УДК 51-7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СЕКРЕТ ПОСТРОЕНИЯ ПЧЕЛИНЫХ СОТ

Чистый П.Г.

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» филиал «Минский радиотехнический колледж», г. Минск, Республика Беларусь

Научный руководитель: Крутько О.В., преподаватель высшей категории

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о геометрическом принципе построения пчелиных сот, приведены расчеты для доказательства преимущества правильного шестиугольника перед равносторонним треугольником и квадратом, чтобы наиболее выгодным способом поделить большую площадь на несколько мелких частей для максимального сокращения расходования воска.

Ключевые слова: пчелиные соты, правильный шестиугольник.

Жизнь и деятельность пчел всегда привлекала внимание человека своей изумительной красотой и изяществом. «Странные общественные привычки и геометрические дарования пчел, – пишет известный математик Герман Вейль, – не могли не привлечь внимания и не вызвать восхищения людей, наблюдавших их жизнь и использовавших плоды их деятельности».

Необычная архитектура пчелиных сот всегда привлекала внимание людей. Пчелиные соты состоят из довольно тонких, близко расположенных друг к другу шестиугольников, стенки которых составляют примерно 0,1 мм.

Рассмотрим, как используют в пчелиной архитектуре геометрические правила. Круг – это геометрическая фигура, обладающая самым коротким размером сторон при окружении части плоскости. Например, при сравнении круга и квадрата одинаковой площади можно отметить то, что длина окружности значительно меньше периметра квадрата. Однако в строительстве сот дело состоит иначе. Если мы начнем делить рамку на равные соты в виде мелких кругов, то будет создана самая короткая длина, но тогда понадобится намного больше воска для закупорки оставшихся пустых мест. И пчелам просто не выгодно так тратить воск и свои силы.

Однако, если мы будем рассматривать деление на соты с точки зрения геометрии, то для достижения меньших затрат материала (воска) и получения наименьшей длины грани, придется делить плоскость на многоугольники. Среди них правильной n-угольник тот, который обладает самой короткой длиной периметра. Например, обладателем самого короткого периметра среди треугольников является равносторонний треугольник, а среди четырехугольников – квадрат. Подобным образом сравнивая между собой пяти- и шестиугольники, приходим к выводу, что, только будучи правильным, они могут обладать самым коротким периметром.

При изучении пчелиных сот возникает вопрос о том, какой же из правильных многоугольников следует использовать при делении единого пространства, если при делении единой плоскости на более мелкие части, необходимо учитывать тот факт, что соседние части должны плотно прилегать друг к другу, не оставляя при этом пустого пространства. Для этого сумма внутренних углов стенок, прилегающих друг к другу ячеек, должна составлять 360°.

Далее рассмотрим, какими правильными многоугольниками можно покрыть плоскость? Предположим, что плоскость покрыта правильными n-угольниками, причем каждая вершина является общей для x таких многоугольников, α – внутренний угол правильного многоугольника, равный $\alpha = \frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$. Тогда $\frac{180^{\circ}(n-2)}{n} = 360^0$.

$\frac{(n-2)}{n} \cdot x = 2; \frac{x\cdot(n-2)}{n} = 2; x \cdot (n-2) = 2n; x = \frac{2n}{n-2} > 2; \frac{2n}{n-2} - 2 > 0;$

Из этого равенства находим: $x = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$

Учитывая, что x – целое, получаем n = 3, 4, 6.

Итак, плоскость можно покрыть правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками. Проверим полученные данные.

При n = 3 получаем три угла, которые плотно составленные, составляют 180°, шесть углов – 360° , таким образом плоскость покрывается полностью без просветов (рисунок 1).

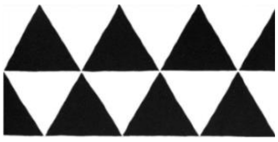

Рисунок 1

При n = 4 получаем четыре угла, которые вместе составляют 360°, т.е. $90^\circ \cdot 4 = 360^\circ$, плоскость покрывается полностью без просветов (рисунок 2).

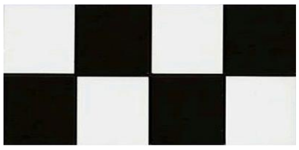

Рисунок 2

При n = 5 имеем, что внутренний угол правильного пятиугольника равен 108°, $108^\circ \cdot 3 = 324^\circ$, поэтому остается просвет в 36°(рисунок 3), таким образом плоскость без просветов не покрывается.

