № 7 от 29.01.2021);

заведующий кафедрой технологии и методики преподавания
Белорусского национального технического университета
кандидат технических наук, доцент А. А. Дробыш

Вашкевич, М. И.

В23 Теория и применение цифровой обработки сигналов : учеб.-метод.
пособие / М. И. Вашкевич, М. И. Порхун. – Минск : БГУИР, 2022. – 84 с. : ил.
ISBN 978-985-543-647-9.

Приводятся базовые концепции цифровой обработки сигнала. Весь материал разбит на три раздела: «Дискретные сигналы», «Дискретные системы», «Z-преобразование». В первом разделе рассматриваются различные свойства дискретных сигналов и описываются модели основных дискретных сигналов (единичный импульс, единичный скачок, дискретные синусоиды и т. д.). Второй раздел посвящен математическому аппарату, используемому для описания дискретных систем. Подробно рассмотрены свойства, которыми могут обладать дискретные системы. Основное внимание уделено рассмотрению линейных стационарных дискретных систем. В третьем разделе изложены основы z-преобразования. Рассмотрены вопросы применения z-преобразования для анализа дискретных сигналов и систем. Изложенный материал иллюстрируется множеством примеров. В конце каждого раздела помещены задачи, решение которых позволит студенту лучше усвоить излагаемый материал.

УДК 621.391(076)
ББК 32.811я73

ISBN 978-985-543-647-9

© Вашкевич М. И., Порхун М. И., 2022
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиозлектроники», 2022

Содержание

Введение	4
1 Дискретные сигналы	5
1.1 Начальные понятия.....	5
1.2 Понятие частоты для дискретных сигналов.....	6
1.3 Периодические и аperiodические последовательности.....	8
1.4 Базовые сигналы ЦОС.....	9
1.5 Операции над сигналами.....	18
1.6 Симметричные последовательности.....	20
1.7 Энергия и мощность дискретных сигналов	21
1.8 Классификация сигналов	23
1.9 Задачи к разделу 1	26
2 Дискретные системы	31
2.1 Общие сведения о дискретных системах	31
2.2 Свойства дискретных систем.....	32
2.3 Умножение полиномов при помощи свертки	39
2.4 Свойства ЛС-систем	40
2.5 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.....	43
2.6 Частотная характеристика дискретной системы	46
2.7 Задачи к разделу 2.....	51
3 Z-преобразование.....	53
3.1 Общие сведения о z-преобразовании.....	53
3.2 Определение z-преобразования	53
3.3 Сходимость z-преобразования.....	54
3.4 Анализ разностных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи z -преобразования.....	56
3.5 Обратное z-преобразование	60
3.6 Задачи к разделу 3.....	65
Приложение А Ответы к задачам раздела 1.....	68
Приложение Б Ответы к задачам раздела 2	77
Приложение В Ответы к задачам раздела 3	79
Список использованных источников.....	82

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) – это научная дисциплина, изучающая методы обработки информации, представленной в цифровом виде. Некоторые приемы численного анализа, применяемые в ЦОС, можно найти в работах Ньютона и Гаусса. Однако появление в 20-м веке высокоскоростных цифровых компьютеров дало новый толчок в развитии этой области. На протяжении последних десятилетий ЦОС оказывает первостепенное и постоянно возрастающее влияние на такие ключевые технологические отрасли, как телекоммуникации, цифровое телевидение, спутниковая навигация, биомедицина, цифровая звукозапись, космические исследования. В настоящее время ЦОС – это основной предмет почти во всех курсах, посвященных технике связи, вычислительной и электронной технике (англ. *computer and electrical engineering*). В современном мире от инженеров-электронщиков, программистов, связистов требуется умение грамотного использования методов ЦОС.

В данном учебно-методическом пособии охвачены лишь базовые понятия и концепции ЦОС, изучение которых необходимо для любого, кто собирается в своей практической деятельности использовать математический аппарат ЦОС. Весь материал пособия разбит на три раздела. Первый раздел посвящен дискретным сигналам, подробно рассматриваются вопросы, связанные с понятиями периода и частоты дискретного сигнала. Рассмотрены модели основных дискретных сигналов (единичный импульс, единичный скачок и т. д.). Второй раздел посвящен математическому аппарату, используемому при описании дискретных систем. Подробно рассмотрены свойства, которыми могут обладать дискретные системы. Основное внимание уделено рассмотрению линейных стационарных дискретных систем. В третьем разделе изложены основы z -преобразования. Рассмотрены вопросы применения z -преобразования для анализа дискретных сигналов и систем. В конце каждой главы помещены задачи, решение которых позволит студенту лучше усвоить излагаемый материал.

1 ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

1.1 Начальные понятия

Дискретный сигнал – это функция целочисленного аргумента n , например $x(n)$. Иногда вместо термина «дискретный сигнал» используют термин «последовательность». Дискретный сигнал не определен в нецелые моменты времени, поэтому графически его изображают в виде стеблевого графика (*stem plot*). Каждому отсчету сигнала соответствует вертикальная линия, оканчивающаяся кружком. Пример стеблевого графика показан на рисунке 1.1.

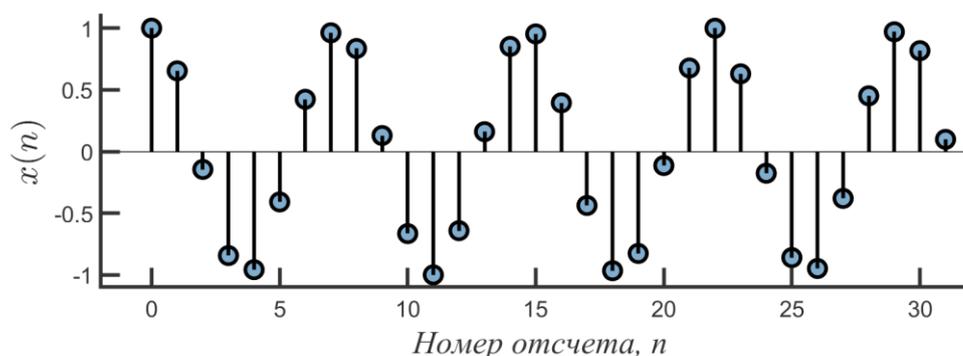


Рисунок 1.1 – Пример дискретного сигнала

В некоторых случаях на $x(n)$ смотрят как на вектор:

$$\mathbf{x} = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N - 1)]^T. \quad (1.1)$$

Дискретные сигналы часто возникают при дискретизации аналоговых сигналов (реального мира). Например, $x_a(t)$, который дискретизируется с частотой (скоростью) $f_s = 1/T$ (шаг дискретизации T) отсчетов в секунду, производит сигнал $x(n)$, который связан с $x_a(t)$ следующим образом:

$$x(n) = x_a(nT), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

где nT – дискретное время; n – дискретное нормированное время.

Однако есть достаточно случаев, когда сигнал $x(n)$ порожден процессами, дискретными по времени. Например, цена на товар или количество покупателей в магазине в зависимости от времени суток.

1.2 Понятие частоты для дискретных сигналов

Обратимся к вопросу о представлении частоты дискретного сигнала. Рассматривая данный вопрос, важно выяснить взаимосвязь таких понятий, как частота дискретизации и частота непрерывного и дискретного сигналов. Пусть имеется непрерывный (аналоговый) синусоидальный сигнал, который выражается как

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.3)$$

где A – амплитуда; Ω – круговая частота синусоиды (рад/с); φ – начальная фаза (в радианах).

Для круговой частоты известно соотношение

$$\Omega = 2\pi F, \quad (1.4)$$

где F – частота сигнала (Гц).

Подставляя (1.4) в (1.3), получаем

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \varphi), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.5)$$

На рисунке 1.2 представлено синусоидальное колебание, описываемое выражением (1.5).

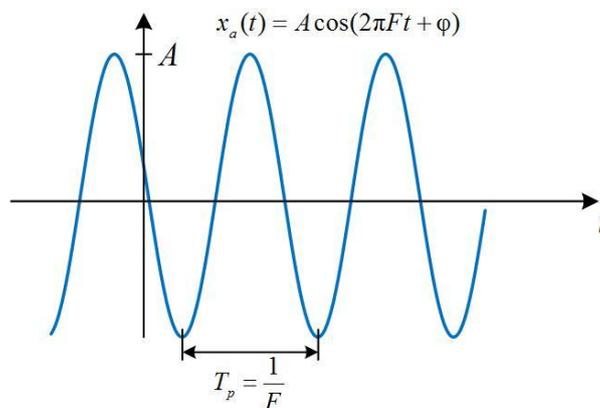


Рисунок 1.2 – Аналоговая синусоида с амплитудой A , частотой F (Гц) и фазой φ (радиан)

Синусоида (1.5) является периодическим сигналом с периодом T_0 . Известно, что любой периодический сигнал удовлетворяет свойству

$$x_a(t) = x_a(t + T_0).$$

Это означает, что сигнал повторяется после каждого периода в T_0 секунд. Частота непрерывной синусоиды может быть неограниченно увеличена (до бесконечности) или уменьшена до нуля, т. е. частота F удовлетворяет условию $0 \leq F < \infty$.

Выполним дискретизацию непрерывной синусоиды (1.5) при помощи выражения (1.2):

$$x(n) = x_a(nT) = A \cos(2\pi F n T + \varphi) = A \cos\left(2\pi \frac{F}{f_s} n + \varphi\right). \quad (1.6)$$

Заметим, что получившаяся синусоида имеет вид

$$x(n) = A \cos(\omega n + \varphi), \quad \omega = 2\pi \frac{F}{f_s}. \quad (1.7)$$

Частоту дискретного сигнала ω по аналогии с непрерывным сигналом (1.3) называют круговой частотой. Однако между Ω в (1.3) и ω в (1.7) имеется существенная разница. Аналоговая круговая частота Ω измеряется в радианах в секунду, а ω – в радианах на отсчет, причем величина n (в отличие от переменной времени t) является безразмерной (иногда говорят, что n измеряется в отсчетах).

Тот факт, что переменная n в формуле (1.7) принимает только целые значения, подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных синусоид. Эта разница особенно заметна при частоте $\omega + 2\pi$:

$$x(n) = \cos((\omega + 2\pi)n) = \cos(\omega n + 2\pi n) = \cos(\omega n).$$

То есть для дискретного синусоидального сигнала частоты ω и $\omega + 2\pi$ неразличимы. По этой причине при рассмотрении дискретных синусоидальных последовательностей мы должны ограничиться интервалом частот величиной 2π . Обычно ограничиваются положительными частотами в интервале $\omega \in [0, 2\pi]$ либо выбирают симметричный интервал $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Важным выводом данного подраздела является то, что существует разница между понятием частоты для непрерывного и дискретного сигнала. Круговая частота Ω непрерывного сигнала может находиться в интервале от 0 до ∞ , в то время как частота дискретного сигнала ω ограничена интервалом величиной 2π .

1.3 Периодические и аperiodические последовательности

Сигналы дискретного времени всегда можно классифицировать как *периодические* или *аperiodические*. Дискретный сигнал считается периодическим, если

$$x(n) = x(n + N), \quad \forall n, \quad (1.8)$$

где N – период (обязательно целый).

Это эквивалентно тому, что сигнал повторяет сам себя каждые N отсчетов. Если сигнал имеет период N , то его также можно считать периодическим с периодом $2N$, с периодом $3N$ и любым другим периодом kN , где k – целое число. *Основным периодом (fundamental period)* называется наименьшее значение N_0 , удовлетворяющее условию (1.8).

Пример 1.1. Определить, являются ли периодическими следующие сигналы:

а) $x_1(n) = \cos(n^2)$; б) $x_2(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)$.

Решение:

а) сигнал $x_1(n)$ является аperiodическим, поскольку условие (1.8) для него удовлетворяется только в при $N = 0$;

б) сигнал $x_2(n)$ является периодическим. Значение $N = 16$ является минимальным, при котором для $x_2(n)$ выполняется условие (1.8).

Основной частотой (fundamental frequency) дискретного периодического сигнала называют величину

$$f_0 = \frac{1}{N_0} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}. \quad (1.9)$$

В выражении (1.9) единицей измерения f_0 являются *периоды на отсчет*, а единицей измерения ω_0 – *радианы на отсчет*.

Если $x_1(n)$ является периодической последовательностью с периодом N_1 , а $x_2(n)$ – другой периодической последовательностью с периодом N_2 , то их сумма

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (1.10)$$

будет также периодической последовательностью с периодом

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{НОД}(N_1, N_2)}, \quad (1.11)$$

где $\text{НОД}(N_1, N_2)$ – наибольший общий делитель N_1 и N_2 .

Аналогичное выражение справедливо и для произведения двух последовательностей:

$$x(n) = x_1(n)x_2(n). \quad (1.12)$$

В данном случае последовательность будет иметь период N , определяемый выражением (1.11). Однако *основной период* $x(n)$ может быть меньше.

1.4 Базовые сигналы ЦОС

В данном подразделе приводятся наиболее важные базовые сигналы ЦОС, которые используются для описания сложных сигналов реального мира.

1.4.1 Единичный скачок

Важным базовым сигналом ЦОС является *единичный скачок* (рисунок 1.3), который описывается как

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

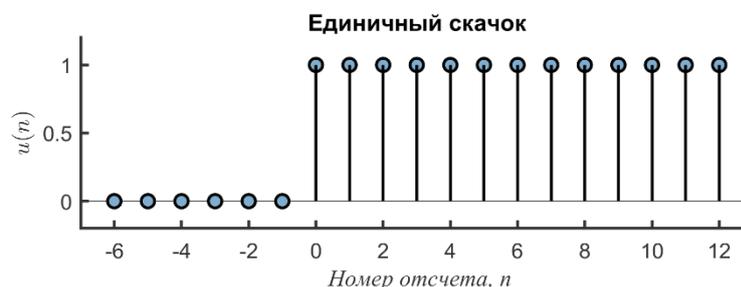


Рисунок 1.3 – График единичного скачка $u(n)$

Если необходимо, чтобы сигнал начинался в момент времени $n = 0$ (т. е., чтобы он имел нулевые значения для всех $n < 0$), то достаточно умножить его на единичный скачок $u(n)$.

Комбинация единичного скачка и его сдвинутой версии позволяет выделить определенный временной интервал. Так, например, сигнал

$$u(n) - u(n - 10)$$

равняется единице в интервале $0 \leq n \leq 9$ и нулю во всех остальных случаях (рисунок 1.4).

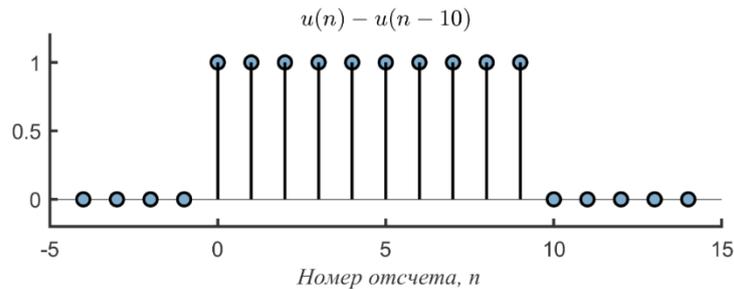


Рисунок 1.4 – Комбинация $u(n) - u(n - 10)$

1.4.2 Единичный импульс (дельта-функция)

Единичный импульс (рисунок 1.5) обозначается как

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

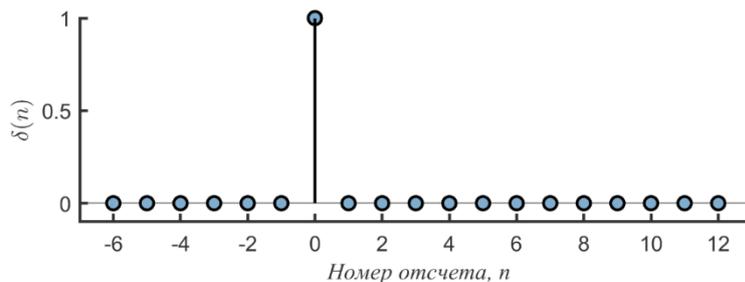


Рисунок 1.5 – Единичный импульс

Единичный импульс играет ту же роль, что и дельта-функция Дирака для представления непрерывных сигналов. Напомним, что по определению дельта-функция должна обладать двумя свойствами:

- $\delta(t)$ равна нулю повсюду за исключением точки $t = 0$;
- интеграл дельта-функции равен единице $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Очевидно, что такой функции не существует, однако это настолько полезная абстракция, что она принимается без дополнительных пояснений.

Подобно дельта-функции Дирака единичный импульс обладает несколькими важными свойствами:

1 *Умножение на единичный импульс*: если дискретный сигнал $x(n)$ умножить на сдвинутый единичный импульс, то сохранится только то значение сигнала, которое совпадает с позицией данного импульса:

$$x(n)\delta(n - m) = x(m)\delta(n - m). \quad (1.14)$$

2 *Свойство просеивания*: следствием (1.14) является то, что любой дискретный сигнал может быть выражен в виде линейной комбинации сдвинутых единичных импульсов:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k), \quad (1.15)$$

где каждый член суммы $x(k)\delta(n - k)$ является сигналом, который имеет амплитуду $x(k)$ в момент времени $n = k$ и нулевое значение во все прочие моменты времени.

3 *Взаимосвязь между $\delta(n)$ и $u(n)$* : единичный скачок можно выразить через единичный импульс следующим образом:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k). \quad (1.16)$$

Похожим образом единичный импульс можно выразить как разницу между двумя единичными скачками:

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1). \quad (1.17)$$

Пример 1.2. Изобразить график дискретного сигнала

$$p(n) = 2\delta(n + 3) + 4\delta(n - 1) + \delta(n - 2) + 3\delta(n - 4).$$

Решение. Дискретный сигнал $p(n)$ состоит из четырех сдвинутых по времени единичных импульсов с различными амплитудами. Результирующий график приведен на рисунке 1.6.

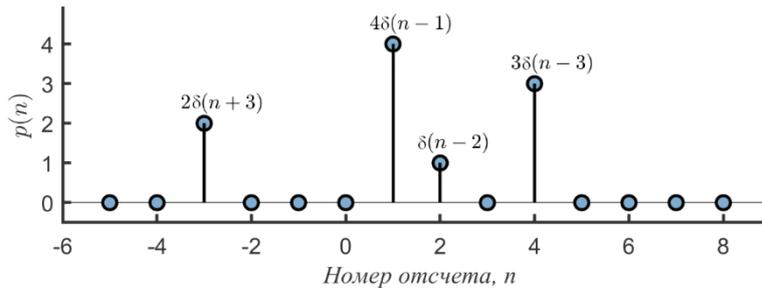


Рисунок 1.6 – График дискретного сигнала

Пример 1.3. Представить сигнал, показанный на рисунке 1.7, в виде комбинации единичных скачков и единичных импульсов.

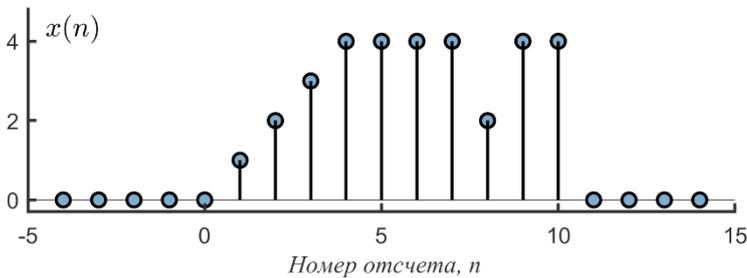


Рисунок 1.7 – Представление сигнала через единичные скачки и импульсы

Решение. Существует много способов представить сигнал $x(n)$, каждый из которых будет давать свое выражение. Рассмотрим один из возможных вариантов записи сигнала $x(n)$.

Данный сигнал можно разбить на три компоненты: 1) линейно нарастающая компонента $x_1(n)$, $n \in [0, 4]$; 2) ступенчатая компонента $x_2(n)$, $n \in [5, 10]$; 3) импульсная компонента $x_3(n)$, представляющая собой импульс с отрицательной амплитудой при $n = 8$. Рассмотрим каждую компоненту в отдельности.