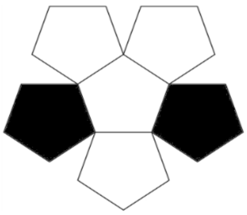

Рисунок 3

При n = 6 имеем, что внутренний угол правильного шестиугольника равен120°, т.е. три шестиугольника, составленные вместе, образуют $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$поэтому плоскость покрывается полностью без просветов (рисунок 4).

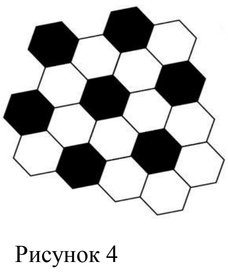

Рисунок 4

Продолжая проверку, делаем вывод, что плоскость без просветов можно покрыть лишь правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками.

Но почему пчелы выбрали именно шестиугольники? Для ответа на этот вопрос нужно сравнить периметры разных многоугольников, имеющих одинаковую площадь. Рассмотрим правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. У какого из этих многоугольников наименьший периметр? Произведем вычисления для правильных многоугольников.

Пусть имеем ABCDEF – правильный шестиугольник, ABCD – квадрат, ABC – правильный треугольник (рисунок 5). Обозначим S_n – площадь, P_n- периметр n-угольника, $\mathrm{AB} = a$. Тогда $S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \approx 2{,}55a^2, P_6 = 6a$.

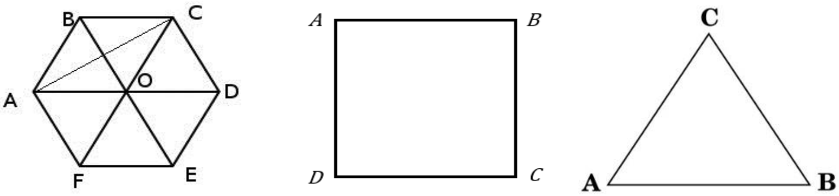

Рисунок 5

Все площади равны, а значит, мы имеем: $S_4 = 2{,}44a^2, AB \approx 1{,}6a$. Отсюда $P_4 \approx 6{,}4a$.

Пусть $AB = b$. Выразим b через a. Тогда $S_3 = \frac{b^2}{2} sin60^0 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Но $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, $b^2 = 6a^2$, $b = a\sqrt{6} \approx 2{,}4a, P_3 \approx 7{,}2a$. Таким образом, параметры многоугольников, имеющих одну и ту же площадь, относятся как $P_6 : P_4 : P_3 = 6 : 6{,}4 : 7{,}2$ или $3 : 3{,}2 : 3{,}6$.

Итак, при условии одинаковой площади многоугольников наименьший периметр имеет правильный шестиугольник. Таким образом, только используя данную фигуру, можно максимально сократить расходование воска. И это лишь небольшие расчеты для понимания того, как пчелы на практике решили задачу строительства ячейки для размещения возможно большего количества меда и экономии воска, как они осознали устойчивость преимущества шестиугольника перед равносторонним треугольником и квадратом.

Рассматривая формы пчелиных сот и ячеек и геометрические принципы их построения, можно прийти к следующим выводам:

1. Совершенство природы не перестает удивлять человека. А математика – это уникальное средство познания красоты природы.
2. При условии одинаковой площади многоугольников наименьший периметр имеет правильный шестиугольник. Таким образом, только используя данную фигуру в построении сот, пчелы максимально сокращают расходование воска.
3. Шестигранная форма сот – наиболее устойчивая форма в смысле распределения нагрузок, оптимальная природная форма.
4. Объемы пчелиной ячейки и правильной шестиугольной призмы равны, но у «пчелиной ячейки» - наименьшая площадь поверхности, что не остается просветов.
5. Принцип «пчелиных сот» широко используется в архитектурных ансамблях всего мира, строительстве гигантских сооружений, в создании новых дизайн-проектов.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В. «Математика и математическое образование в современном мире»:-Просвещение, 1999.
2. Еленьский Щ. «По следам Пифагора» - Москва, 1961.
3. Журналы: «Математика в школе»,№1, 1995.
4. Левитин К. «Геометрическая рапсодия»- Москва. Знания. -1976.

THE GEOMETRIC SECRET OF BUILDING A HONEYCOMB

Chistyi P.G.

EE Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belaris

Scientific adviser: Krutko O.V., lecturer.

Annotation. The paper deals with the question of the geometric principle of constructing honeycombs, calculations are given to prove the advantage of a regular hexagon over an equilateral triangle and a square, in order to divide a large area into several small parts in the most advantageous way to minimize wax consumption.

Key words: honeycomb, regular hexagon.