Положим $x_1(n) = n(u(n) - u(n - 5))$, чтобы описать сигнал на интервале $n \in [0, 4]$. Предположим, что всплеска на 8-м отсчете нет, тогда для описания сигнала на интервале $n \in [5, 10]$ подойдет выражение

$$x_2(n) = 4(u(n - 5) - u(n - 10)).$$

Описать импульсный сигнал с амплитудой -2 при $n = 8$ можно при помощи выражения $x_3(n) = -2\delta(n - 8)$. Складывая все выражения вместе, получаем ответ:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) =$$

$$= n(u(n) - u(n - 5)) + 4(u(n - 5) - u(n - 11)) - 2\delta(n - 8).$$

Обратим внимание, что полученное выражение справедливо для любых значений n .

1.4.3 Убывающая экспонента

Рассмотрим вещественную последовательность:

$$x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1.$$

Поскольку значение a ограничено, то сигнал $x(n)$ всегда представляет собой убывающую экспоненту. Наличие в правой части выражения единичного скачка обеспечивает то, что ненулевые значения $x(n)$ могут иметь место только при $n \geq 0$. На рисунке 1.8 приведен пример убывающей экспоненты.

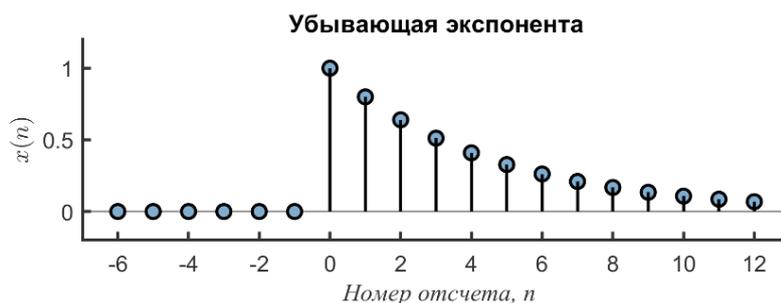


Рисунок 1.8 – Убывающая экспонента ($a = 0,8$)

Экспоненциальные последовательности хорошо себя ведут для значений параметра a , которые по модулю меньше единицы. В противном случае ($|a| > 1$) они имеют нестабильное поведение (их энергия и мощность бесконечно растут).

1.4.4 Синусоидальная последовательность

Синусоидальная последовательность описывается выражением

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \varphi) = A \cos(\omega n + \varphi), \quad (1.18)$$

где A – амплитуда; f – частота; ω – круговая частота; φ – начальная фаза.

Непрерывная синусоида $\cos(2\pi Ft + \varphi)$ всегда является периодическим сигналом, независимо от того какое значение имеет ее частота F . Также основным период всегда является величиной, обратной частоте, т. е. $T_0 = \frac{1}{F}$. Можно также сказать, что основная частота синусоиды F_0 всегда равна частоте F синусоиды (см. выражение (1.5)).

Синусоида дискретного времени (1.18) является периодической, только если ее частота f является рациональным числом. Это свойство является прямым следствием того, что величина периода N в выражении (1.8) должна быть целым числом.

Опустим для простоты в выражении (1.18) начальную фазу φ и применим к нему условие (1.8). Дискретная синусоида является N_0 -периодической, если

$$\cos(2\pi fn) = \cos(2\pi f(n + N_0)) = \cos(2\pi fn + 2\pi f N_0).$$

Данный результат возможен, только если $f N_0$ является целым числом. Это целое число, которое можно обозначить через m , должно быть наименьшим из возможных, поскольку N_0 является основным периодом. Таким образом, синусоида дискретного времени является периодической, если

$$f = \frac{m}{N_0} \quad \text{или} \quad \omega = 2\pi \frac{m}{N_0}. \quad (1.19)$$

Выражение (1.19) говорит, что дискретная синусоида является периодической, только если f – рациональное число. Более того, выражение (1.19) показывает, что за исключением случая, когда $m = 1$, частота дискретной синусоиды $f = m/N_0$ не равна частоте соответствующей непрерывной синусоиды $F = 1/N_0$. Основным период дискретной синусоиды легко определить, если записать f в сокращенной форме, как в выражении (1.19), где числитель и знаменатель являются взаимно простыми числами. Следующий пример поясняет изложенный материал.

Пример 1.4. Построить графики дискретной синусоиды $\cos(2\pi fn)$ для случаев: а) $f = 3/15$; б) $f = \frac{1}{1,7\pi}$; в) $f = \frac{1}{5,5}$. Для каждого случая определить, является ли сигнал периодическим. В случае если это верно, определить основной период N_0 и определить, является ли основная частота сигнала равной частоте синусоиды f .

Решение. Используя *MATLAB*, можно построить графики трех дискретных синусоид, выполнив следующий код:

```
n=-12:12; subplot(311); stem(n, cos(2*pi*3/15*n));  
subplot(312); stem(n, cos(2*pi*1/(1.7*pi)*n));  
subplot(313); stem(n, cos(2*pi*1/5.5*n));
```

На рисунке 1.9 показаны непрерывные синусоиды $\cos(2\pi ft)$, которые в случае дискретизации с временным шагом $T = 1$ становятся дискретными синусоидами $\cos(2\pi fn)$.

а) Очевидно, что в первом случае частота $f = \frac{3}{15}$ имеет рациональное значение и, следовательно, дискретная синусоида является периодическим сигналом. Однако $3/15$ можно сократить, получив $f = \frac{1}{5} = \frac{m}{N_0}$. Таким образом, легко найти, что основной период $N_0 = 5$. В рассмотренном случае основная частота равна $f_0 = \frac{1}{N_0} = \frac{1}{5}$ и совпадает с частотой синусоиды $f = \frac{1}{5}$. Можно заметить, что N_0 отсчетов дискретной синусоиды содержат ровно один период непрерывной синусоиды $\cos 2\pi ft$, лежащей в ее основе.

б) Поскольку иррациональное число π находится в знаменателе дроби, частота $f = \frac{1}{1,7\pi}$ не является рациональным числом. Следовательно, дискретная синусоида $\cos(2\pi \frac{1}{1,7\pi} n)$ не является периодическим сигналом. Хотя последовательность $\cos(2\pi \frac{1}{1,7\pi} n)$ содержит полную информацию о непрерывной синусоиде, лежащей в ее основе, дискретная синусоида никогда не повторяется. Заметим, что $\cos(2\pi \frac{1}{1,7\pi} n)$ содержит в среднем $1,7\pi$ отсчетов на период и, следовательно, невозможно найти такого периода N_0 , который бы содержал целое число периодов непрерывной синусоиды $\cos(2\pi ft)$.

в) В данном случае частота равна $f = \frac{1}{5,5}$. Умножая числитель и знаменатель на два, получаем рациональное значение $f = 2/11$. Следовательно, данная дискретная синусоида является периодическим сигналом. Поскольку 2 и 11 являются

взаимно простыми числами, то согласно (1.19) получаем $m = 2$ и $N_0 = 11$. Поскольку $m \neq 1$, то основная частота $f_0 = 1/N_0 = 1/11$ не равна частоте синусоиды $f = 1/5,5$. Это просто отражение того факта, что дискретная синусоида повторяется только после $m = 2$ периодов непрерывной синусоиды $\cos(2\pi f t)$, которая лежит в ее основе. Данный случай подтверждает общее положение, что частота периодической дискретной синусоиды всегда является кратной основной частоте непрерывной синусоиды, лежащей в ее основании, т. е. $f = m f_0$.

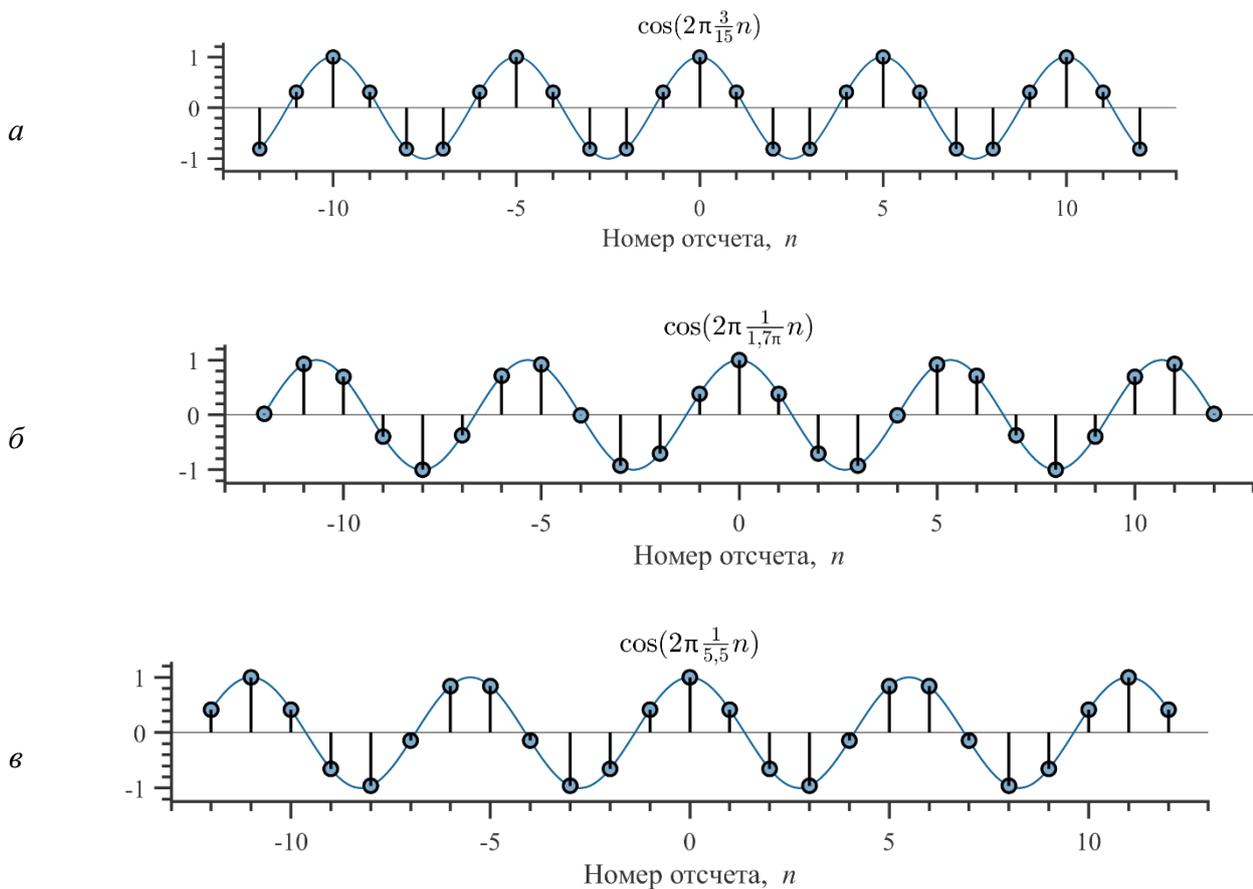


Рисунок 1.9 – Дискретные синусоиды из примера 1.4

1.4.5 Комплексная экспонента

Дискретная комплексная экспонента определяется выражением

$$x(n) = z^n,$$

где $z \in \mathbb{C}$.

Если положить, что

$$|z| = r, \quad \arg z = \omega,$$

то комплексную экспоненту можно представить в следующем виде:

$$x(n) = z^n = (re^{j\omega})^n = r^n e^{j\omega n} = r^n (\cos \omega n + j \sin \omega n).$$

Для получения последнего выражения использовалась формула Эйлера.

Частными случаями дискретной комплексной экспоненты z^n являются следующие четыре функции:

1) константная функция при $z = 1e^{j0}$:

$$x(n) = k1^n = k;$$

2) вещественная экспонента при $z = re^{j0}$:

$$x(n) = r^n;$$

3) синусоида при $z = 1e^{j\omega}$:

$$x(n) = \operatorname{Re}\{z^n\} = \operatorname{Re}\{1^n e^{j\omega n}\} = \cos \omega n,$$

$$x(n) = \operatorname{Im}\{z^n\} = \operatorname{Im}\{1^n e^{j\omega n}\} = \sin \omega n;$$

4) затухающая/возрастающая синусоида при $z = re^{j\omega}$:

$$x(n) = \operatorname{Re}\{z^n\} = \operatorname{Re}\{r^n e^{j\omega n}\} = r^n \cos \omega n,$$

$$x(n) = \operatorname{Im}\{z^n\} = \operatorname{Im}\{r^n e^{j\omega n}\} = r^n \sin \omega n.$$

Еще раз отметим, что переменная n в наших формулах принимает только целые значения, что подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных комплексных экспонент. Эта разница особенно заметна, если рассмотреть дискретную комплексную экспоненту, у которой $r = 1$, а частота равна $\omega + 2\pi$:

$$x(n) = e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} e^{j2\pi n} = e^{j\omega n}.$$

Аналогичные рассуждения применялись и для дискретных синусоид. Так что при рассмотрении дискретных экспонент мы должны ограничиться частотами в интервале 2π .

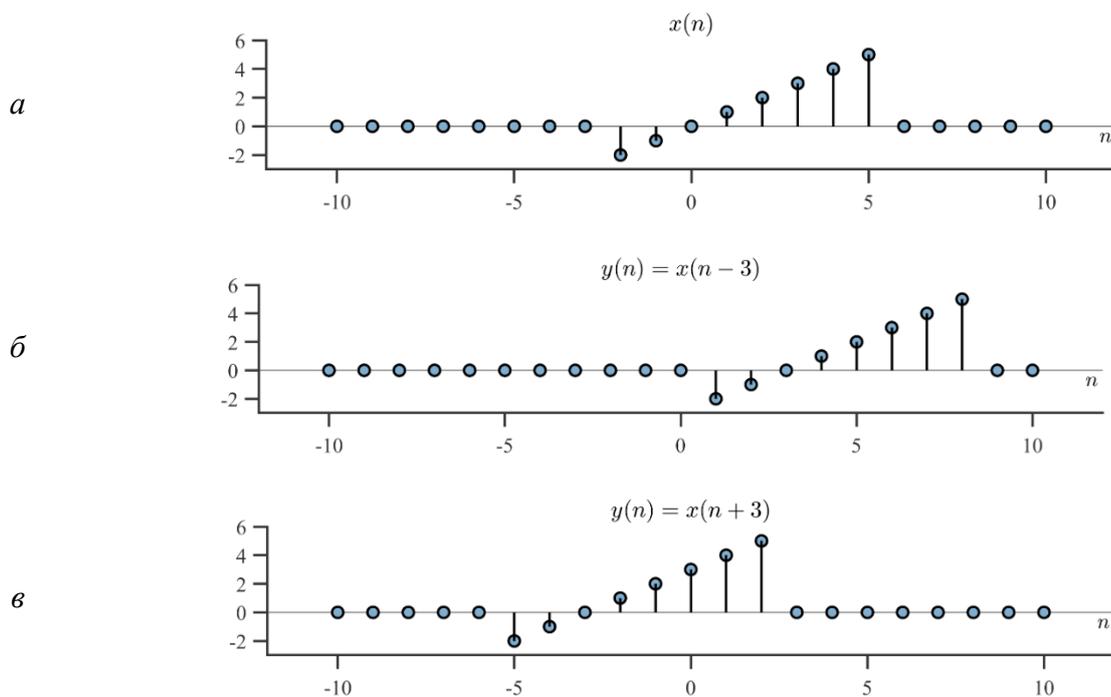
1.5 Операции над сигналами

1.5.1 Временной сдвиг

Сдвинутая на целое число отсчетов k последовательность $x(n)$ формируется как

$$y(n) = x(n - k).$$

Если k положительное, то сигнал $y(n)$ сдвигается вправо относительно $x(n)$, т. е. $y(n)$ является *задержанной* версией $x(n)$. Если k отрицательное, то сигнал $y(n)$ сдвигается влево относительно $x(n)$, т. е. $y(n)$ является *опережающей* версией $x(n)$. На рисунке 1.10 приведены примеры временного сдвига дискретного сигнала.



а – исходный вид; *б* – задержанная версия на три отсчета; *в* – опережающая версия на три отсчета

Рисунок 1.10 – Дискретные сигналы $x(n)$

При изучении и описании дискретных систем важным понятием является понятие *единичного оператора задержки* D . Действие данного оператора описывается следующим выражением:

$$D\{x(n)\} = x(n - 1).$$

Повторное применение оператора задержки обозначается как $D(D) = D^2$ и приводит к следующему действию:

$$D^2\{x(n)\} = x(n - 2).$$

При обозначении операции временного сдвига на блок-схеме дискретной системы используют один из двух способов, показанных на рисунке 1.11.



Рисунок 1.11 – Варианты обозначения операции временного сдвига

1.5.2 Масштабирование

Операция масштабирования заключается в умножении сигнала на константу $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$y(n) = \alpha x(n).$$

Если α представляет собой действительное число, то масштабирование является обычным усилением (при $|\alpha| > 1$) или ослаблением (при $|\alpha| < 1$). На рисунке 1.12 приведено условное графическое обозначение операции масштабирования, используемое при описании блок-схем дискретных систем.

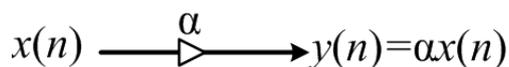


Рисунок 1.12 – Обозначение на блок-схеме операции масштабирования

1.5.3 Суммирование и произведение

Сумма двух последовательностей $x(n)$ и $w(n)$ определяется путем поэлементной операции суммирования:

$$y(n) = x(n) + w(n).$$

Аналогично определяется произведение двух последовательностей:

$$y(n) = x(n)w(n).$$

Обозначение операций суммирования и умножения, используемое при описании блок-схем дискретных систем, приведено на рисунке 1.13.

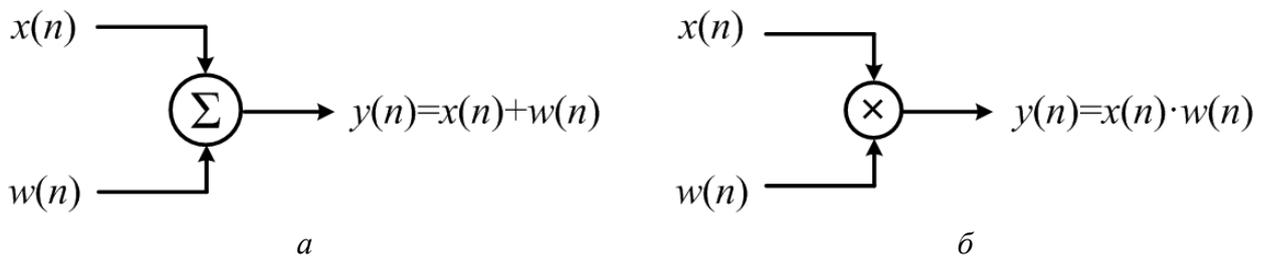


Рисунок 1.13 – Обозначение на блок-схеме операций сложения (а) и масштабирования (б)

1.6 Симметричные последовательности

Дискретные сигналы часто обладают какой-либо формой симметрии, которую можно использовать при решении задач. Интерес представляют следующие два вида симметрии:

1) действительный сигнал называется *четным*, если для всех n справедливо тождество

$$x(n) = x(-n);$$

2) действительный сигнал называется *нечетным*, если

$$x(n) = -x(-n), \quad \forall n.$$

Произвольный сигнал $x(n)$ может быть представлен в виде суммы его четной $x_e(n)$ и нечетной $x_o(n)$ части:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n), \quad \forall n.$$

Чтобы найти четную часть, вычисляется сумма:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(-n)).$$

Нечетная часть находится в виде разности:

$$x_o(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(-n)).$$

Для комплекснозначных последовательностей определение симметричности немного отличается.

Комплекснозначный сигнал называется *сопряженно симметричным*, если

$$x(n) = x^*(-n), \quad \forall n,$$

где знак «*» означает операцию комплексного сопряжения.

Комплекснозначный сигнал называется *сопряженно антисимметричным*, если

$$x(n) = -x^*(-n), \quad \forall n.$$

Комплекснозначный сигнал $x(n)$ всегда можно представить в виде суммы сопряженно симметричного $x_{cs}(n)$ и сопряженно антисимметричного сигналов $x_{ca}(n)$:

$$x(n) = x_{cs}(n) + x_{ca}(n),$$

где $x_{cs}(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x^*(-n))$, $x_{ca}(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x^*(-n))$.

1.7 Энергия и мощность дискретных сигналов

Важными характеристиками дискретных сигналов являются их энергия E_x и мощность P_x . Энергия дискретного сигнала определяется как

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n). \quad (1.20)$$

Данное определение справедливо как для действительных, так и для комплексных сигналов $x(n)$. Чтобы данное определение имело смысл, энергия сигнала должна иметь конечное значение. Для этого амплитуда сигнала должна стремиться к нулю при $|n| \rightarrow \infty$ (необходимое условие). В противном случае числовой ряд (1.20) не будет сходиться. Сигналы, которые имеют конечную энергию, называются *энергетическими сигналами*.

В некоторых случаях амплитуда сигнала $x(n)$ не стремится к нулю при $|n| \rightarrow \infty$ и энергия сигнала является бесконечной. В таких случаях более разумным является измерение мощности сигнала P_x , которая определяется как усредненное значение энергии:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2. \quad (1.21)$$

В данном уравнении сумма делится на $2N + 1$, поскольку в интервал от $-N$ до N попадают $2N + 1$ отсчетов $x(n)$. Для N_0 -периодических сигналов усреднение выполняется только на одном периоде:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2. \quad (1.22)$$

Сигнал, для которого P_x имеет конечное ненулевое значение, называют *мощным*.

Пример 1.5. На рисунке 1.14 показан дискретный сигнал $x(n)$, а также два периодических сигнала, полученных из $x(n)$ периодическим расширением:

$$x_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + 6k) \quad \text{и} \quad x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + 7k).$$

Определить энергию и мощность каждого из трех сигналов.

Решение. Поскольку $x(n) = n$ при $0 \leq n \leq 5$ и нулю при всех других n , то его энергия может быть найдена, используя выражение (1.20):

$$E_x = \sum_{n=0}^5 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Сигнал $x_1(n)$ является периодическим повторением $x(n)$ с периодом 6. Все периодические сигналы имеют бесконечную энергию, т. е. $E_{x_1} = \infty$. Мощность $x_1(n)$ можно найти при помощи выражения (1.22):

$$P_{x_1} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 n^2 = \frac{1}{6} E_x = \frac{55}{6} \approx 9,1667.$$

Сигнал $x_2(n)$ является периодическим повторением $x(n)$, но только с периодом 7. Его энергия также равна бесконечности. Мощность $x_2(n)$ можно вычислить по формуле (1.22):

$$P_{x_2} = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^5 n^2 = \frac{1}{7} E_x = \frac{55}{7} \approx 7,8571.$$

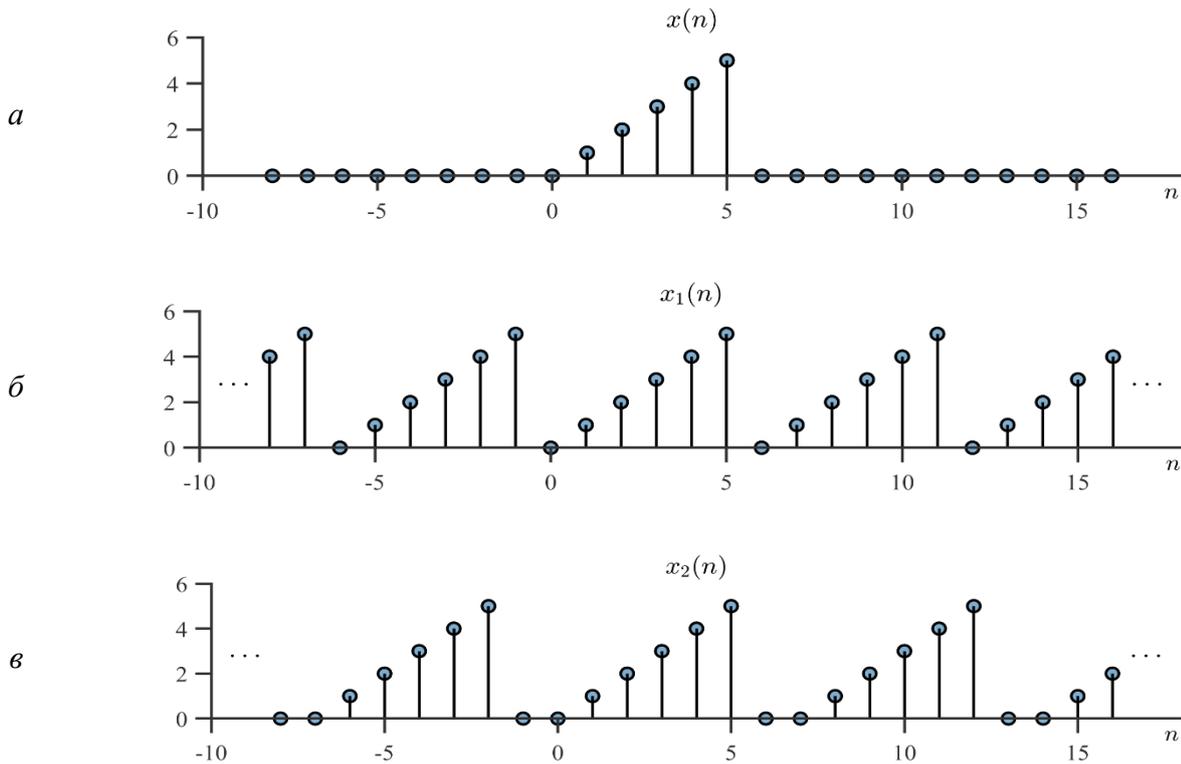


Рисунок 1.14 – Дискретные сигналы из примера 1.5

Два дискретных сигнала *ортogonalны*, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = 0.$$

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны, т. е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) + y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2.$$

1.8 Классификация сигналов

В данном подразделе рассмотрим классификацию дискретных сигналов бесконечной длины и их взаимосвязь с дискретными сигналами конечной длины.

1.8.1 Аперiodические сигналы

Наиболее общим типом дискретных сигналов является произвольная комплексная последовательность бесконечной длины. Хотя такой сигнал невозможно полностью ни сохранить, ни обработать, концепция сигнала с бесконечной длительностью является весьма важным предельным обобщением.

1.8.2 Периодические сигналы

В подразделе 1.3 уже приводилось определение периодического сигнала с периодом N . Ниже дается альтернативное определение периодического сигнала:

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.23)$$

Знак тильды в обозначении $\tilde{x}(n)$ используется для того, чтобы подчеркнуть периодический характер сигнала. Ясно, что периодический сигнал полностью определен, когда известны все N значений, составляющих его период. Таким образом, периодический сигнал несет в себе не больше информации, чем сигнал конечной длительности длиной N .

1.8.3 Периодически продолженные сигналы

Периодические сигналы бесконечны по длительности, однако информация, которую они несут, находится в ограниченном числе отсчетов. В этом смысле периодический сигнал играет связующую роль между сигналами с конечной и бесконечной длиной. Используя конечный сигнал $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, можно получить его периодическую версию следующим образом:

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.24)$$

Сигнал $\tilde{x}(n)$ из выражения (1.24) называется периодическим продолжением сигнала конечной длиной $x(n)$. Данный тип расширения сигнала естественным образом возникает в различных контекстах. Особенно важным примером подобной

периодичности является частотное представление дискретных сигналов. Нужно отметить, что энергия периодически продолженного сигнала становится бесконечной, в то время как мощность является просто энергией исходного сигнала с конечной длительностью, умноженной на $1/N$.

1.8.4 Сигналы с компактным носителем

Говорят, что дискретный сигнал $\bar{x}(n)$ с бесконечной длительностью имеет компактный носитель (*finite support*), если его значения равны нулю за пределами некоторого фиксированного интервала длины N . Другими словами, существуют такие $N, M \in \mathbb{Z}$, что

$$\bar{x}(n) = 0, \quad \text{для } n < M \text{ и } n > M + N - 1. \quad (1.25)$$

Заметим, что поскольку $\bar{x}(n)$ имеет бесконечную длительность, то для полной спецификации всего сигнала требуется знание величины M и значений N ненулевых отсчетов. Таким образом, возникает альтернативный подход к встраиванию сигнала конечной длиной $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, в сигнал бесконечной длительности:

$$\bar{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n < N, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.26)$$

В выражении (1.26) выбрано значение $M = 0$ (хотя можно использовать любое другое значение). Заметим, что в данном случае, в отличие от периодического продолжения $x(n)$, была добавлена произвольная информация в виде нулевых значений за пределами конечного интервала.

Таблица 1.1 – Основные типы дискретных сигналов

Тип сигнала	Обозначение	Энергия	Мощность
1	2	3	4
Сигнал конечной длины	$x(n),$ $n = 0, 1, \dots, N - 1$	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	Не определена
Апериодический сигнал	$x(n), \quad n \in \mathbb{Z}$	Формула (1.20)	Формула (1.21)

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4
Периодический сигнал	$\tilde{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$	∞	Формула (1.22)
Сигнал с компактным носителем	$\tilde{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{x}(n) \neq 0$ для $M \leq n \leq M + N - 1$	$\sum_{n=M}^{M+N-1} x(n) ^2$	0

В таблице 1.1 суммируются базовые понятия о типах дискретных сигналов.

1.9 Задачи к разделу 1

1 Для сигнала $x(n)$, показанного на рисунке 1.7, изобразите графики следующих сигналов:

- | | |
|-----------------|------------------|
| а) $x(-n)$; | б) $x(n + 6)$; |
| в) $x(n - 6)$; | г) $x(3 - n)$; |
| д) $x(3n)$; | е) $x(1 - 2n)$. |

2 Изобразите графики следующих дискретных сигналов:

- а) $x_1(n) = 2\delta(n + 3) + 4\delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \delta(n - 3)$;
- б) $x_2(n) = u(n - 2) - u(n - 6)$;
- в) $x_3(n) = n(u(n) - u(n - 7))$;
- г) $x_4(n) = (8 - n)(u(n - 6) - u(n - 9))$.

3 Определите, являются ли следующие сигналы периодическими. При положительном ответе определите период сигнала:

- | | |
|----------------------------------|--|
| а) $\cos(0,5\pi n + 0,2)$; | б) $\sin\left(0,5n + \frac{\pi}{3}\right)$; |
| в) $\cos(\sqrt{2}\pi n + 1,2)$; | г) $e^{j\frac{22}{7}n}$; |
| д) $e^{-(1+j\frac{\pi}{3})n}$; | е) $-6e^{j\frac{\pi}{7}n}$. |

4 Докажите следующие равенства:

- а) $\delta(n) + \delta(n - 1) = u(n) - u(n - 2)$;

$$\text{б) } 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u(n) = -0,5(2)^n \sin\left(\frac{5\pi n}{3}\right)(u(n) - \delta(n));$$

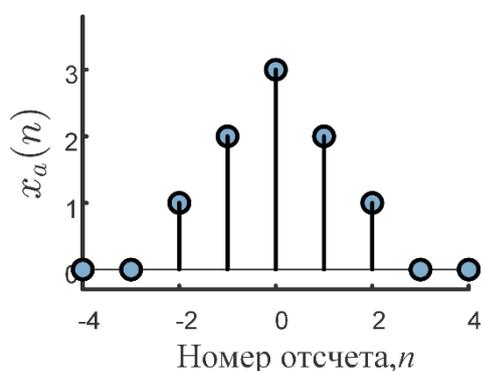
$$\text{в) } 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u(n) = -0,5(-2)^n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)u(n - 1);$$

$$\text{г) } n(n - 1)\gamma^n u(n) = n(n - 1)\gamma^n u(n - 2);$$

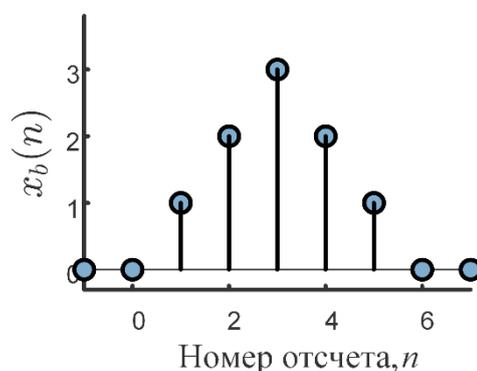
$$\text{д) } (u(n) + (-1)^n u(n)) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0;$$

$$\text{е) } (u(n) + (-1)^{n+1} u(n)) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0.$$

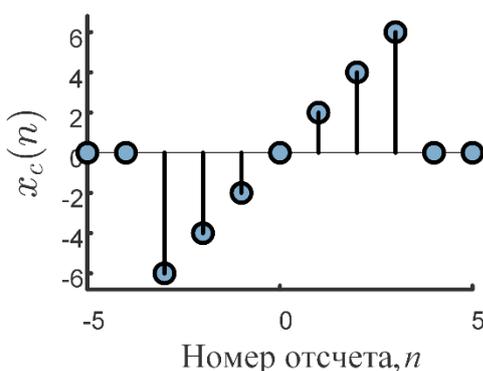
5 Для каждого из сигналов, показанных на рисунке 1.15, найдите аналитическое выражение, которое было бы верным для всех n . Используя только линейно нарастающую функцию и единичный скачок, приведите как минимум два выражения для описания каждого сигнала.



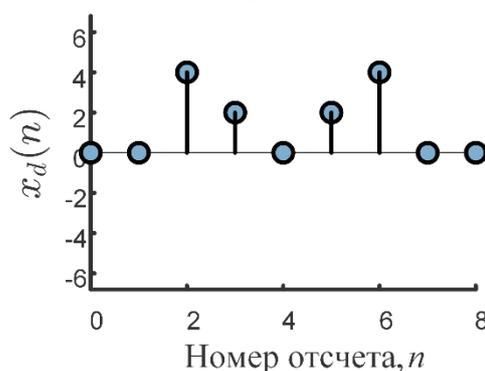
a



б



в



г

Рисунок 1.15 – Сигналы для задачи 5

6 Используя сигнал $x_c(n)$ из задачи 5, определяемый как $y(3 - n) = x_c(n)$, изобразите следующие сигналы:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| а) $y(-n)$; | б) $y(2 - n)$; |
| в) $y(n)\delta(n - 2)$; | г) $y(n + 4)\delta(n)$; |
| д) $y(n)u(n - 2)$; | е) $y(n)u(4 - n)$. |

7 Представьте следующие экспоненты в виде $e^{j(\Omega n + \theta)}$, где $-\pi \leq \Omega < \pi$:

- | | |
|---------------------------------|------------------------|
| а) $e^{j(8,2\pi n + \theta)}$; | б) $e^{j4\pi n}$; |
| в) $e^{-j1,95n}$; | г) $e^{-j10,7\pi n}$. |

Как в каждом случае изменится ответ, если на Ω накладывается ограничение $0 \leq \Omega < 2\pi$?

8 Найдите и изобразите четную и нечетную часть следующих сигналов:

- | | |
|---|---|
| а) $u(n)$; | б) $nu(n)$; |
| в) $\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$; | г) $\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$; |
| д) $\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n)$; | е) $\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n)$; |
| ж) $\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$; | з) $u(n + 5) - u(n - 5)$. |

9 Определите, являются ли следующие сигналы периодическими. При положительном ответе определите период сигнала:

- | |
|--|
| а) $\cos(0,6\pi n + 0,3) + 3 \sin(0,5\pi n + 0,4)$; |
| б) $\cos(1,5\pi n + 0,3) + 3 \sin(1,5\pi n + 0,4) + 8 \cos\left(1,5\pi n - \frac{\pi}{3}\right)$; |
| в) $\cos(0,7\pi n - 0,9) + 3 \sin(2,15\pi n + 0,4)$. |

10 Если $x_1(n)$ четный и $x_2(n)$ нечетный, то каким будет $y(n) = x_1(n)x_2(n)$? Ответ поясните.

11 Нотация $x(\langle n \rangle_N)$ используется, чтобы обозначить последовательность, которая формируется следующим образом:

$$x(\langle n \rangle_N) = x(n \bmod N),$$

где операция $(n \bmod N)$ дает положительное целое число в диапазоне $[0, N - 1]$, равное остатку от деления n на N . Например, $\langle 3 \rangle_8 = 3$, $\langle 12 \rangle_8 = 4$ и $\langle -6 \rangle_4 = 2$. Для сигнала $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u(n)$ изобразите графики следующих сигналов:

а) $x(\langle n \rangle_3)$;

б) $x(\langle n - 2 \rangle_3)$.

12 Найдите сопряженно симметрическую часть следующей последовательности:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)^n u(n).$$

13 Определите период следующих сигналов:

а) $x_1(t) = 2 \sin(2\pi f_1 t) + 3 \sin(2\pi f_2 t) + 6 \sin(2\pi f_3 t)$ при $f_1 = 2$ Гц, $f_2 = 3$ Гц, $f_3 = 8$ Гц;

б) $x_2(t) = 3 \cos(2\pi f_1 t) + 5 \sin(2\pi f_2 t) + 7 \cos(2\pi f_3 t)$ при $f_1 = 4$ Гц, $f_2 = 6$ Гц, $f_3 = 12$ Гц.

14 Разработайте *MATLAB*-функцию вычисления единичного импульса. Используя данную функцию, изобразите графики следующих сигналов:

а) $y_1(n) = \delta(n + 2) + 2\delta(n + 1) - \delta(n) + 2\delta(n - 1) + \delta(n - 2)$;

б) $y_2(n) = 2\delta(n + 3) + 3\delta(n + 2) + 2\delta(n + 1) + 3\delta(n) + \delta(n - 1) - 2\delta(n - 2) - 3\delta(n - 3)$.

15 Разработайте *MATLAB*-функцию вычисления единичного скачка. Используя данную функцию, изобразите графики следующих сигналов:

а) $y_1(n) = (n - 1)(u(n) - u(n - 3))$;

б) $y_2(n) = (3 - n)(u(n + 5) - u(n - 8))$.

16 Разработайте *MATLAB*-функцию вычисления убывающей экспоненты. Используя данную функцию, изобразите графики следующих сигналов:

а) $y_1(n) = 0,5^n u(n)$;

б) $y_2(n) = 0,8^n u(n - 3)$.

17 Разработайте *MATLAB*-функцию вычисления значений и отображения графиков следующих сигналов:

а) $y_1(n) = -0,5 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1)$ при $f_s = 1000$ Гц, $t \in [0, 0,5]$
 $f_1 = 5$ Гц, $\varphi_1 = 0$.

б) $y_2(n) = \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) + 0,35$ при $f_s = 1500$ Гц,
 $t \in [-0,25, 0,25]$, $f_2 = 34$ Гц, $\varphi_2 = 30$.

18 Вычислите энергию сигналов, показанных на рисунке 1.15.

19 Пусть $x(n) = n(u(n-1) - u(n-5))$, изобразите сигналы $x(n)$, $-x(n)$, $x(-n)$, $x(n+1)$ и $3x(n)$ и вычислите их энергию.

20 Если E_x – это энергия сигнала $x(n)$, то чему равна энергия сигналов $-x(n)$, $x(-n)$, $x(n-m)$ и $cx(n)$?

2 ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1 Общие сведения о дискретных системах

С математической точки зрения *система с дискретным временем* определяется как *преобразование*, или *оператор*, переводящий входную последовательность $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$, являющуюся откликом (или реакцией) системы, что можно обозначить как

$$y(n) = T\{x(n)\}. \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) – это правило, или формула, по которому вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x(n)$. В некоторых случаях система не имеет входного сигнала. Примером служит генератор синусоидального колебания. Тем не менее для генератора может служить входом частота, фаза, амплитуда. Такие генераторы являются базовыми элементами для транзиттеров, радаров и музыкальных синтезаторов.

Рассмотрим несколько примеров примитивных систем:

1 Система, генерирующая постоянный сигнал на выходе (игнорирование входа):

$$y(n) = C.$$

При помощи такой системы можно моделировать источник питания.

2 Система, реализующая тождество:

$$y(n) = x(n).$$

3 Усилитель:

$$y(n) = Ax(n).$$

Далее рассматриваются примеры более сложных систем.

1 *Идеальная система задержки (ИСЗ)* определяется по формуле

$$y(n) = x(n - n_d), -\infty < n < \infty,$$

где n_d – фиксированное натуральное число, называемое *задержкой* системы.

Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов.

2 Общая система скользящего среднего имеет следующий вид:

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n - k) =$$
$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times (x(n + M_1) + x(n + M_1 - 1) + \dots + x(n) + \dots + x(n - M_2)).$$

Она вычисляет n -й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое $(M_1 + M_2 + 1)$ отсчетов входной последовательности, расположенных вокруг n -го отсчета.

2.2 Свойства дискретных систем

2.2.1 Системы без памяти

Для системы без памяти характерно, что ее текущий отклик $y(n)$ зависит только от текущего входного значения $x(n)$ для любого n .

Например, система

$$y(n) = x^2(n),$$

является системой без памяти, а система

$$y(n) = x(n) + x(n - 1)$$

является системой с памятью.

Характерно, что системы без памяти при технической реализации не требуют сохранения контекста своей работы. Выходной результат в них зависит только от текущего входа.

2.2.2 Обратимость

Обратимость системы – важное свойство в таких приложениях, как частотная коррекция канала и обратная фильтрация. Говорят, что система является *обратимой*, если вход системы можно восстановить единственным образом – зная выход системы. Для того чтобы система была обратимой, она должна для различных входов производить различные выходы. Другими словами, если есть два входа $x_1(n)$ и $x_2(n)$, причем $x_1(n) \neq x_2(n)$, то должно выполняться неравенство $y_1(n) \neq y_2(n)$.

Система, определенная как

$$y(n) = x(n)g(n),$$

является обратимой только тогда, когда $g(n) \neq 0 \forall n$. В частности, зная $y(n)$ и $g(n)$, которые не равны нулю для всех n , вход $x(n)$ можно восстановить по $y(n)$ следующим образом:

$$x(n) = \frac{y(n)}{g(n)}.$$

2.2.3 Детерминированность (каузальность)

Систему называют *детерминированной*, если выходной отсчет системы с номером n_0 зависит только от входных отсчетов с номерами $n \leq n_0$.

Например, *компрессор (уплотнитель)* – это система, определяемая соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$. Компрессор отбрасывает $M - 1$ из каждых M отсчетов входной последовательности.

Компрессор не является детерминированной системой, поскольку $y(1) = x(M)$, т. е. выход в момент времени $n = 1$ зависит от входного отсчета в момент времени $n = M$.

2.2.4 Аддитивность

Под аддитивностью понимается суперпозиция причин и результатов. Так, если причина « x_1 » вызывает результат « y_1 » и если причина « x_2 » вызывает результат « y_2 », то суперпозиция причин и результатов означает, что причина « $x_1 + x_2$ » вызовет результат « $y_1 + y_2$ ».

Выражаясь математически, система называется *аддитивной*, если

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

для любых сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

2.2.5 Однородность (гомогенность)

Под однородностью понимается наличие пропорциональности между входным и выходным сигналами. Дадим этому понятию более точное определение.

Система называется *однородной*, если

$$T\{cx(n)\} = cT\{x(n)\}, c \in \mathbb{C}$$

для входной последовательности $x(n)$. То есть для любого комплексного числа c реакция системы на входной сигнал $cx(n)$ в c раз больше реакции системы на входной сигнал $x(n)$.

Например, система, описываемая выражением

$$y(n) = \frac{x^2(n)}{x(n-1)},$$

не аддитивна, поскольку

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = \frac{(x_1(n) + x_2(n))^2}{x_1(n-1) + x_2(n-1)},$$

что не то же самое, что

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}.$$

Данная система является однородной, поскольку

$$T\{cx(n)\} = \frac{(cx(n))^2}{cx(n-1)} = c \frac{x^2(n)}{x(n-1)} = cT\{x(n)\}.$$

Рассмотрим дополнительный пример.

Пример 2.1. Является ли система, описываемая выражением

$$y(n) = x(n) + x^*(n-1),$$

аддитивной и/или однородной?

Решение:

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1),$$

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1).$$

Аддитивность подтверждается.

$$T\{cx(n)\} = cx(n) + (cx(n-1))^* = cx(n) + c^*x^*(n-1).$$

Очевидно, что это не равно

$$cT\{x(n)\} = cx(n) + cx^*(n-1).$$

Однородность не подтверждается.

2.2.6 Линейные системы

Класс линейных систем определяется по принципу суперпозиции, т. е. обладает одновременно свойством *аддитивности* и *однородности*:

$$T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\}. \quad (2.2)$$

Свойство линейности существенно упрощает вычисление отклика системы на заданный вход:

$$y(n) = T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\},$$

поскольку коэффициенты $x(k)$ – константы, то мы можем использовать свойство однородности:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T\{\delta(n-k)\}. \quad (2.3)$$

Если обозначить через $h_k(n)$ отклик системы на единичный импульс в момент время $n = k$:

$$h_k(n) = T\{\delta(n-k)\},$$

то (2.3) преобразуется:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n). \quad (2.4)$$

2.2.7 Стационарные системы

К *стационарным* относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входной последовательности приводит к появлению такого же сдвига выходной последовательности.

Более формально, если $y(n) = T\{x(n)\}$, то для стационарной системы справедливо тождество

$$T\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0). \quad (2.5)$$

Стационарные системы еще называют *инвариантными относительно сдвига*. Большинство рассмотренных ранее систем стационарны.

Пример 2.2. Определить, является ли компрессор стационарной системой.

Решение. Компрессор описывается соотношением

$$y(n) = x(Mn), \quad -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$. Показать, что компрессор не является стационарным, можно следующим образом. Рассмотрим реакцию $y_1[n]$ системы на входной сигнал $x_1(n) = x(n-n_0)$. Если бы система была стационарна, то выполнялось бы равенство $y_1(n) = y(n-n_0)$. Однако

$$y_1(n) = x_1(Mn) = x(Mn-n_0) \neq y(n-n_0) = x(M(n-n_0)),$$

т. е. соотношение (2.5) не выполняется и, следовательно, компрессор не является стационарной системой.

2.2.8 Линейные стационарные системы

Линейные стационарные системы (ЛС-системы) представляют собой особо распространенный класс систем. Наличие этих свойств позволяет описывать системы в удобном виде. Они также играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов.

Если $h(n)$ – реакция системы на единичный импульс $\delta(n)$, то ее отклик на $\delta(n - k)$ будет $h(n - k)$. Поэтому, возвращаясь к формуле (2.4), мы получим

$$h_k(n) = T\{\delta(n - k)\} = h(n - k),$$

следовательно,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k). \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) называется *сверткой* и обозначается как

$$y(n) = x(n) * h(n), \quad (2.7)$$

где символ «*» обозначает операцию свертки.

Последовательность $h(n)$ называется импульсной характеристикой системы. Таким образом, ЛС-система полностью определяется своей импульсной характеристикой $h(n)$, в том смысле, что, опираясь на (2.6), можно вычислить отклик $y(n)$ на *любой* поданный сигнал $x(n)$.

Пример 2.3. Первый ненулевой элемент последовательности $x(n)$ появляется на индексе $n = -6$ и имеет значение $x(-6) = 3$, последний ненулевой элемент имеет индекс $n = 24$ и значение $x(24) = -4$. Пусть

$$y(n) = x(n) * x(n).$$

Какой индекс будет у первого ненулевого элемента последовательности $y(n)$ и какое он будет иметь значение? Какой индекс будет у последнего ненулевого элемента $y(n)$ и какое он будет иметь значение?

Решение. Поскольку сворачиваются две последовательности конечной длины, то индекс первого ненулевого значения будет равен сумме индексов первых ненулевых элементов двух сворачиваемых последовательностей. В нашем случае это индекс $n = -12$, а значение

$$y(-12) = x^2(-6) = 9.$$

Аналогичным образом индекс последнего ненулевого элемента равен $n = 48$, и значение

$$y(48) = x^2(24) = 16.$$

2.2.9 Устойчивость

Говорят, что система устойчива, если и только если ее реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена. Последовательность $x(n)$ называется *ограниченной*, если найдется такое конечное положительное число B_x , что

$$\forall n \quad |x(n)| \leq B_x < \infty.$$

Таким образом, в устойчивой системе для *каждой* ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа B_y , что

$$\forall n \quad |y(n)| \leq B_y < \infty.$$

Важно понять, что устойчивость – свойство именно системы, а не входных последовательностей. Можно и для неустойчивой системы найти входную последовательность, для которой выход будет ограниченным. Для устойчивости важно, что выход ограничен для *любой* ограниченной входной последовательности.

Почти все рассмотренные прежде системы – устойчивы. Вот пример неустойчивой системы: $y(n) = \lg(x(n)) = -\infty$ для любого $x(n) = 0$.

Для линейной стационарной системы устойчивость гарантируется, если ее импульсная характеристика представляет собой абсолютно сходящуюся последовательность:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Пример 2.4. Является ли устойчивой ЛС-система с импульсной характеристикой: а) $h_1(n) = u(n)\alpha^n$ при $|\alpha| < 1$; б) $h_2(n) = u(n)n$?

Решение:

а) является устойчивой, поскольку импульсная характеристика $h_1(n)$ представляет собой сходящуюся последовательность:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n = \frac{1}{1 - |\alpha|} \quad |\alpha| < 1;$$

б) не является устойчивой, поскольку импульсная характеристика возрастает неограниченно.

2.3 Умножение полиномов при помощи свертки

Операция свертки тесно связана с умножением полиномов. Одним из важных применений свертки является умножение полиномов с постоянными коэффициентами. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – полиномы K -й и L -й степени, определяемые как

$$A(x) = a_0x^K + a_1x^{K-1} + \dots + a_{K-1}x + a_K,$$

$$B(x) = b_0x^L + b_1x^{L-1} + \dots + b_{L-1}x + b_L.$$

Коэффициенты произведения $A(x)B(x)$ получаются путем свертки соответствующих коэффициентов:

$$[a_0, a_1, \dots, a_{K-1}, a_K] * [b_0, b_1, \dots, b_{L-1}, b_L].$$

Пример 2.5. Вычислить $(x^2 + 2x + 1)(3x + 4)$, используя обычное правило умножения полиномов и свертку.

Решение:

$$(x^2 + 2x + 1)(3x + 4) = 3x^3 + 10x^2 + 11x + 4.$$

Используем *MATLAB* для вычисления свертки:

```
conv([1 2 1], [3 4])
ans = 3 10 11 4
```

Таким образом, при помощи операции свертки находятся коэффициенты полинома-произведения.

2.4 Свойства ЛС-систем

Свойства ЛС-систем определяются свойствами операции свертки, поскольку ЛС-система полностью описывается сверткой. Таким образом, импульсная характеристика конкретной системы содержит всю информации о ней.

2.4.1 Коммутативность

Свертка коммутативна (подчинена переместительному закону):

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n).$$

Коммутативность можно доказать, осуществив замену параметра суммирования в (2.6): $m = n - k$, тогда

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n), \quad (2.8)$$

т. е. роли последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ поменялись.

Данное свойство также можно доказать, используя полиномы. Если $A(x)$ и $B(x)$ – полиномы, то коэффициенты полинома $C(x) = A(x)B(x)$ будут являться сверткой коэффициентов полиномов $A(x)$ и $B(x)$. Отсюда понятно, что свертка подчинена переместительному закону.

2.4.2 Дистрибутивность

Свертка удовлетворяет распределительному закону относительно сложения:

$$x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n).$$

Это свойство является прямым следствием линейности и коммутативности свертки.

2.4.3 Каскадное соединение ЛС-систем

Две ЛС-системы, включенные последовательно, образуют одну ЛС-систему, чья импульсная характеристика совпадает со сверткой импульсных характеристик обеих систем (рисунок 2.1).

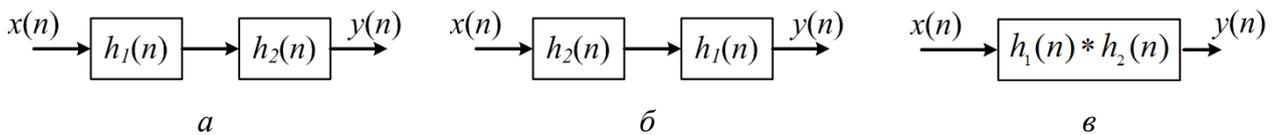


Рисунок 2.1 – Три линейные стационарные системы с одной и той же импульсной характеристикой

Реакция первой системы (см. рисунок 2.1, *a*) на вход $x(n) = \delta(n)$ равна $h_1(n)$. Поэтому последовательность из второй системы (см. рисунок 2.1, *б*) должна быть равна

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n).$$

Как следствие коммутативности свертки – порядок следования ЛС-систем в каскадном соединении не играет роли. По этой же причине импульсная характеристика каскада ЛС-систем не зависит от порядка, в котором они соединены. Этот факт отражен на рисунке 2.1, где три системы имеют одну и ту же импульсную характеристику.

2.4.4 Параллельное соединение ЛС-систем

При параллельном соединении системы имеют общий вход, а их выходы складываются и формируют реакцию всего соединения. Исходя из того, что свертка, описывающая работы ЛС-системы, подчинена дистрибутивному закону, параллельное соединение двух ЛС-систем можно заменить одной линейной стационарной системой, чья импульсная характеристика равна сумме характеристик компонент соединения (рисунок 2.2), т. е.

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n).$$



Рисунок 2.2 – Параллельное соединение линейных стационарных систем (а); система, эквивалентная системе а (б)

2.4.5 Устойчивость и детерминированность ЛС-систем

Устойчивость и детерминированность представляют собой вспомогательные свойства, и часто необходимо знать, является ли конкретная система устойчивой и детерминированной. ЛС-система является *устойчивой* тогда, когда ее импульсная характеристика – абсолютно суммируемая последовательность, т. е. если

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty.$$

Для *детерминированной* ЛС-системы должно выполняться условие

$$h(n) = 0, \quad n < 0,$$

которое проистекает из выражения для свертки.

2.4.6 КИХ- и БИХ-системы

Система, чья импульсная характеристика имеет конечное число ненулевых отсчетов, называется *системой с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-системой). КИХ-системой, например, является система скользящего среднего.

Система, чья импульсная характеристика не ограничена по длительности, называется *системой с бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-системой). Примером БИХ-системы является «сумматор» из примера 2.6.

Пример 2.6. Система «сумматор» описывается выражением $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$. Чему равна ее импульсная характеристика?

Решение. Для получения импульсной характеристики необходимо на вход системы подать единичный импульс $x(n) = \delta(n)$. В результате получаем

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u(n).$$

2.5 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Свертка описывает выход ЛС-системы как линейную комбинацию входных значений $x(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Пусть $h(n) = u(n)a^n$, тогда

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)a^k u(k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)a^{n-k}. \quad (2.9)$$

Если предположить, что система детерминирована, то получим

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)a^{n-k}. \quad (2.10)$$

С вычислительной точки зрения уравнение (2.9) неэффективно. Поэтому иногда лучше выражать выход в терминах предыдущих отсчетов:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n). \quad (2.11)$$

Распишем несколько итераций для уравнения (2.11):

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0), \\ y(1) &= ay(0) + x(1) = ax(0) + x(1), \\ y(2) &= ay(1) + x(2) = a^2x(0) + ax(1) + x(2), \\ y(3) &= ay(2) + x(3) = a^3x(0) + a^2x(1) + ax(2) + x(3), \end{aligned}$$

...

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)a^{n-k}.$$

Уравнение (2.11) – частный случай разностного уравнения с постоянными коэффициентами. В общем виде разностное уравнение N -го порядка имеет вид

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad (2.12)$$

где a_k и b_k – константы, которые определяют систему.

Чаще всего $a_0 = 1$ и тогда (2.12) принимает вид

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k). \quad (2.13)$$

Если a_k ненулевые, то система называется рекурсивной (БИХ-система). Если ненулевыми являются только b_k , то система нерекурсивная (КИХ-система).

Начальными условиями для разностных уравнений являются значения $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$. Если они нулевые, то система находится в состоянии покоя.

Импульсная характеристика системы может быть найдена, если подать на вход системы дельта-импульс $\delta(n)$.

Пример 2.7. Найти разностное уравнение для сумматора

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x[k]. \quad (2.14)$$

Решение. Чтобы найти разностное уравнение для сумматора, перепишем (2.14) в следующем виде:

$$y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k].$$

Выделяя $x(n)$ из суммы в выражении (2.14), получаем

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x(n) + y(n-1).$$

Таким образом, мы показали, как сумматор может быть описан *линейным разностным уравнением*:

$$y(n) = x(n) + y(n-1). \quad (2.15)$$

Разностное уравнение сумматора дает лучшее понимание возможного способа его реализации. Согласно этому уравнению при каждом значении n мы складываем отсчет выходной последовательности $x(n)$ с предыдущим отсчетом выхода сумматора $y(n - 1)$. Данный процесс иллюстрируется блок-схемой на рисунке 2.3.

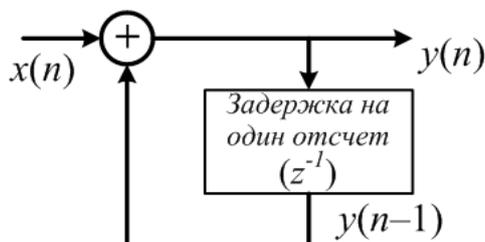


Рисунок 2.3 – Блок-схема рекуррентного разностного уравнения, представляющего сумматор

Уравнение (2.15) и блок-схему на рисунке 2.3 называют *рекуррентным представлением системы*, поскольку каждый отсчет реакции системы вычисляется с использованием найденных ранее отсчетов.

Рассмотрим систему скользящего среднего, при которой система становится детерминированной (т. е. $M_1 = 0$):

$$h(n) = \frac{1}{M_2 + 1} (u(n) - u(n - M_2 - 1)),$$

откуда

$$y(n) = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n - k].$$

Импульсную характеристику можно переписать в виде

$$h(n) = \frac{1}{M_2 + 1} (\delta(n) - \delta(n - M_2 - 1)) * u(n),$$

что говорит о возможности представления детерминированной системы скользящего среднего в виде каскада систем.

Чтобы получить разностное уравнение для этой блок-схемы, заметим сначала, что

$$x_1(n) = \frac{1}{M_2 + 1} (x(n) - x(n - M_2 - 1)).$$

С другой стороны, выход сумматора удовлетворяет уравнению

$$y(n) = x_1(n) + y(n - 1),$$

следовательно,

$$y(n) = \frac{1}{M_2 - 1} (x(n) - x(n - M_2 - 1)) + y(n - 1).$$

Блок-схема данной системы скользящего среднего представлена на рисунке 2.4.

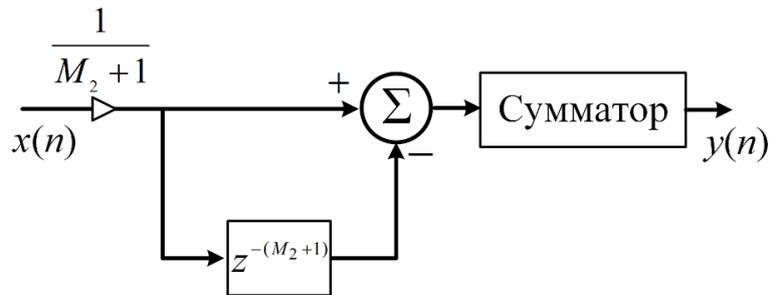


Рисунок 2.4 – Блок-схема системы скользящего среднего

2.6 Частотная характеристика дискретной системы

2.6.1 Понятие собственной функции

Синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что *комплексные экспоненты являются собственными функциями ЛС-систем*. Это означает, что реакция таких систем на синусоидальную последовательность остается синусоидальной последовательностью с той же частотой, фаза и амплитуда которой определяется системой.

2.6.2 Эхо-система (пример)

Прежде чем дать определение частотной характеристики ЛС-системы, рассмотрим следующий пример. Представьте, что вы находитесь в большой пустой комнате (или пещере), в которой есть эхо. Если вы начнете петь или свистеть, то

звук вернется к вам с некоторой задержкой τ . Вы заметите, что какие-то тоны резонируют, а какие-то поглощаются или ослабляются. Происходящий процесс можно описать следующим уравнением:

$$y(t) = x(t) + x(t - \tau). \quad (2.16)$$

Следует заметить, что эхо-система (2.16) не пропускает все частоты (тоны) одинаково. Выход будет зависеть от частоты входного сигнала и временной задержки τ , которая соответствует различному сдвигу фазы для различных частот. Когда входной сигнал имеет частоту ω , такую, что τ в точности соответствует одному периоду (т. е. $\omega\tau = 2\pi$), то общий эффект работы системы состоит в удвоении амплитуды входного сигнала. Если входной сигнал имеет такую частоту, что τ соответствует половине периода ($\omega\tau = \pi$), то выход системы будет нулевым. Это и есть причина того, что некоторые частоты «резонируют», а некоторые поглощаются.

В общем случае мы можем найти частотную характеристику эхо-системы. Для этого предположим, что на вход подается синусоида $\sin \omega t$:

$$\sin \omega t + \sin(\omega(t - \tau)) = 2 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \sin\left(\omega\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) = H(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)),$$

где $H(\omega) = 2 \cos(\omega\tau/2)$ определяет амплитуду, а $\varphi(\omega) = -\omega\tau/2$ – начальную фазу выходного сигнала. Графики $H(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, иллюстрирующие работу эхо-системы, приведены рисунке 2.5 (на графиках вместо круговой частоты ω отображена линейная частота f).

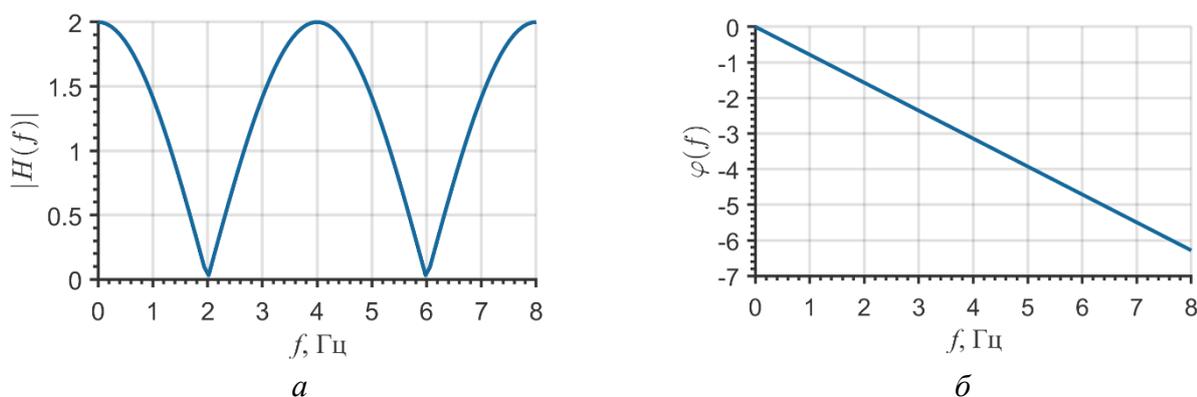


Рисунок 2.5 – Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) выходного сигнала эхо-системы ($\tau = 0,25$ с) от частоты входного синусоидального сигнала $\sin 2\pi ft$

Таким образом, можно сделать вывод, что в ответ на каждый синусоидальный сигнал с частотой ω будет получаться синусоидальный выход той же частоты, но с линейным фазовым сдвигом $\varphi(\omega)$ и измененной амплитудой $H(\omega)$. Амплитуда будет максимальной для всех $\omega T = 2k\pi$ и будет равна нулю для $\omega T = \pi(2k + 1)$. Частоты, которые подавляются системой, называются *нулями* системы.

2.6.3 Комплексная частотная характеристика линейной системы

Для описания линейных систем в частотной области используется специальный входной сигнал:

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty. \quad (2.17)$$

Если такая последовательность поступает на вход линейной системы с *импульсной характеристикой* $h(n)$, то на выходе появляется последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{-j\omega m} = x(n)H(e^{j\omega}),$$

т. е.

$$y(n) = x(n)H(e^{j\omega}). \quad (2.18)$$

Таким образом, при подаче на вход сигналов вида (2.17) выходной сигнал совпадает со входным с точностью до множителя $H(e^{j\omega})$, который называется *комплексной частотной характеристикой* (КЧХ) системы или просто *частотной характеристикой* и выражается через ее импульсную характеристику следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{-j\omega m}. \quad (2.19)$$

Частотная характеристика является периодической функцией ω , причем ее период равен 2π . Эта периодичность связана со спецификой дискретного колебания: входная последовательность с частотой $\omega + 2m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) не отличается от входной последовательности с частотой ω , т. е.

$$\tilde{x}(n) = e^{j(\omega+2m\pi)n} = e^{j\omega n} = x(n).$$

Поскольку $H(e^{j\omega})$ – периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной 2π . Обычно для этой цели используют интервал $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

В общем случае $H(e^{j\omega})$ имеет комплексные значения, ее можно представить в алгебраической форме, но чаще всего используется показательный вид (или полярная система координат) в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg H(e^{j\omega})}.$$

Пример 2.8. Найти КЧХ идеальной системы задержки, определенной формулой

$$y(n) = x(n - n_d),$$

где n_d – фиксированное целое число.

Решение. Если $x(n) = e^{j\omega n}$ – сигнал, поданный на вход системы, то по формуле из условия получаем

$$y(n) = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}.$$

Таким образом, видно, что при любом значении ω выходной сигнал пропорционален входному. Причем комплексный коэффициент пропорциональности зависит от частоты ω и величины задержки n_d . Следовательно, КЧХ ИСЭ равна

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}.$$

Можно и по-другому определить КЧХ системы, для чего напомним, что $h(n) = \delta(n - n_d)$ – импульсная характеристика ИСЭ. Учитывая (2.19), имеем

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_d) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Вещественная и мнимая части КЧХ определяются по формулам Эйлера:

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d),$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d).$$

Ее модуль и фаза равны: $|H(e^{j\omega})| = 1$, $\arg H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$.

2.6.4 Синусоидальное представление ЛС-систем

Поскольку синусоидальную последовательность легко записать как линейную комбинацию показательных, рассмотрим синусоидальный вход:

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}.$$

Согласно (2.18) реакцией системы на сигнал $x_1(n) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$ служит

$$y_1(n) = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n},$$

а на сигнал $x_2(n) = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$ –

$$y_2(n) = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}.$$

Следовательно, выходная последовательность имеет вид

$$y(n) = \frac{A}{2} (H(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}).$$

Если отчеты последовательности $h(n)$ вещественны, то $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$. Следовательно,

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta),$$

где $\theta = \arg H(e^{j\omega_0})$ – фаза КЧХ системы при частоте ω_0 , или значение фазо-частотной характеристики (ФЧХ) при $\omega = \omega_0$.

В случае идеальной задержки имеем $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ и $\theta = -\omega_0 n_d$, (см. пример 2.9). Следовательно,

$$y(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi - \omega_0 n_d) = A \cos(\omega_0 (n - n_d) + \varphi),$$

что согласуется с результатом, непосредственно полученным из определения ИСЗ.

Так как функция $H(e^{j\omega})$ 2π -периодична, а частоты ω и $\omega + 2\pi$ неотличимы друг от друга, то достаточно определить значения $H(e^{j\omega})$ на полуинтервале длиной 2π , например $0 \leq \omega < 2\pi$ или $-\pi \leq \omega \leq \pi$, и по периодичности определить КЧХ всюду вне указанного полуинтервала. Для простоты и согласованности с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на полуинтервале $-\pi \leq \omega \leq \pi$. При таком выборе периода нижними частотами называются частоты, близкие к нулю, а верхними – частоты, лежащие около $\pm\pi$. Учитывая, что частоты, отличающиеся на величины, кратные 2π , неотличимы друг от друга, предыдущее утверждение можно сформулировать следующим образом: нижние частоты близки к четным кратным π , в то время как верхние – к нечетным кратным π .

2.7 Задачи к разделу 2

1 Детерминирована ли система идеальной задержки из подраздела 2.1?

2 Детерминирована ли система скользящего среднего из подраздела 2.1?

3 Вычислите свертку для ЛС-системы с импульсной характеристикой $h(n) = 0,25\delta(n) + 0,75\delta(n - 1) - 0,75\delta(n - 2) - 0,25\delta(n - 3)$ и входного сигнала $x(n) = u(n - 1) - u(n - 7)$.

4 Определите свойства следующих систем (запоминание, устойчивость, детерминированность, аддитивность, однородность, линейность, стационарность):

а) $y(n) = \lg x(n)$;

б) $y(n) = \text{median}\{x(n - 1), x(n), x(n + 1)\}$;

в) $y(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$, $n_0 > 0$.

5 Определите, какие из систем являются линейными. Ответ поясните. Вход системы обозначен как $x(n)$, а выход как $y(n)$.

а) $y(n) + 2y(n - 1) = x^2(n)$; б) $y(n) + 3ny(n - 1) = n^2x(n)$;

в) $y^2(n) + 2y(n - 1) = x(n)$; г) $y(n) = y(n - 1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}$;

д) $3y(n) + 2 = x(n)$; е) $y(n) + 2y(n - 1) = x(n)x(n - 1)$;

$$\text{ж) } y(n) = x(2 - n); \quad \text{з) } y(n) = \sum_{n=-\infty}^n x(n).$$

6 Определите импульсную характеристику следующих систем:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y(n) = x(n - 1); & \text{б) } y(n) = x(n + 1); \\ \text{в) } y(n) = n^2 x(n - 1); & \text{г) } y(n) = x(-n); \\ \text{д) } y(n) = x(n/L), \text{ где } L \in \mathbb{Z}; & \text{е) } y(n) = x(Mn), \text{ где } M \in \mathbb{Z}; \\ \text{ж) } y(n) = \sum_{k=-5}^5 x(n - k); & \text{з) } y(n) = x(n)x(n - 1). \end{array}$$

7 Определите, какие из перечисленных ниже систем являются стационарными/нестационарными, линейными/нелинейными, детерминированными/недетерминированными, устойчивыми/неустойчивыми, статическими/динамическими, обратимыми/необратимыми:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y(n) = x(n - 1); & \text{б) } y(n) = x(n + 1); \\ \text{в) } y(n) = n^2 x(n - 1); & \text{г) } y(n) = nx(n - 1); \\ \text{д) } y(n) = nx^2(n); & \text{е) } y(n) = x^2(n); \\ \text{ж) } y(n) = x(2 - n); & \text{з) } y(n) = x(n/L), \text{ где } L \in \mathbb{Z}; \\ \text{и) } y(n) = x(Mn), \text{ где } M \in \mathbb{Z}; & \text{к) } y(n) = \sum_{k=-5}^5 x(n - k); \\ \text{л) } y(n) = x(n)x(n - 1). & \end{array}$$

8 Определите, являются ли данные системы линейными либо нелинейными, инвариантными во времени или неинвариантными, детерминированными или недетерминированными:

$$\text{а) } y(n) = x(n) - x(n - 1); \quad \text{б) } y(n) = x(n + 1) - x(n).$$

9 Вычислите произведения полиномов двумя способами: 1) используя обычное правило умножения полиномов; 2) используя операцию свертки в *MATLAB*:

$$\begin{array}{l} \text{а) } y_1(x) = (2x^3 - 4x^2 + x)(5x^2 - 8); \\ \text{б) } y_2(x) = (-5x^4 - 3x^3)(2x^3 + 6x^2); \\ \text{в) } y_3(x) = (3x^4 + 2x^2)(-2x^4 - x); \\ \text{г) } y_3(x) = (7x^2 + 6x + 2)(-5x^3 + 3x^2 + 1). \end{array}$$

3 Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

3.1 Общие сведения о z-преобразовании

Z-преобразование является мощным инструментом, позволяющим описывать и исследовать дискретные сигналы и системы. Вообще z-преобразование дискретных сигналов аналогично преобразованию Лапласа для непрерывных сигналов. Понимание z-преобразования необходимо на всех этапах разработки КИХ- и БИХ-фильтров, начиная от расчета импульсной характеристики и оканчивая выбором структуры фильтра и анализом эффектов квантования в структурах цифровых фильтров.

3.2 Определение z-преобразования

Так же как и в случае преобразования Лапласа, имеются две разновидности z-преобразования: двустороннее и одностороннее. Вначале рассмотрим случай двустороннего z-преобразования, которое определяется равенством

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (3.1)$$

где z – комплексная переменная.

В математике выражение (3.1) называют *преобразованием Лорана*. Часто полезно рассматривать (3.1) как оператор, обозначая его $z\{\cdot\}$. Такой оператор переводит дискретную последовательность в функцию комплексной переменной:

$$z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z).$$

Символически соответствие между последовательностью и ее z-преобразованием записывают в виде

$$x(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z). \quad (3.2)$$

3.3 Сходимость z-преобразования

Поскольку z-преобразование (3.1) является степенным рядом переменной z^{-1} , то обычно возникает вопрос сходимости такого ряда. Вообще говорят, что бесконечный ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ *сходится*, если существует такое $d \in \mathbb{C}$, что

$$\log_{N \rightarrow \infty} \left| d - \sum_{n=-N}^N c_n \right| = 0. \quad (3.3)$$

Например, ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

сходится к конечному значению, поскольку

$$\left| 2 - \sum_{n=0}^N (1/2)^n \right| = \left| 2 - \frac{1 - (1/2)^{N+1}}{1 - 1/2} \right| = (1/2)^N,$$

причем $\log_{N \rightarrow \infty} (1/2)^N = 0$, и, следовательно, (3.3) выполняется.

Z-преобразование сигнала является бесконечным рядом для каждого возможного значения z на комплексной плоскости. Обычно ряд (3.1) сходится только для некоторого подмножества всех возможных значений z . Подробно с вопросом о сходимости рядов вида (3.1) можно ознакомиться в специальной литературе.

В данном случае полезно будет запомнить основной результат. Ряд (3.1) сходится для $|z| > R$ и расходится для $|z| < R$, где R есть верхний предел последовательности $|x(n)|^{1/n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, что можно записать как

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{1/n}.$$

Например, при $x(n) = \alpha^n$, ряд (3.1) сходится вне окружности радиусом α .

Множество тех значений z , при которых степенной ряд (3.1) сходится, называется *областью сходимости (ОС)* и в этой области значения $X(z)$ конечны. Сходимость (3.1) зависит от величины $|z|$, поскольку $|X(z)| < \infty$ когда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \cdot |z|^{-n} < \infty, \quad (3.4)$$

т. е. ОС $X(z)$ состоит из точек z , для которых выполняется неравенство (3.4), поэтому ОС – это всегда кольцо с центром внутри.

Пример 3.1. Найти z -преобразование и ОС для $x(n) = \delta(n)$.

Решение. $X(z) = Z\{x(n)\} = Z\{\delta(n)\} = 1$, следовательно, ОС = \mathbb{C} (вся z -плоскость).

Рассмотрим еще один пример.

Пример 3.2. Найти z -преобразование и ОС для $x(n) = \delta(n - k)$.

Решение. $X(z) = Z\{x(n)\} = Z\{\delta(n - k)\} = z^{-k}$. Область сходимости состоит из тех точек плоскости z , для которых $|z^{-k}| < \infty$. В зависимости от значения k получаются следующие области сходимости:

$$\text{ОС} = \begin{cases} \mathbb{C}, & k = 0, \\ \mathbb{C} \setminus \{0\}, & k > 0, \\ \mathbb{C} \setminus \{\infty\}, & k < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим также пример z -преобразования от взвешенной последовательности дельта-импульсов.

Пример 3.3. Найти z -преобразование и ОС для $x(n) = 4\delta(n + 1) + 3\delta(n) + 2\delta(n - 2)$.

Решение. Вначале найдем z -преобразование последовательности $x(n)$:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = 4z + 3 + 2z^{-2}.$$

В предыдущем примере мы видели, что для любого $k > 0$ z^k бесконечно для $z = \infty$, также и z^{-k} бесконечно при $z = 0$. Для любых других значений полиномы от z и z^{-1} конечны. Следовательно, ОС = $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$.

Рассмотрев данные примеры, можно прийти к следующему важному заключению. Для сигналов с конечной длительностью областью сходимости z -преобразования является вся z -плоскость за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Значения z , для которых $X(z) = \infty$, называются *полюсами* функции $X(z)$. Значения z , для которых $X(z) = 0$, называются *нулями* функции $X(z)$.

3.4 Анализ разностных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи z-преобразования

Как известно, линейная стационарная система (ЛС-система) описывается при помощи разностного уравнения

$$a_0 y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k), \quad (3.5)$$

где a_k – фиксированные коэффициенты обратной связи; b_k – фиксированные коэффициенты прямой связи.

На рисунке 3.1 показана блок-схема, реализующая разностное уравнение (3.5).

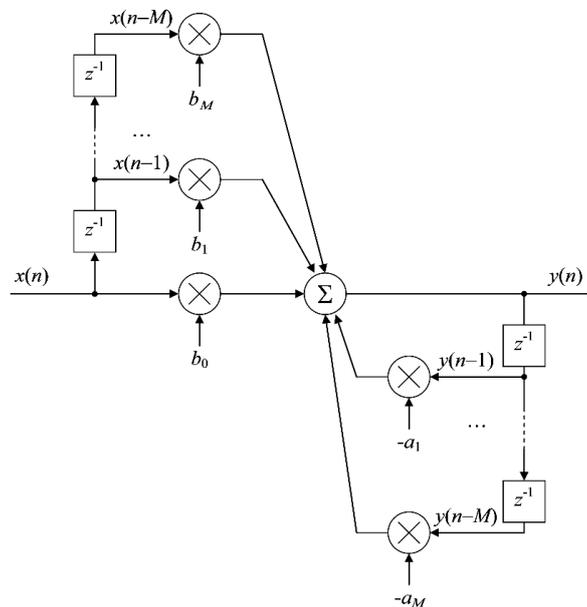


Рисунок 3.1 – Схема реализации разностного уравнения

Через z^{-1} изображаются блоки задержки сигнала на один отсчет. При аппаратной реализации задержка реализуется в виде регистра, который хранит предыдущее значение входного или выходного отсчета.

В зависимости от конкретных значений коэффициентов $\{b_k\}$ и $\{a_k\}$ выражение (3.5) может описывать работу различных устройств (например, интегратора, дифференциатора, полосового фильтра, фильтра нижних частот и т. д.). В *MATLAB*

разностные уравнения задаются двумя векторами коэффициентов: $\{b_k\}$ и $\{a_k\}$. Для реализации ЛС-системы (3.5) в *MATLAB* используется функция

$$y = \text{filter}(b, a, x)$$

Здесь b – вектор коэффициентов прямой связи; a – вектор коэффициентов обратной связи; x – входной сигнал.

Одной из важных областей применения z -преобразования является анализ разностных уравнений вида (3.5).

Заметим, что чаще всего коэффициент a_0 имеет единичное значение и поэтому не показан на схеме. Через z^{-1} на рисунке 3.1 обозначен блок задержки (регистр), который хранит соответствующий задержанный отсчет.

Перед тем как приступить к анализу разностного уравнения (3.5) с использованием z -преобразования, рассмотрим одно его важное свойство – *задержку*. Если z -образ последовательности $x(n)$ равен $X(z)$, то z -образ задержанной последовательности $x(n - m)$ равен $z^{-m}X(z)$:

$$\begin{aligned} x(n) &\stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z), \\ x(n - m) &\stackrel{z}{\leftrightarrow} z^{-m}X(z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Доказательство (3.6) вытекает из определения z -преобразования.

Применяя свойство задержки z -преобразования к отдельным элементам разностного уравнения (3.5), можно записать

$$\begin{aligned} a_k x(n - k) &\rightarrow a_k z^{-k} X(z), \\ b_k y(n - k) &\rightarrow b_k z^{-k} Y(z). \end{aligned}$$

В итоге для всего разностного уравнения получим

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z). \quad (3.7)$$

Преобразуем выражение к виду

$$Y(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}, \quad (3.8)$$

из которого легко получить *передаточную функцию* ЛС-системы:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k})}. \quad (3.9)$$

Передаточная функция $H(z)$ полностью определяет ЛС-систему. Зная коэффициенты числителя $\{b_k\}$ и знаменателя $\{a_k\}$ выражения (3.9), можно записать разностное уравнения (3.5), которое описывает работу ЛС-системы.

Рассмотрим передаточную функцию в общем виде

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (3.10)$$

где $N(z)$ – полином от z^{-1} степени M ; $D(z)$ – полином от z^{-1} степени N .

Поскольку число комплексных корней полинома равно его степени, функцию $H(z)$ можно разложить на множители и представить в следующем виде:

$$H(z) = \frac{K(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}, \quad (3.11)$$

где z_i – i -й нуль; p_i – i -й полюс; K – коэффициент усиления.

Информацию, содержащуюся в выражении (3.11), удобно изображать в виде диаграммы нулей и полюсов в z -плоскости. На диаграмме крестиком обозначается положение полюсов, а кружком – положение нулей. Важной особенностью диаграммы нулей и полюсов является *единичная окружность*, которая задается уравнением $|z| = 1$. Для определения стабильности ЛС-системы существует правило: *у устойчивой (стабильной) системы все полюсы должны лежать внутри единичной окружности в z -плоскости.*

Пример 3.4. Определить стабильность системы с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ и $a_1 = -0,5$ и изобразить схему, реализующую систему.

Решение. Вначале построим передаточную функцию согласно формуле (3.9):

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}.$$

Преобразуем это выражение к виду (3.11):

$$H(z) = \frac{z + 1}{z - 0,5}.$$

Получающаяся диаграмма нулей и полюсов показана на рисунке 3.2, из которой видно, что единственный полюс системы $p_1 = 0,5$ лежит внутри единичной окружности и, следовательно, ЛС-система *стабильна*.

Чтобы изобразить схему, реализующую ЛС-систему, преобразуем передаточную функцию к разностному уравнению:

$$y(n) = x(n) + x(n - 1) + 0,5y(n - 1).$$

На рисунке 3.3 приведена схема, реализующая данное разностное уравнение. Представление передаточной функции в виде диаграммы нулей и полюсов схематично. Вообще же модуль передаточной функции $|H(z)|$ представляет собой поверхность в z -плоскости. Для рассматриваемого примера эта поверхность показана на рисунке 3.4. Поверхность имеет впадину в области нуля передаточной функции и, наоборот, возрастает в области полюса.

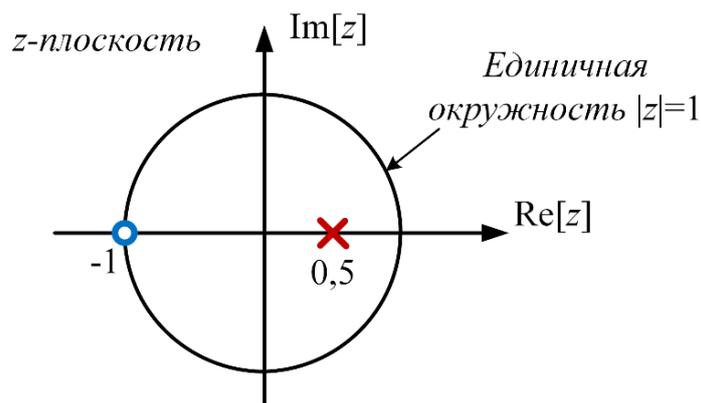


Рисунок 3.2 – Диаграмма нулей и полюсов

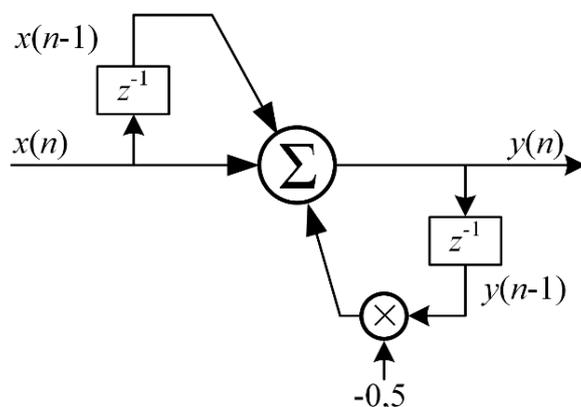


Рисунок 3.3 – Блок-схема ЛС-системы

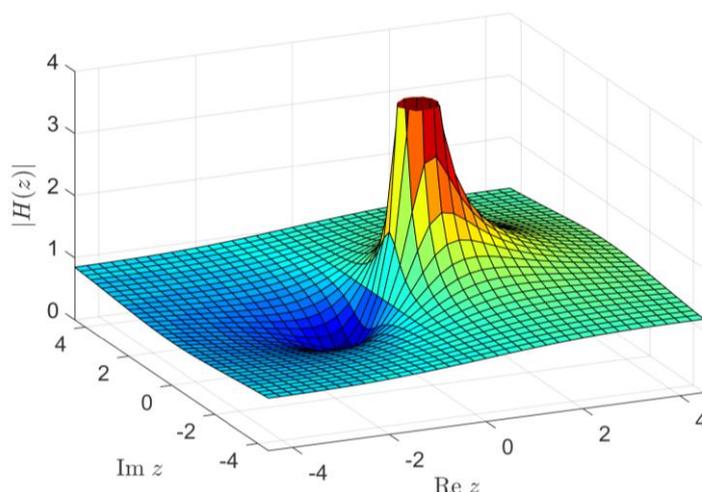


Рисунок 3.4 – Поверхность, описываемая модулем передаточной функции $|H(z)|$ в z -плоскости

3.5 Обратное z -преобразование

Формальный подход к обратному z -преобразованию основывается на интегральной теореме Коши и редко используется на практике. Чаще используются более простые процедуры поиска обратного z -преобразования, среди которых можно выделить:

- табличный метод;
- метод разложения на элементарные дроби;
- метод степенных рядов.

3.5.1 Табличный метод

Суть метода состоит в использовании таблицы z -преобразований стандартных последовательностей (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Z -преобразование стандартных последовательностей

Последовательность	Z -преобразование	Область сходимости (ОС)
1	2	3
$\delta(n)$	1	$z \in \mathbb{C}$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$

Продолжение таблицы 3.1

1	2	3
$\delta(n - m)$	z^{-m}	$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
$u(n) \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$u(n) \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$u(n)r^n \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1}r \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1}r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
$u(n)r^n \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1}r \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1}r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
$\begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{1 - \alpha^N z^{-N}}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > 0$

Пример 3.5. Найти обратное z -преобразование табличным методом для z -образа:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Решение. Используя четвертую строку таблицы 3.1, находим, что обратное z -преобразование равно

$$x(n) = \frac{1}{2^n} u(n).$$

3.5.2 Метод разложения на элементарные дроби

Иногда таблица 3.1 не содержит функцию $X(z)$ в явном виде, однако ее можно преобразовывать к такому виду, части которого содержатся в таблице. Любую рациональную функцию от z^{-1} можно записать в виде

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (3.12)$$

Ее можно переписать как

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}, \quad (3.13)$$

где c_k – нули функции $X(z)$ ($c_k \neq 0$); d_k – полюсы функции $X(z)$ ($d_k \neq 0$).

Если $M < N$ и кратность всех полюсов равна единице, то $X(z)$ можно представить в виде

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (3.14)$$

Очевидно, общий знаменатель дробей из суммы (3.14) совпадает со знаменателем дроби (3.13). Умножая обе части равенства (3.14) на $(1 - d_k z^{-1})$ и вычисляя значение произведения в точке $z = d_k$, можно найти коэффициент A_k :

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z)|_{z=d_k}. \quad (3.15)$$

Пример 3.6. Найти последовательность $x(n)$, имеющую z -преобразование:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Решение. Поскольку оба полюса имеют кратность, равную единице, $X(z)$ можно записать в виде суммы (3.14):

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Из (3.15) получаем

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1/4} = -1,$$

$$A_2 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1/2} = 2.$$

Следовательно,

$$X(z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Используя таблицу 3.1 и свойство линейности z -преобразования, находим, что

$$x(n) = \frac{2}{2^n}u(n) - \frac{1}{4^n}u(n).$$

3.5.3 Метод степенных рядов

Z -преобразование определяется как ряд Лорана, коэффициентами которого служат отсчеты последовательности $x(n)$. Таким образом, z -преобразование задано степенным рядом

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \dots + x(-1)z + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (3.16)$$

Мы можем найти любой конкретный отсчет последовательности $x(n)$, глядя на коэффициент при подходящей степени z^{-1} .

Если $X(z)$ задано в виде дробно-рациональной функции, его также можно разложить в бесконечный ряд относительно z^{-1} путем деления в столбик:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}} = \\ &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

В этом методе числитель и знаменатель функции, $X(z)$ сперва выражаются через увеличивающийся показатель степени z^{-1} , а затем путем деления в столбик находится частное. Рассмотрим данный процесс на примере.

Пример 3.7. Дан z -образ ЛС-системы:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}.$$

Необходимо найти его обратное z -преобразование методом степенных рядов.

Решение:

1) Делим числитель на знаменатель:

$$1 + 2z^{-1} + z^{-2} = (1 - z^{-1} + z^{-2}) \times 1 + 3z^{-1}.$$

Полученное частное является первым членом временного ряда, т. е. $x(0) = 1$.

2) Делим полином-остаток $3z^{-1}$, полученный на предыдущем шаге, на знаменатель дроби:

$$3z^{-1} = (1 - z^{-1} + z^{-2}) \times 3z^{-1} + (3z^{-2} - 3z^{-3}).$$

Коэффициент при z^{-1} частного является вторым членом искомого временного ряда, т. е. $x(1) = 3$.

3) Делим полином-остаток $3z^{-2} - 3z^{-3}$, полученный на предыдущем шаге, на знаменатель дроби:

$$3z^{-2} - 3z^{-3} = (1 - z^{-1} + z^{-2}) \times 3z^{-2} + 3z^{-4}.$$

Коэффициент при z^{-2} частного является третьим членом искомого временного ряда, т. е. $x(2) = 3$.

Данный процесс можно продолжать до тех пор, пока не будет найдено нужное число членов временного ряда $x(n)$. В итоге получим следующее разложение:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + \dots$$

Метод деления в столбик можно сформулировать иначе, так что значения последовательности $x(n)$ будут получаться рекурсивно:

$$\begin{aligned} x(0) &= b_0/a_0, \\ x(1) &= (b_1 - x(0)a_1)/a_0, \\ x(2) &= (b_2 - x(1)a_1 - x(0)a_2)/a_0, \\ &\dots \\ x(n) &= \frac{(b_n - \sum_{i=1}^n x(n-i)a_i)}{a_0}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ниже приведен пример, иллюстрирующий данный рекурсивный метод.

Пример 3.8. Дан z -образ ЛС-системы:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}.$$

Необходимо найти первые четыре члена его обратного z -преобразования рекурсивным способом.

Решение. Сравнив приведенные выше коэффициенты $X(z)$ с общим выражением (3.17), находим, что

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 1.$$

Используя выражение (3.18), получаем:

$$x(0) = b_0/a_0 = 1,$$

$$x(1) = (b_1 - x(0)a_1)/a_0 = (2 - 1 \times (-1)) = 3,$$

$$x(2) = (b_2 - x(1)a_1 - x(0)a_2)/a_0 = (1 - 3 \times (-1) - 1 \times 1) = 3,$$

$$x(3) = (b_3 - x(2)a_1 - x(1)a_2 - x(0)a_3)/a_0 =$$

$$= (0 - 3 \times (-1) - 3 \times 1 - 1 \times 0) = 0.$$

Таким образом, найденные значения обратного преобразования совпадают с предыдущим примером.

3.6 Задачи к разделу 3

- 1 Найдите z -преобразование и область сходимости для $x(n) = u(n)$.
- 2 Найдите z -преобразование и область сходимости для $x(n) = u(n)\alpha^n e^{\alpha n}$.
- 3 Найдите z -преобразование для следующих дискретных сигналов:
 - а) $x(n) = 8\delta(n) + 7\delta(n - 3) + 3\delta(n + 2) - 5\delta(n - 1) + 2\delta(n + 4)$;

$$\text{б) } x(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 0, \\ 1, & 1 \leq n < 3, \\ 2, & n > 3. \end{cases}$$

- 4 Найдите последовательность $x(n)$, чье z -преобразование равно

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > a.$$

Используйте метод степенных рядов, для чего найдите, как раскладывается функция $\ln(1 + x)$ в степенной ряд.

5 Определите стабильность следующих систем с заданными коэффициентами. Изобразите схемы, реализующие данные системы. При помощи *MATLAB*-функции *zplane* отобразите диаграмму нулей и полюсов для каждой системы.

- а) $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -0,25, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$;
- б) $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -0,5775, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0,25$;
- в) $b_0 = 1, b_1 = 2,25, b_2 = 1,25, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -0,0625$;
- г) $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0,5625, a_0 = 1, a_1 = -2,1, a_2 = 1,04$.

- 6 Найдите z -преобразование для каждой из следующих последовательностей:

$$\text{а) } \frac{u(n)}{2^n}; \qquad \text{б) } \delta(n - 1);$$

$$\text{в)} \frac{-u(-n-1)}{2^n};$$

$$\text{г)} \delta(n+1);$$

$$\text{д)} \frac{u(-n)}{2^n};$$

$$\text{е)} \frac{u(n)-u(n-10)}{2^n};$$

$$\text{ж)} \delta(n).$$

7 Используя метод разложения в сумму простейших дробей и метод разложения в ряд, восстановите исходную последовательность по указанным z -образам:

$$\text{а)} X(z) = \frac{1}{1+0,5z^{-1}}, |z| > 0,5;$$

$$\text{б)} X(z) = \frac{1}{1+0,5z^{-1}}, |z| < 0,5;$$

$$\text{в)} X(z) = \frac{1-0,5z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > 0,5;$$

$$\text{г)} X(z) = \frac{1-0,5z^{-1}}{1-0,25z^{-2}}, |z| > 0,5;$$

$$\text{д)} X(z) = \frac{1-\alpha z^{-1}}{z^{-1}-\alpha}, |z| > |1/\alpha|.$$

8 Изобразите диаграмму нулей и полюсов для следующих z -образов. Отметьте на диаграмме область сходимости.

$$\text{а)} X_1(z) = \frac{1-0,5z^{-1}}{1+2z^{-1}}, |z| < 2;$$

$$\text{б)} X_2(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1+0,5z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}, x_2(n) \text{ — детерминирована};$$

$$\text{в)} X_3(z) = \frac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{13}{6}z^{-1}+z^{-2}}, x_3(n) \text{ — абсолютно суммируема}.$$

9 При помощи *MATLAB*-функции *deconv* найдите первых пять членов обратного z -преобразования $x(n)$:

$$\text{а)} X_1(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+0,3561z^{-2}};$$

$$\text{б)} X_2(z) = \frac{N_1(z)N_2(z)N_3(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)}, \text{ где}$$

$$N_1(z) = 1 - 1,22346z^{-1} + z^{-2};$$

$$N_2(z) = 1 - 0,437833z^{-1} + z^{-2};$$

$$N_3(z) = 1 + z^{-1};$$

$$D_1(z) = 1 - 1,433509z^{-1} + 0,85811z^{-2};$$

$$D_2(z) = 1 - 1,293601z^{-1} + 0,556929z^{-2};$$

$$D_3(z) = 1 - 0,612159z^{-1};$$

$$\text{в) } X_3(z) = \frac{5}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

10 При помощи *MATLAB*-функции *residues* разложите на элементарные дроби следующие z -образы:

$$\text{а) } X_1(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} + 0,825z^{-2}};$$

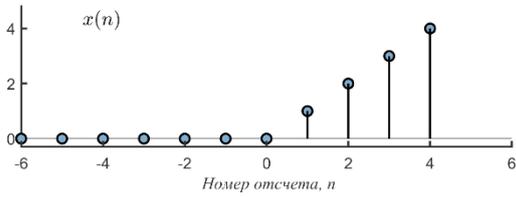
$$\text{б) } X_2(z) = \frac{1 + 0,35z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0,71z^{-1} + 0,125z^{-2}};$$

$$\text{в) } X_3(z) = \frac{z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 0,68z^{-1} + 0,93z^{-2}}.$$

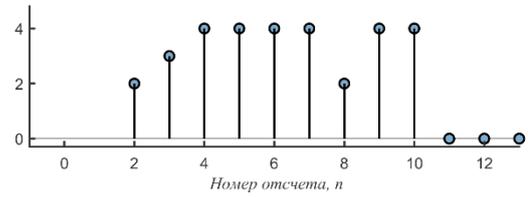
Приложение А

Ответы к задачам раздела 1

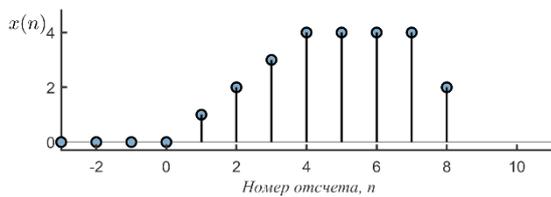
1



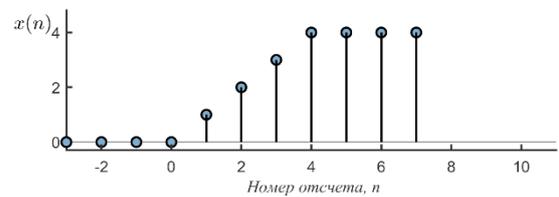
a



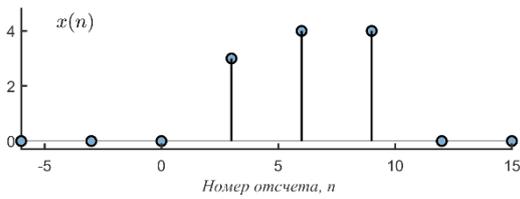
б



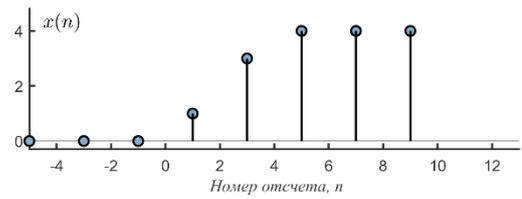
в



г



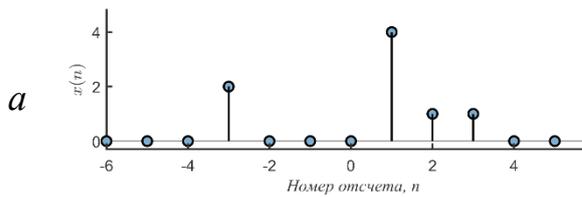
д



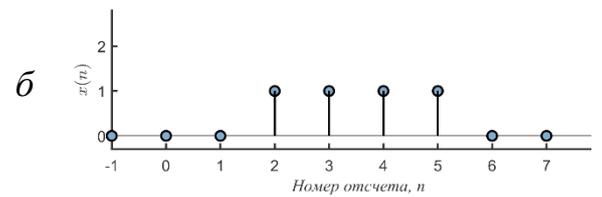
е

Рисунок А.1 – Ответы к задаче 1 раздела 1

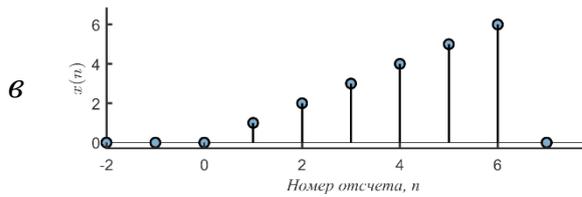
2



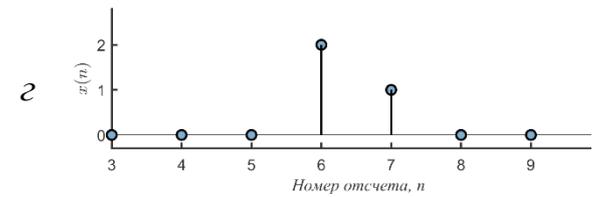
a



б



в



г

Рисунок А.2 – Ответы к задаче 2 раздела 1

3 а) периодический, $N = 4$; б) аperiodический, $N = 4\pi$ (не целое число);
 в) аperiodический, $N = \sqrt{2}$ (не целое число); г) аperiodический, $N = \frac{7}{11}\pi$ (не целое число); д) аperiodический (убывает); е) периодический, $N = 14$.

4 а) Используем тождество $\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$, тогда $\delta(n) + \delta(n - 1) = u(n) - u(n - 1) + u(n - 1) - u(n - 2) = u(n) - u(n - 2)$, что и требовалось доказать.

$$\begin{aligned} \text{б) } 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u(n) &= 0,5(2)^n \sin\left(\frac{6\pi n}{3} - \frac{5\pi n}{3}\right) u(n) = \\ &= 0,5(2)^n \left(\underbrace{\sin 2\pi n}_{=0} \cos \frac{5\pi n}{3} - \sin \frac{5\pi n}{3} \underbrace{\cos 2\pi n}_{=1} \right) u(n) = \\ &= -0,5(2)^n \sin \frac{5\pi n}{3} u(n) = \\ &= -0,5(2)^n \sin \frac{5\pi n}{3} (u(n) - \delta(n)). \end{aligned}$$

Последнее действие имеет место, поскольку $\sin \frac{5\pi n}{3} = 0$ при $n = 0$, поэтому замена $u(n)$ на $(u(n) - \delta(n))$ не изменит значения сигнала в точке $n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{в) } 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) u(n) &= 0,5(2)^n \sin\left(\frac{3\pi n}{3} - \frac{2\pi n}{3}\right) u(n) = \\ &= 0,5(2)^n \left(\underbrace{\sin \pi n}_{=0} \cos \frac{2\pi n}{3} - \sin \frac{2\pi n}{3} \underbrace{\cos \pi n}_{=(-1)^n} \right) u(n) = \\ &= -0,5(2)^n (-1)^n \sin \frac{2\pi n}{3} u(n) = \\ &= -0,5(-2)^n \sin \frac{2\pi n}{3} u(n - 1). \end{aligned}$$

Поскольку при $n = 0$ анализируемый сигнал равен нулю, то замена $u(n)$ на $u(n - 1)$ не вносит никаких изменений.

$$\begin{aligned} \text{г) } n(n - 1)\gamma^n u(n) &= n(n - 1)\gamma^n (\delta(n) + \delta(n - 1) + u(n - 2)) = \\ &= \underbrace{n(n - 1)\gamma^n \delta(n)}_{=0} + \underbrace{n(n - 1)\gamma^n \delta(n - 1)}_{=0} + n(n - 1)\gamma^n u(n - 2) = \\ &= n(n - 1)\gamma^n u(n - 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{д) } (u(n) + (-1)^n u(n)) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = (u(n) + \cos(\pi n) u(n)) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \\
& = u(n) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + u(n) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos(\pi n) = \\
& = u(n) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + u(n) \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} n\right) + \sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right)}{2}\right) = \\
& = \frac{u(n)}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} n\right)\right) = \frac{u(n)}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right)\right) = \\
& = \frac{u(n)}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}\right) = \\
& = \frac{u(n)}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{е) } (u(n) + (-1)^{n+1} u(n)) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = u(n) (1 + (-1)^{n+1}) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \\
& = u(n) \left(1 + \frac{(-\cos(\pi n))}{(-1)^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \\
& = u(n) \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right)\right) = \\
& = \frac{u(n)}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right) = \\
& = \frac{u(n)}{2} \left(-2 \underbrace{\sin(\pi n)}_{=0} \sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

$$5 \text{ а) } x_a(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n) + 2\delta(n+1) + \delta(n+2);$$

$$\text{б) } x_b(n) = \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 2\delta(n-4) + \delta(n-5);$$

$$\text{в) } x_c(n) = -6\delta(n+3) - 3\delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 6\delta(n-3);$$

$$\text{г) } x_d(n) = 4\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 2\delta(n-5) + 4\delta(n-6).$$

6

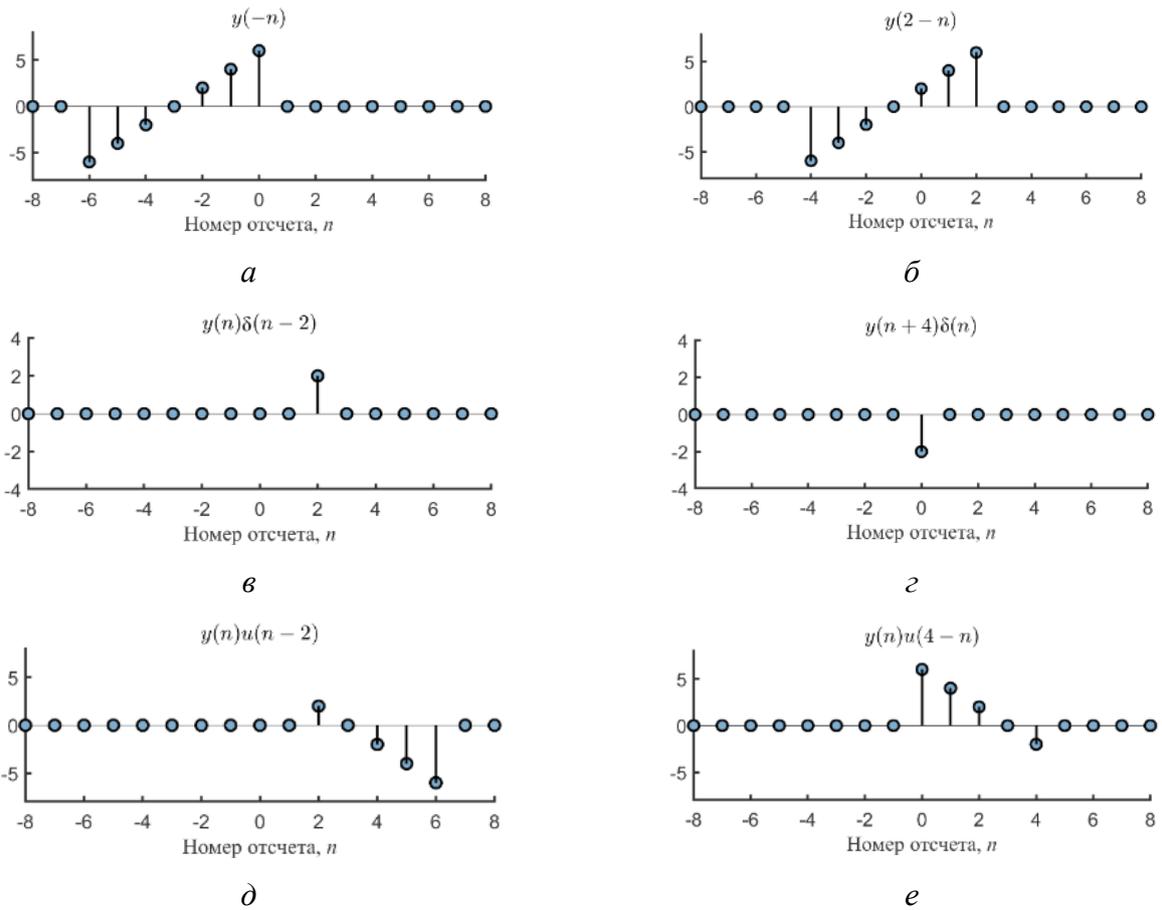


Рисунок А.3 – Ответы к задаче 6 раздела 1

7 а) $e^{j(0,2\pi+\theta)}$;

б) e^{j0n} ;

в) $e^{-j1,95n}$;

г) $e^{-j0,7\pi n}$.

8

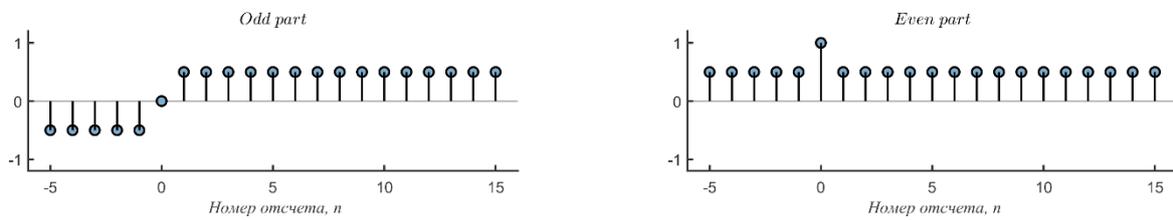


Рисунок А.4 – Ответы к пункту а задачи 8 раздела 1

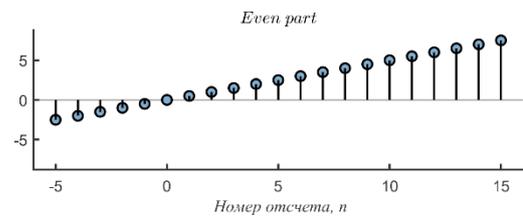
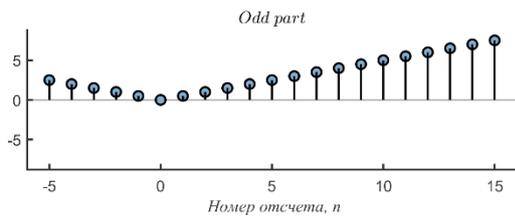


Рисунок А.5 – Ответы к пункту б задачи 8 раздела 1

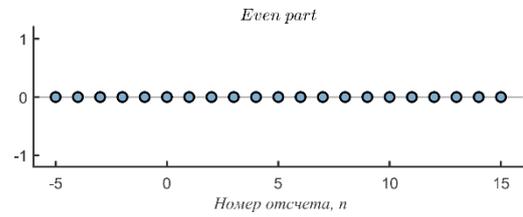
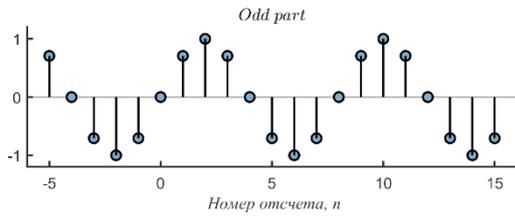


Рисунок А.6 – Ответы к пункту в задачи 8 раздела 1

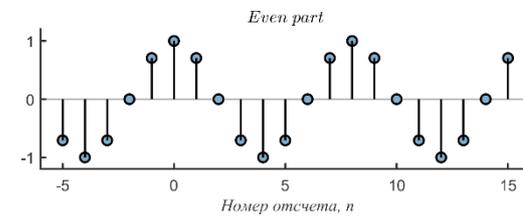
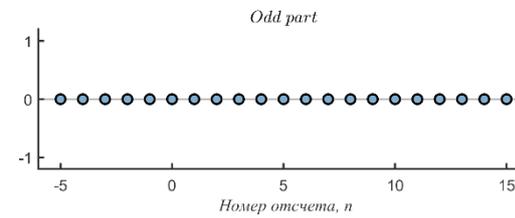


Рисунок А.7 – Ответы к пункту г задачи 8 раздела 1

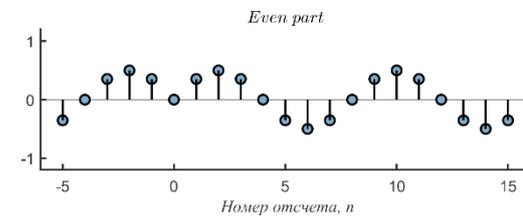
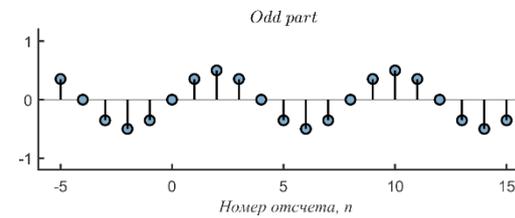


Рисунок А.8 – Ответы к пункту д задачи 8 раздела 1

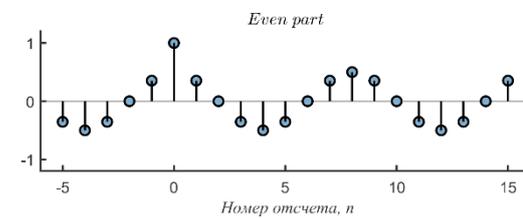
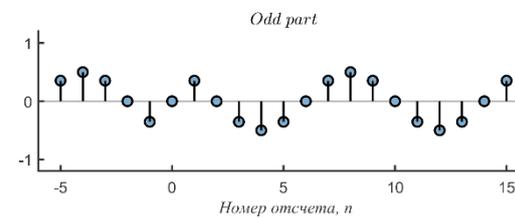


Рисунок А.9 – Ответы к пункту е задачи 8 раздела 1

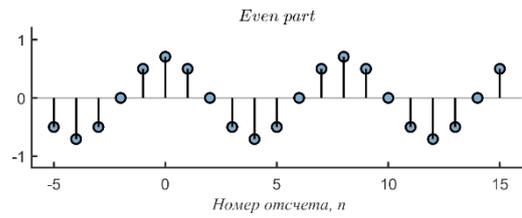
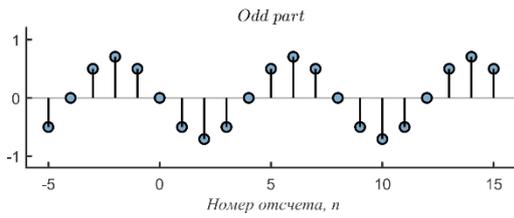


Рисунок А.10 – Ответы к пункту ж задачи 8 раздела 1

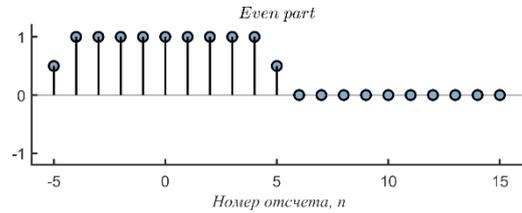
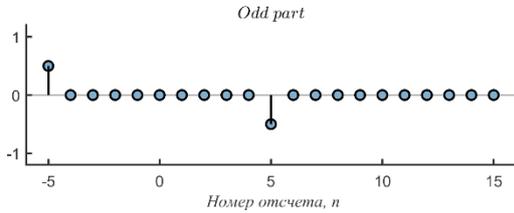


Рисунок А.11 – Ответы к пункту з задачи 8 раздела 1

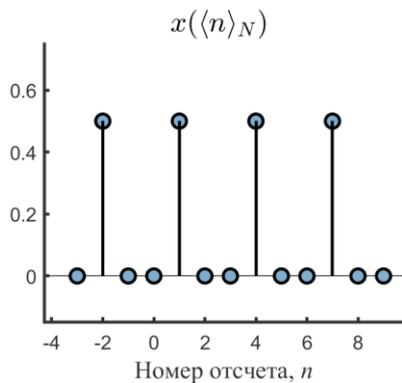
9 а) периодический, $N = 20$;

б) периодический, $N = 4$;

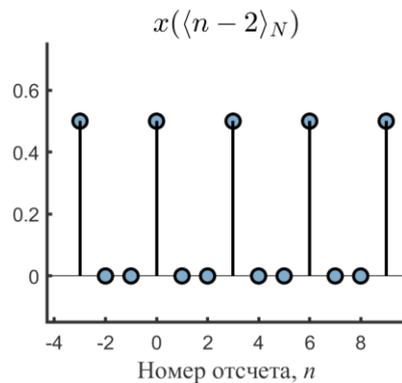
в) периодический, $N = 40$.

10 Если $y(n) = x_1(n)x_2(n)$, то $y(-n) = x_1(-n)x_2(-n)$. Поскольку $x_1(n)$ четный, то $x_1(n) = x_1(-n)$. Поскольку $x_2(n)$ является нечетным, то $x_2 = -x_2(-n)$. Исходя из этого $y(-n) = -x_1(n)x_2(n) = -y(n)$, следовательно, $y(n)$ будет нечетным.

11



а



б

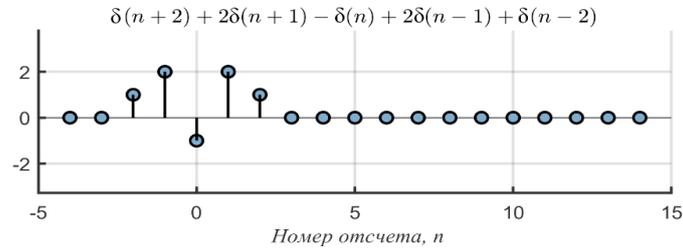
Рисунок А.12 – Ответы к задаче 11 раздела 1

$$12 x_e(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{|n|} e^{jn\pi/4} + \frac{1}{2} \delta(n).$$

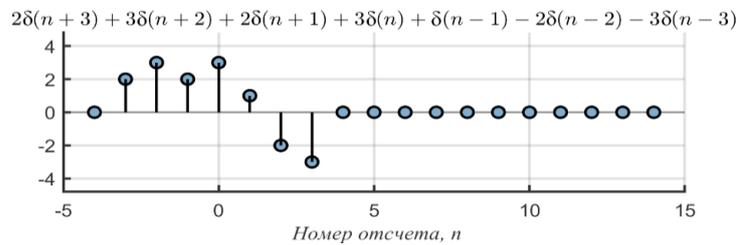
13 Необходимо найти НОД частот f_1, f_2, f_3 : а) НОД (2,3,8) = 1. Период $T = 1/f$, где $f = \text{НОД} = 1$ Гц. Подставляем полученное значение в формулу и

находим период: $T = 1/f = 1/\text{НОД}(2,3,8) = 1/1 = 1$ секунда; б) $\text{НОД}(4,6,12) = 2$.
 Период $T = 1/f$, где $f = \text{НОД} = 2$ Гц. Подставляем полученное значение в формулу и находим период: $T = 1/f = 1/\text{НОД}(4,6,8) = 1/2 = 0,5$ секунды.

14



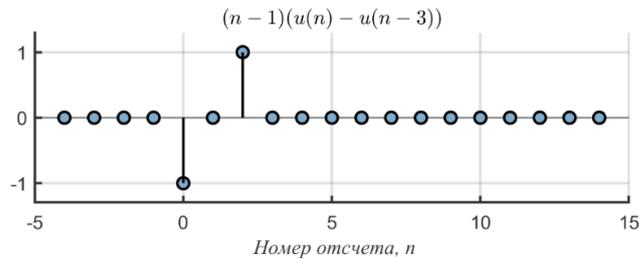
a



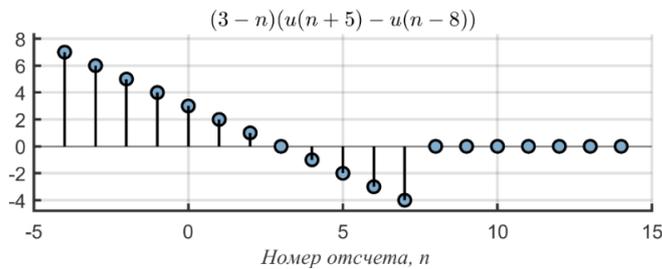
б

Рисунок А.13 – Ответы к задаче 14 раздела 1

15



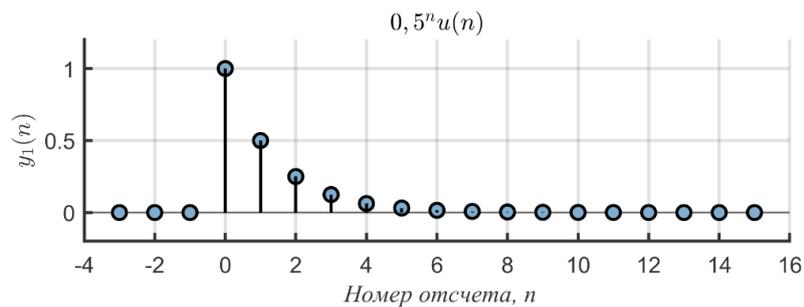
a



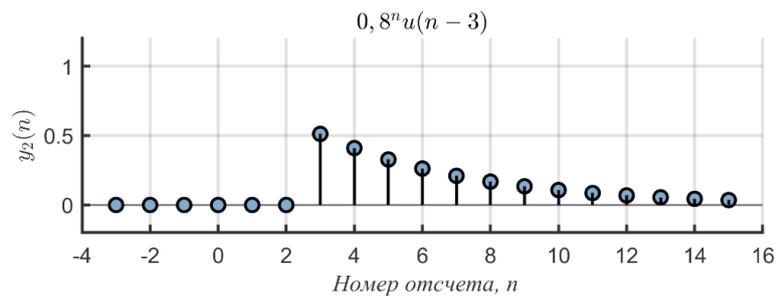
б

Рисунок А.14 – Ответы к задаче 15 раздела 1

16



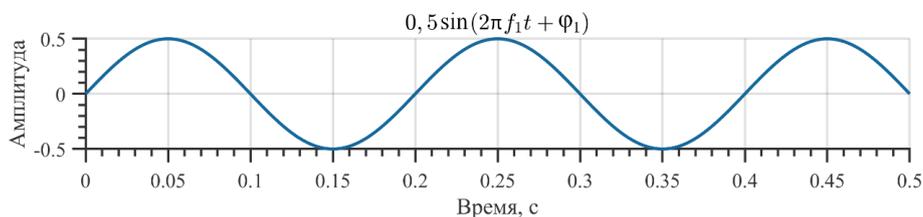
a



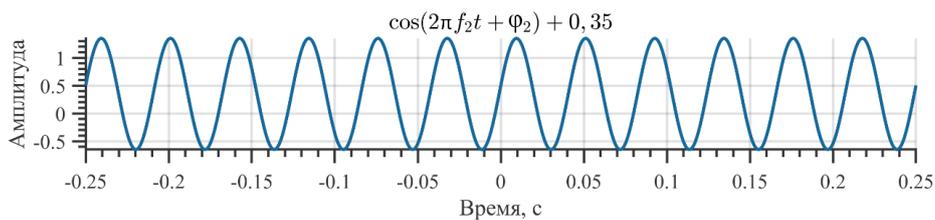
б

Рисунок А.15 – Ответы к задаче 16 раздела 1

17



a



б

Рисунок А.16 – Ответы к задаче 17 раздела 1

18 а) $E_{x_a} = 19$; б) $E_{x_b} = 19$; в) $E_{x_c} = 72$; г) $E_{x_d} = 40$.

19

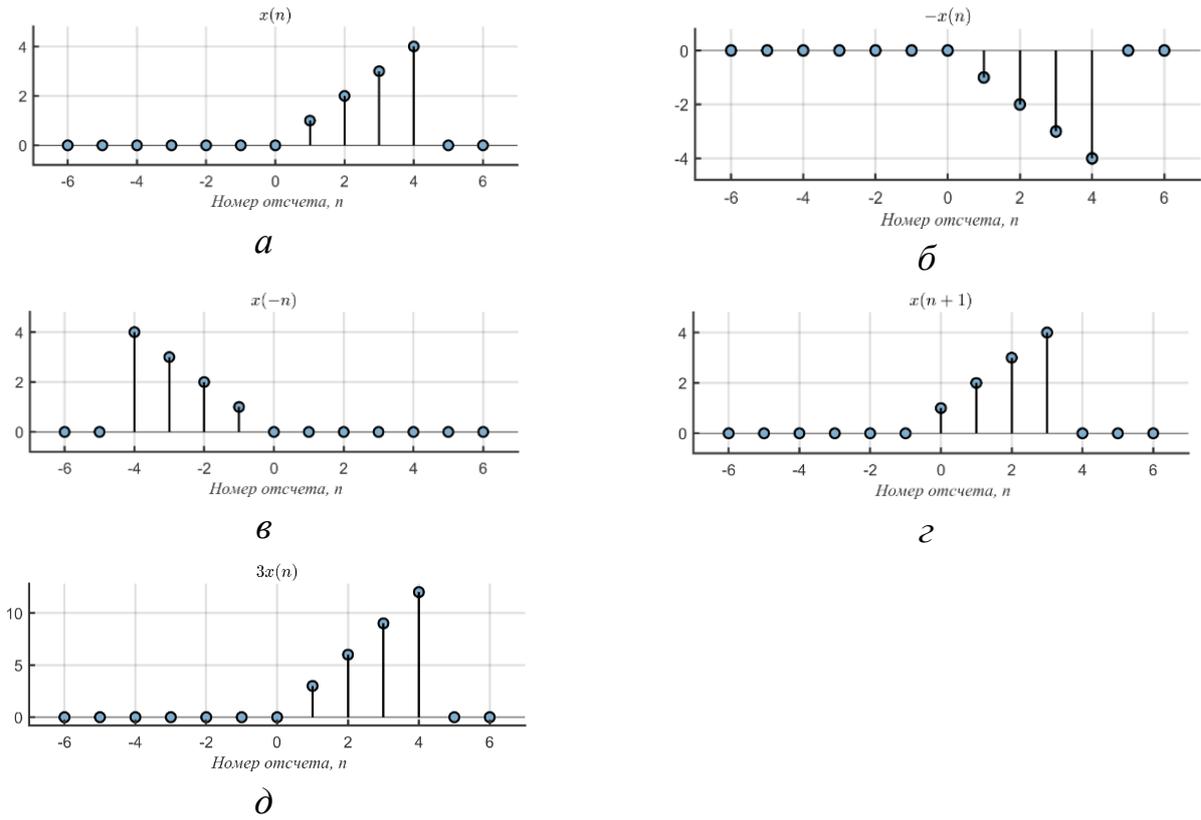


Рисунок А.17 – Ответы к задаче 19 раздела 1

Энергия $x(n)$, $-x(n)$, $x(-n)$, $x(n + 1)$ равна 30, а энергия $3x(n)$ равна 270.
 20 Энергия $-x(n)$, $x(-n)$, $x(n - m)$ равна E_x , а энергия $cx(n)$ равна $c^2 E_x$.

Приложение Б

Ответы к задачам раздела 2

- 1 Детерминированная, если $n_d > 0$, иначе – недетерминированная.
- 2 Детерминированная, если $M_1 \leq 0$, иначе – недетерминированная.
- 3

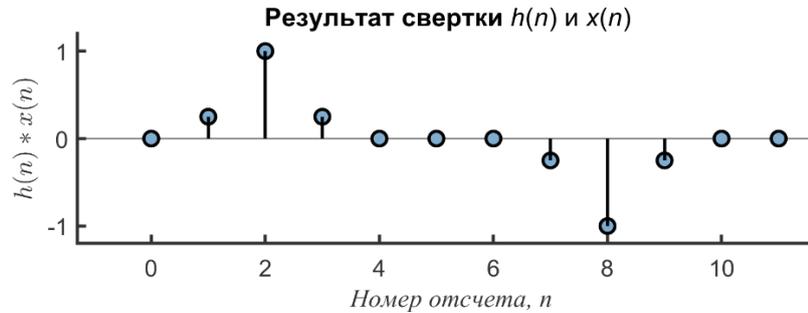


Рисунок Б.1 – Ответ к задаче 3 раздела 2

4 а) Система: 1) без запоминания; 2) неустойчивая; 3) детерминированная; 4) неоднородная; 5) неаддитивный; 6) нелинейная; 7) стационарная.

б) Медианный фильтр: 1) с запоминанием; 2) устойчивый; 3) недетерминированный; 4) однородный; 5) неаддитивный; 6) нелинейный; 7) стационарный.

в) Система: 1) с запоминанием; 2) устойчивая; 3) недетерминированная; 4) однородная; 5) аддитивная; 6) линейная; 7) стационарная.

5 а) нелинейная; б) линейная; в) нелинейная; г) нелинейная; д) нелинейная; е) нелинейная; ж) линейная; з) линейная.

6 а) $h(n) = \delta(n - 1)$; б) $h(n) = \delta(n + 1)$; в) $h(n) = \delta(n - 1)$; г) $h(n) = \delta(n)$; д) $h(n) = \delta(n)$; е) $h(n) = \delta(n)$; ж) $h(n) = \sum_{k=-5}^5 \delta(n - k)$; з) $h(n) = 0$.

7 а) стационарная, линейная, детерминированная, устойчивая, динамическая, обратимая;

б) стационарная, линейная, детерминированная, устойчивая, динамическая, обратимая;

в) нестационарная, линейная, недетерминированная, неустойчивая, динамическая, необратимая;

г) нестационарная, линейная, детерминированная, неустойчивая, динамическая, необратимая;

д) нестационарная, нелинейная, детерминированная, неустойчивая, статическая, необратимая;

е) стационарная, нелинейная, детерминированная, устойчивая, статическая, необратимая;

ж) нестационарная, линейная, недетерминированная, устойчивая, динамическая, обратимая;

з) нестационарная, нелинейная, недетерминированная, устойчивая, динамическая, необратимая;

и) нестационарная, нелинейная, недетерминированная, устойчивая, динамическая, обратимая;

к) стационарная, линейная, недетерминированная, устойчивая, динамическая, необратимая;

л) стационарная, нелинейная, детерминированная, устойчивая, динамическая, необратимая.

8 а) линейная, инвариантная во времени, детерминированная;

б) линейная, инвариантная во времени, недетерминированная.

9 а) $y_1(x) = 10x^5 - 20x^4 - 11x^3 + 32x^2 - 8x$;

б) $y_2(x) = -10x^7 - 36x^6 - 18x^5$;

в) $y_3(x) = -6x^8 - 4x^6 - 3x^5 - 2x^3$;

г) $y_4(x) = -35x^5 - 9x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 6x + 2$.

Приложение В

Ответы к задачам раздела 3

1 $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, ОС = $\{|z| > 1\}$.

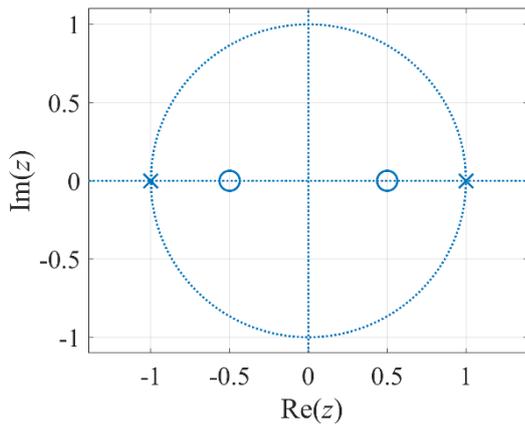
2 $X(z) = \frac{1}{1-\alpha e^\alpha z^{-1}}$, ОС = $\{|z| > \alpha e^\alpha\}$.

3 а) $X(z) = 2z^4 + 3z^2 + 8 - 5z^{-1} + 7z^{-3}$;

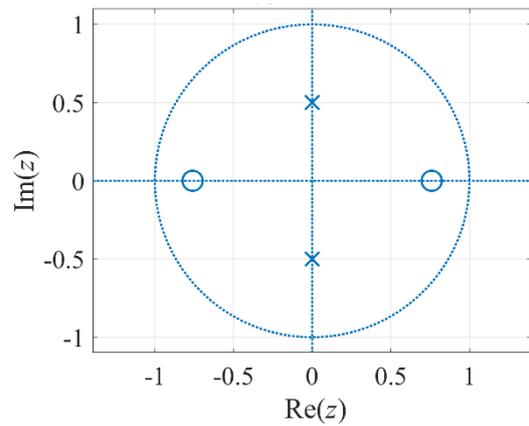
б) $X(z) = \frac{z^{-1}+z^{-3}}{1-z^{-1}}$.

4 $x(n) = \frac{(-1)^{n-1} \alpha^n u(n-1)}{n}$.

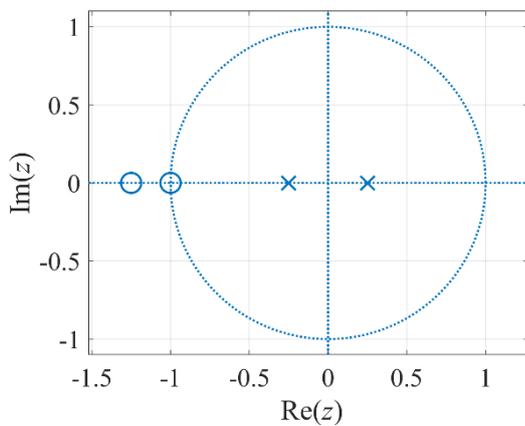
5 а) стабильна (на грани устойчивости); б) стабильна; в) стабильна; г) нестабильна.



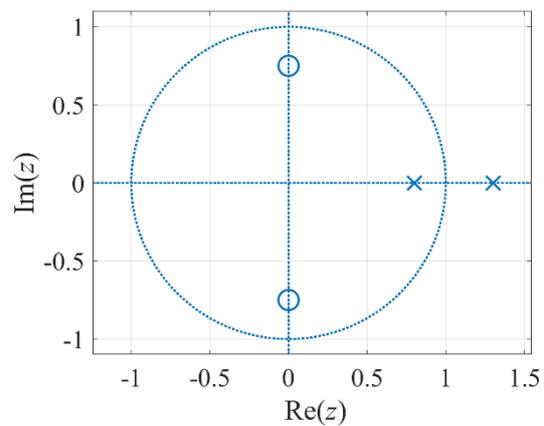
а



б



в



г

Рисунок В.1 – Ответы к задаче 5 раздела 3

6 а) $\frac{1}{1-0,5z^{-1}}, |z| > 0,5;$

б) $z^{-1}, z \neq 0;$

в) $\frac{1}{1-0,5z^{-1}}, |z| < 0,5;$

г) $z, |z| < \infty;$

д) $\frac{-0,5z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}, |z| < 0,5;$

ж) 1, все $z;$

е) $\frac{1-0,5^{10}z^{-10}}{1-0,5z^{-1}}, z \neq 0.$

7 а) $x(n) = (-0,5)^n u(n);$

б) $x(n) = -(-0,5)^n u(-n-1);$

в) $x(n) = 4(-0,5)^n u(n) - 3(-0,25)^n u(n);$

г) $x(n) = (-0,5)^n u(n);$

д) $x(n) = -a^{-(n+1)}u(n) + a^{-(n-1)}u(n-1).$

8

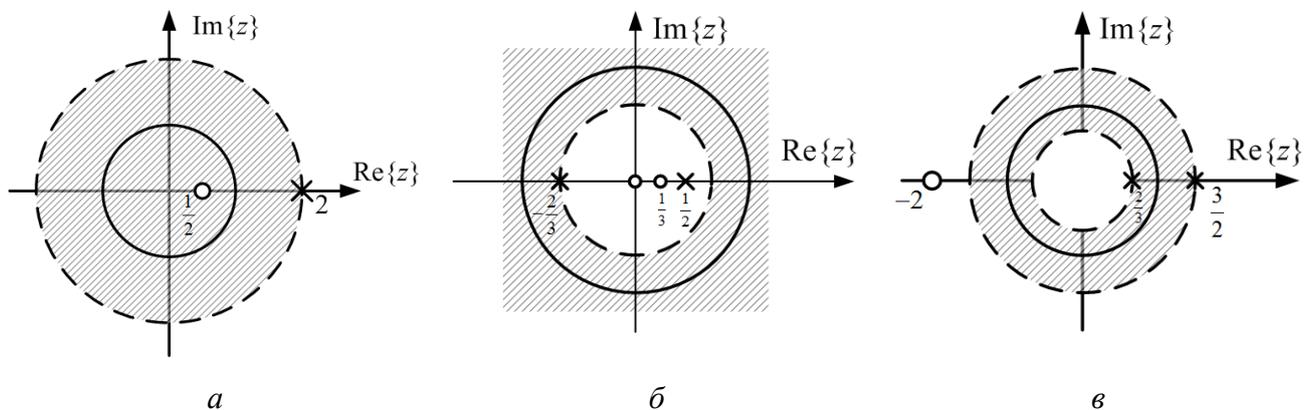


Рисунок В.2 – Ответы к задаче 8 раздела 3

9 а) $x_1(0) = 1, x_1(1) = 3, x_1(2) = 3,6439, x_1(3) = 2,5756, x_1(4) = 1,2780;$

б) $x_2(0) = 1, x_2(1) = 2,678, x_2(2) = 4,878, x_2(3) = 7,8471,$
 $x_2(4) = 10,2746;$

в) $x_3(0) = 5, x_3(1) = 0,8333, x_3(2) = 0,9722, x_3(3) = 0,3009,$
 $x_3(4) = 0,2122;$

$$10 \text{ a) } X_1(z) = 2,4242 + \frac{-0,7121 + 1,2276i}{1-(0,2500 + 0,8732i)z^{-1}} + \frac{-0,7121 - 1,2276i}{1-(0,2500 - 0,8732i)z^{-1}};$$

$$\text{б) } X_2(z) = 8 + \frac{40,9314}{1+0,3870z^{-1}} + \frac{-47,9314}{1+0,3230z^{-1}};$$

$$\text{в) } X_3(z) = 3,2258 + \frac{-1,6129 - 1,1617i}{1-(0,3400 + 0,9024i)z^{-1}} + \frac{-1,6129 + 1,1617i}{1-(0,3400 - 0,9024i)z^{-1}}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М. : Техносфера, 2006. – 853 с.
- 2 Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
- 3 Хемминг, Р. В. Цифровые фильтры / Р. В. Хемминг. – М. : Сов. радио, 1980. – 224 с.
- 4 Каппелини, В. Цифровые фильтры и их применение / В. Каппелини, А. Константи́нидис, П. Эмилиани. – М. : Радио и связь, 1983. – 350 с.
- 5 Гольденберг, Л. М. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие для вузов / Л. М. Гольденберг, В. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. – М. : Радио и связь, 1990. – 315 с.
- 6 Vaidyanathan, P. P. Multirate systems and filter banks / P. P. Vaidyanathan. – Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1993. – 911 p.
- 7 Hayes, M. H. Schaum's outline of theory and problems of digital signal processing / M. H. Hayes. – New York : McGraw-Hill, 1999. – 436 p.
- 8 Stein, J. Digital signal processing: a computer science perspective / J. Stein. – New York : A Wiley-Interscience Publication, 2000. – 859 p.
- 9 Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.
- 10 Солони́на, А. И. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов / А. И. Солони́на, Д. А. Улахович, Л. А. Яковлев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 464 с.
- 11 Айфичер, Э. Цифровая обработка сигналов: практический подход / Э. Айфичер, Б. Джервис ; пер. с англ. – М. : Изд. дом «Вильямс». – 2004. – 992 с.
- 12 Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов / Р. Лайонс ; пер. с англ. – 2-е изд. – М. : ООО «Бином-Пресс», 2006. – 656 с.
- 13 Смит, С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников / С. Смит. – М. : Изд. дом «Додэка-XXI», 2012. – 720 с.

14 Цифровая обработка сигналов и MATLAB : учеб. пособие / А. И. Соломина [и др.]. – СПб. : БХВ-Петербург, 2013. – 512 с.

15 Lathi, B. P. Essentials of digital signal processing / B. P. Lathi, R. Green. – New York : Cambridge University Press, 2014. – 748 p.

16 Вашкевич, М. И. Косинусно-модулированные банки фильтров с фазовым преобразованием: реализация и применение в слуховых аппаратах / М. И. Вашкевич, И. С. Азаров, А. А. Петровский. – М. : Горячая линия – Телеком, 2014. – 210 с.

17 Петровский, А. А. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Лабораторный практикум : пособие / А. А. Петровский, М. И. Вашкевич, И. С. Азаров. – Минск : БГУИР, 2016. – 87 с.

Учебное издание

Вашкевич Максим Иосифович
Порхун Максим Игоревич

**ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 16.09.2022. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,0. Уч.-изд. л. 5,1. Тираж 40 экз. Заказ 155.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014.
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014,
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск