ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ
LOGICAL DESIGN

УДК 519.711
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-1-7-18

Оригинальная статья
Original Paper

Синтез комбинационных схем с помощью алгебраической декомпозиции булевых функций

Ю. В. Поттосин

Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь
✉*E-mail: pott@newman.bas-net.by*

Аннотация

Цели. Рассматривается задача синтеза комбинационных схем в базисе двухвходовых логических элементов, в качестве которых выступают элементы И, ИЛИ, И-НЕ и ИЛИ-НЕ. Целью работы является исследование возможности применения алгебраической декомпозиции булевых функций (в англоязычной литературе bi-decomposition) для синтеза комбинационных схем.

Методы. Используемый метод алгебраической декомпозиции сводится к поиску в графе двухблочного взвешенного покрытия полными двудольными подграфами (бикликами).

Результаты. Исходная булева функция задается двумя троичными матрицами, одна из которых представляет собой область булева пространства аргументов, где функция имеет значение 1, а другая – область булева пространства, где функция имеет значение 0. Рассматривается граф ортогональности строк троичных матриц, представляющих заданную булеву функцию. Описан способ получения двухблочного взвешенного покрытия бикликами графа ортогональности строк троичных матриц. Всем бикликам из получаемого покрытия в качестве веса определенным образом приписывается некоторое множество переменных, представляющих собой аргументы заданной функции. Каждая из этих биклик определяет булеву функцию, аргументами которой являются приписанные к биклике переменные. Полученные таким образом функции составляют разложение исходной функции.

Заключение. Процесс синтеза комбинационной схемы заключается в последовательном применении алгебраической декомпозиции к получаемым функциям. Предлагаемый метод позволяет строить схемы с малой задержкой.

Ключевые слова: синтез комбинационных схем, булева функция, декомпозиция булевой функции, троичная матрица, полный двудольный граф, биклика, двухблочное покрытие

Для цитирования. Поттосин, Ю. В. Синтез комбинационных схем с помощью алгебраической декомпозиции булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2022. − Т. 19, № 1. – С. 7–18. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-1-7-18

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 22.11.2021
Подписана в печать | Accepted 14.12.2021
Опубликована | Published 29.03.2022

Synthesis of combinational circuits by means of bi-decomposition of Boolean functions

Yuri V. Pottosin

*The United Institute of Informatics Problems
of the National Academy of Sciences of Belarus,
st. Surganova, 6, Minsk, 220012, Belarus*
✉*E-mail: pott@newman.bas-net.by*

Abstract

Objectives. The problem of synthesis of combinational circuits in the basis of two-input gates is considered. Those gates are AND, OR, NAND and NOR. The objective of the paper is to investigate the possibilities of application of bi-decomposition of Boolean functions to the synthesis of combinational circuits.

Methods. The method for bi-decomposition is reduced to the search in a graph for a weighted two-block cover with complete bipartite subgraphs (bi-cliques).

Results. The initial Boolean function is given as two ternary matrices, one of which represents the domain of Boolean space where the function has the value 1, and the other is the domain of Boolean space where the function has the value 0. The orthogonality graph of rows of ternary matrices representing the given function is considered. The method for two-bi-clique covering the orthogonality graph of rows of ternary matrices is described. Every bi-clique in the obtained cover is assigned in a certain way with a set of variables that are the arguments of the function. This set is the weight of the bi-clique. Each of those bi-cliques defines a Boolean function whose arguments are the variables assigned to it. The functions obtained in such a way constitute the required decomposition.

Conclusion. The process of synthesis of a combinational circuit consists of a successive application of bi-decomposition to obtained functions. The suggested method allows obtaining the circuits with short delay.

Keywords: synthesis of combinational circuits, Boolean function, decomposition of Boolean functions, ternary matrix, complete bipartite graph, bi-clique, two-block cover

For citation. Pottosin Yu. V. *Synthesis of combinational circuits by means of bi-decomposition of Boolean functions*. Informatika [*Informatics*], 2022, vol. 19, no. 1, pp. 7−18 (In Russ.).
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-1-7-18

Conflict of interest. The author declare of no conflict of interest.

Введение. Задача алгебраической декомпозиции (в англоязычной литературе bi-decomposition) ставится следующим образом. Для заданной булевой функции $y = f(\mathbf{x})$, где компонентами вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ являются булевы переменные, составляющие множество X, требуется найти суперпозицию $f(\mathbf{x}) = \varphi\,(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2))$, где компонентами векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ являются переменные из множеств $Z_1 \subset X$ и $Z_2 \subset X$ соответственно. Вид функции φ от двух переменных также задан. Это может быть любая из десяти булевых функций, существенно зависящих от обеих переменных и представляемых операциями алгебры логики. Обычно множества Z_1 и Z_2 заданы и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Такая декомпозиция называется *разделительной* в отличие от *неразделительной* декомпозиции, где условие $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ необязательно, но при этом на мощности множеств Z_1 и Z_2 могут быть наложены ограничения.

Известны примеры применения методов алгебраической декомпозиции для повышения быстродействия схем [1, 2] и при синтезе схем на базе программируемой вентильной матрицы (FPGA) [3]. Задача алгебраической декомпозиции при функции φ, выражаемой операцией сложения по модулю 2, при заданном разбиении (Z_1, Z_2) рассматривается в работе [4], где для ее решения предлагается использовать логические уравнения. Вероятность существования какой-либо декомпозиции для полностью определенных булевых функций весьма низка, но дело обстоит по-другому, когда рассматриваемые функции являются не полностью определенными (частичными), особенно когда они определены только на небольшой части булева пространства аргументов. Поэтому в литературе основное внимание уделялось декомпозиции (в том числе алгебраической) частичных булевых функций. Такой случай разделительной алгебраической декомпозиции при заданном разбиении (Z_1, Z_2) подробно исследован в работе [5]. Эвристический метод алгебраической декомпозиции (разделительной или неразделительной) частичных булевых функций при незаданном разбиении (Z_1, Z_2), когда к решению предъявляется только требование, чтобы числа аргументов функций g_1 и g_2 были как можно меньше, чем число аргументов исходной функции f, описан в статье [6]. Тот же метод применим и для полностью определенных функций, однако, как уже было сказано, очень мала вероятность того, что будет выполнено указанное требование. Вместе с тем, если функция φ относится к классу нелинейных функций, то функции g_1 и g_2 оказываются проще функции f в том смысле, что степень их зависимости от некоторых переменных может быть меньше, чем у функции f. Данный параметр рассматривался в статье [7]. Под степенью зависимости функции f от переменной x_i здесь понимается число пар значений ($\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$) вектора $\mathbf{x}$ с различными значениями i-й компоненты, для которых $f(\mathbf{x}') \neq f(\mathbf{x}'')$. Кроме того, если какая-то из функций g_i ($i = 1, 2$) оказалась с тем же числом аргументов, что и полностью определенная функция f, то эта функция g_i в любом случае будет не полностью определенной, что увеличивает вероятность ее разложимости. Далее предлагается метод синтеза комбинационных схем в базисе двухвходовых элементов, реализующих нелинейные функции. Имеются в виду базисы элементов И-НЕ, ИЛИ-НЕ, а также базис элементов И, ИЛИ при доступных инверсиях переменных. Метод основан на последовательном применении алгебраического разложения к получаемым функциям способом, описанным в статье [6].

Предлагаемый подход. Предполагается, что булева функция $f(\mathbf{x})$, полностью или не полностью определенная, задана двумя множествами: областью M^1 булева пространства, где функция имеет значение 1, и областью M^0 булева пространства, где она имеет значение 0. Эти множества будем задавать соответственно троичными матрицами $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{M}^0$, строки которых представляют собой интервалы из областей M^1 и M^0, а столбцы соответствуют аргументам $x_1, x_2, ..., x_n$ заданной функции.

Рассмотрим полный двудольный граф $G = (V^1, V^0, E)$, где вершины из множества V^1 соответствуют строкам матрицы $\mathbf{M}^1$, вершины из множества V^0 – строкам матрицы $\mathbf{M}^0$, а ребрами являются все пары вершин v^1v^0 ($v^1 \in V^1$, $v^0 \in V^0$), которым соответствуют ортогональные строки матриц. Два троичных вектора ортогональны по компоненте x_i, если в одном из них $x_i = 1$, а в другом $x_i = 0$ [8]. Естественно, любая вектор-строка $\mathbf{m}^1$ матрицы $\mathbf{M}^1$ ортогональна любой вектору-строке $\mathbf{m}^0$ матрицы $\mathbf{M}^0$. Поэтому двудольный граф G является полным.

Каждому ребру v^1v^0 ($v^1 \in V^1$, $v^0 \in V^0$) графа G припишем элементарную дизъюнкцию $x_i \vee x_j \vee ... \vee x_k$ аргументов заданной функции, если векторы-строки $\mathbf{m}^1$ и $\mathbf{m}^0$ матриц $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{M}^0$, соответствующие вершинам v^1 и v^0 (концам данного ребра), ортогональны по компонентам $x_i, x_j, ..., x_k$. Полному двудольному подграфу, или *биклике*, графа G припишем конъюнктивную нормальную форму (КНФ) с элементарными дизъюнкциями, приписанными ребрам, которые принадлежат данной биклике. После удаления возможных поглощаемых элементарных дизъюнкций преобразуем полученную КНФ, раскрыв скобки, в дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Переменные, составляющие элементарную конъюнкцию минимального ранга в полученной ДНФ, припишем соответствующей биклике.

Пусть требуется выразить заданную (в общем случае не полностью определенную) функцию $f(\mathbf{x})$ как $f(\mathbf{x}) \prec \varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2))$, где φ – булева функция от двух переменных g_1 и g_2, которые являются функциями соответственно от векторных переменных $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$, представляющих части вектора $\mathbf{x}$, а символ $\prec$ обозначает отношение реализации. Функция φ, частичная или полностью определенная, реализует частичную функцию f, если значения функции φ совпадают со значениями функции f везде, где они определены [8]. Далее удобно рассматривать отношение равенства функций как частный случай отношения реализации, поэтому для отношения реализации также будем использовать символ «=».

Функции g_1 и g_2 построим следующим образом. В графе G выделим две биклики $B_1 = (V_1^1, V_1^0, E_1)$ и $B_2 = (V_2^1, V_2^0, E_2)$ так, чтобы любое ребро графа G присутствовало хотя бы в одном из множеств E_1 или E_2, т. е. биклики B_1 и B_2 должны покрывать своими ребрами все множество E ребер графа G. Биклики B_1 и B_2 достаточно задать парами множеств (V_1^1, V_1^0) и (V_2^1, V_2^0), так как в биклике каждая вершина из одной доли связана ребрами со всеми вершинами другой доли.

Аргументами функции g_i (i = 1, 2) являются переменные, приписанные биклике B_i. Множество M_i^1 значений векторной переменной $\mathbf{z}_i$, где функция g_i имеет значение 1, составляют части векторов из M^1 или M^0 (в зависимости от вида функции φ), соответствующих вершинам из множества V_i^1. Части этих векторов определяются переменными, приписанными биклике B_i, т. е. эти переменные являются компонентами вектора $\mathbf{z}_i$. Аналогично формируется множество M_i^0 из частей векторов, соответствующих вершинам из множества V_i^0. Таким образом, каждому вектору из M^1 или M^0 соответствует пара значений функций g_1 и g_2. Если эта пара соответствует вектору из множества M^1, то она является элементом множества M_φ^1, где функция φ имеет значение 1. Если пара соответствует вектору из M^0, то она является элементом множества M_φ^0. Так будет задана функция φ. Заметим, что пары (V_1^1, V_1^0) и (V_2^1, V_2^0) следует считать упорядоченными, поскольку они связаны со значениями функций g_1 и g_2.

Описываемый метод предполагает дальнейшее подобное разложение функций g_1 и g_2 и последующих функций до получения функций от двух переменных из множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ аргументов заданной функции.

Получение покрытия графа *G* двумя бикликами. В таблице показано, какие значения должны иметь функции g_1 и g_2 при определенных значениях функции φ и при разных видах этой функции. Равенство $V_1^1 = V_2^1 = V^1$ должно выполняться для операции И, $V_1^0 = V_2^0 = V^0$ – для операции ИЛИ, $V_1^1 = V_2^1 = V^0$ – для операции И-НЕ и $V_1^0 = V_2^0 = V^1$ – для операции ИЛИ-НЕ.

Значения функций g_1 и g_2

The values of the functions g_1 and g_2

И *AND*	ИЛИ *OR*	И-НЕ *NAND*	ИЛИ-НЕ *NOR*
φ g_1 g_2	φ g_1 g_2	φ g_1 g_2	φ g_1 g_2
1 1 1	0 0 0	0 1 1	1 0 0
0 – 0	1 – 1	1 – 0	0 – 1
0 0 –	1 1 –	1 0 –	0 1 –

Таким образом, одна из долей биклики всегда определена видом функции φ как одна из долей полного двудольного графа *G* и присутствует в обеих бикликах. Другие доли биклик B_1 и B_2 образуются как блоки разбиения другой доли графа *G*. Например, если $V_1^0 = V_2^0 = V^1$, то $B_1 = (V_1^1, V^1)$ и $B_2 = (V_2^1, V^1)$, где $V_1^1 \cup V_2^1 = V^0$ и $V_1^1 \cap V_2^1 = \varnothing$.

Исходной информацией для получения искомого покрытия служит множество *звездных графов*, которые являются подграфами графа *G*. Звездным графом, или *звездой*, называется полный двудольный граф $K_{1,\,n}$ [9]. Одноэлементная его доля представляет собой центр звезды. В рассматриваемом случае упомянутое множество – это множество всех биклик, у которых одной долей является одноэлементное множество с вершиной $v \in V^0$, а другой – множество V^1 или у которых одной долей является одноэлементное множество с вершиной $v \in V^1$, а другой – множество V^0 двудольного графа *G*. Назовем их *звездными бикликами*.

Как было сказано выше, каждой биклике приписывается КНФ, которая преобразуется в ДНФ. Из ДНФ выберем элементарную конъюнкцию *K* минимального ранга и вместо ДНФ и КНФ припишем соответствующей звездной биклике B_i множество переменных X_i из конъюнкции *K*. Выберем две звездные биклики B_i и B_j, у которых пересечение $X_i \cap X_j$ имеет минимальную мощность среди всех пар рассматриваемых звездных биклик. Если таких вариантов несколько, то отдадим предпочтение множествам X_i и X_j максимальной мощности. Естественно, желателен вариант $X_i \cap X_j = \varnothing$. Примем пару (B_i, B_j) за начальное значение пары биклик, которая должна покрывать граф *G*, и обозначим ее (B_1, B_2).

Дальнейший процесс представляет собой последовательное расширение тех долей биклик B_1 и B_2, которые в начальных значениях были одноэлементными, за счет вершин, являющихся центрами рассматриваемых звездных биклик. Соответственно меняются множества X_1 и X_2. Пусть, например, $B_1 = (V_1^1, V_1^0)$, $B_2 = (V_2^1, V_2^0)$ и $V_1^1 \cup V_2^1 = V^0$, а множество V' состоит из вершин графа *G*, которые не принадлежат ни V^0, ни одному из V_1^0 и V_2^0. Выбираются вершина $v_k \in V'$, являющаяся центром некоторой звездной биклики B_k, и множество V_i^0 ($i \in 1, 2$), такие, что мощность множества $X_i \cup X_k$ отличается от мощности множества X_i или X_k на минимальную величину. Множество V_i^0 меняется на $V_i^0 \cup \{v_k\}$, а вершина v_k удаляется из V'. Процесс заканчивается, когда множество V' окажется пустым. Пара (B_1, B_2) представит искомое покрытие.

Пример. Пусть требуется построить логическую сеть из элементов И-НЕ, реализующую полностью определенную булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, которая представлена следующими матрицами (используется сквозная нумерация строк):

$$\mathbf{M}^1 = \begin{array}{c@{}l} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 & - \\ 0 & - & 1 & - & - \\ - & 1 & - & 1 & - \\ 0 & 0 & - & - & - \\ - & 1 & 0 & - & 0 \\ 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0 = \begin{array}{c@{}l} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 & - \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array}.$$

Для сокращения размеров рассматриваемых двудольных графов желательно представлять область определения функции минимальным количеством интервалов. Двудольный граф $G = (V^1, V^0, E)$ представим матрицей, подобной матрице смежности:

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c@{}l} \begin{array}{cccc} 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} x_3 \vee x_4 & x_4 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_1 & x_1 \vee x_3 & x_1 \\ x_4 & x_4 & x_2 & x_2 \vee x_4 \\ x_2 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_5 & x_3 & x_2 & x_2 \vee x_3 \\ x_1 & x_5 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_3 \vee x_5 & x_4 & x_3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array}.$$

Строки матрицы $\mathbf{G}$ соответствуют вершинам из множества $V^1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ (строкам матрицы $\mathbf{M}^1$), а столбцы – вершинам из множества $V^0 = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ (строкам матрицы $\mathbf{M}^0$). На пересечении i-й строки и j-го столбца находится элементарная дизъюнкция или одиночная переменная, приписанные ребру v_iv_j.

Биклики $B_1 = (V_1^1, V_1^0)$ и $B_2 = (V_2^1, V_2^0)$, покрывающие граф G, имеют одну общую долю: согласно таблице для выбранного базиса И-НЕ $V_1^0 = V_2^0 = V^1$. Звездные биклики с приписанными переменными имеют вид

$(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_1\}) - x_3\,x_4$, $(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_2\}) - x_1\,x_3$,
$(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_3\}) - x_2\,x_4$, $(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_4\}) - x_1\,x_2$,
$(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_5\}) - x_2\,x_3\,x_5$, $(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_6\}) - x_1\,x_2\,x_5$,
$(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_7\}) - x_1\,x_3\,x_4$.

За начальные значения биклик B_1 и B_2 примем $(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_1\})$ и $(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_6\})$, поскольку пересечение соответствующих множеств $X_1 = \{x_3, x_4\}$ и $X_2 = \{x_1, x_2, x_5\}$ пусто, а X_2 имеет максимальную мощность. В результате выполнения следующего шага получаем пару

$(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_1\}) - x_3\,x_4$, $(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_4, v_6\}) - x_1\,x_2\,x_5$.

В приведенной ниже последовательности преобразований биклик B_1 и B_2 пара в последней строке представляет покрытие графа G:

$$\begin{array}{ll}
(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_1, v_7\}) - x_1\,x_3\,x_4, & (\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_4, v_6\}) - x_1\,x_2\,x_5;\\
(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_1, v_2, v_7\}) - x_1\,x_3\,x_4, & (\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_4, v_6\}) - x_1\,x_2\,x_5;\\
(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_7\}) - x_1\,x_2\,x_3\,x_4, & (\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_4, v_6\}) - x_1\,x_2\,x_5;\\
(\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_7\}) - x_1\,x_2\,x_3\,x_4, & (\{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \{v_4, v_5, v_6\}) - x_1\,x_2\,x_3\,x_5.
\end{array}$$

Заданная функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ разлагается на две функции $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $f_2(x_1, x_2, x_3, x_5)$, связанные операцией И-НЕ, или «штрих Шеффера»: $f = f_1 \mid f_2$. Их можно задать матрицами, которые получаются следующим образом: для формирования $\mathbf{M}^1{}_1$ из $\mathbf{M}^0$ удаляется столбец x_5, для формирования $\mathbf{M}^0{}_1$ из $\mathbf{M}^1$ удаляются строки 4, 5, 6 и столбец x_5, для формирования $\mathbf{M}^1{}_2$ из $\mathbf{M}^0$ удаляется столбец x_4, для формирования $\mathbf{M}^0{}_2$ из $\mathbf{M}^1$ удаляются строки 1, 2, 3, 7 и столбец x_4. Формирование матриц сопровождается выполнением над ними операций простого поглощения и простого склеивания, после чего они приобретают следующий вид:

$$\mathbf{M}^1{}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & - & 1 & - \\ - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}; \qquad \mathbf{M}^1{}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - \\ - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array},$$

где нижние индексы у символов матриц совпадают с индексами соответствующих функций.

Нетрудно видеть, что функции f_1 и f_2 являются не полностью определенными. Значение функции f_1 не определено на наборе $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, а значение функции f_2 – на интервале, представляемом вектором $(0, 1, 1, –)$. Для дальнейшего разложения этих функций построим двудольные графы G_1 и G_2 с долями $V^{11} = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1\}$, $V^{01} = \{v_4^1, v_5^1, v_6^1, v_7^1\}$ и $V^{12} = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2\}$, $V^{02} = \{v_4^2, v_5^2, v_6^2\}$ соответственно. Графы G_1 и G_2 представим матрицами

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_3 \vee x_4 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_4 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_1 \vee x_3 & x_2 & x_4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}, \qquad \mathbf{G}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_2 & x_5 & x_1 \\ x_1 & x_3 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}.$$

Приведем слева звездные биклики для графа G_1, справа – для графа G_2:

$$\begin{array}{ll}
(\{v_4^1, v_5^1, v_6^1, v_7^1\}, \{v_1^1\}) - x_1\,x_3\,x_4, & (\{v_4^2, v_5^2, v_6^2\}, \{v_1^2\}) - x_1\,x_2\,x_5,\\
(\{v_4^1, v_5^1, v_6^1, v_7^1\}, \{v_2^1\}) - x_1\,x_3\,x_4, & (\{v_4^2, v_5^2, v_6^2\}, \{v_2^2\}) - x_1\,x_3\,x_5,\\
(\{v_4^1, v_5^1, v_6^1, v_7^1\}, \{v_3^1\}) - x_2\,x_3\,x_4; & (\{v_4^2, v_5^2, v_6^2\}, \{v_3^2\}) - x_1\,x_2.
\end{array}$$

В том же порядке приведем пары биклик (B_1^1, B_2^1) и (B_1^2, B_2^2), покрывающие соответственно графы G_1 и G_2:

$$\begin{array}{ll}
B_1^1 = (\{v_4^1, v_5^1, v_6^1, v_7^1\}, \{v_1^1, v_2^1\}) - x_1\,x_3\,x_4, & B_1^2 = (\{v_4^2, v_5^2, v_6^2\}, \{v_1^2, v_3^2\}) - x_1\,x_2\,x_5,\\
B_2^1 = (\{v_4^1, v_5^1, v_6^1, v_7^1\}, \{v_3^1\}) - x_2\,x_3\,x_4; & B_2^2 = (\{v_4^2, v_5^2, v_6^2\}, \{v_2^2\}) - x_1\,x_3\,x_5.
\end{array}$$

Теперь представим функции f_1 и f_2 как $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_3(x_1, x_3, x_4) \mid f_4(x_2, x_3, x_4)$ и $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_5(x_1, x_2, x_5) \mid f_6(x_1, x_3, x_5)$, функции f_3, f_4, f_5 и f_6 зададим в виде следующих матриц:

$$\mathbf{M}^1{}_3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & - \\ - & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}; \quad \mathbf{M}^1{}_4 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} - & 1 & - \\ 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_4 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 3 \end{array};$$

$$\mathbf{M}^1{}_5 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_5 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}; \quad \mathbf{M}^1{}_6 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_6 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 4 \end{array}.$$

Графы G_3, G_4, G_4 и G_4, соответствующие функциям f_3, f_4, f_5 и f_6, представим матрицами

$$\mathbf{G}_3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_3 & x_1 \\ x_4 & x_4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{G}_4 = \begin{array}{cc} 3 & \\ \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{G}_5 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_5 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{G}_6 = \begin{array}{cc} 4 & \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}.$$

Пары биклик, покрывающие указанные графы, имеют следующий вид:

$$B_1^3 = (\{v_3^3, v_4^3\}, \{v_1^3\}) - x_1 x_3, \qquad B_1^4 = (\{v_3^4\}, \{v_1^4\}) - x_3,$$
$$B_2^3 = (\{v_3^3, v_4^3\}, \{v_2^3\}) - x_4; \qquad B_2^4 = (\{v_3^4\}, \{v_2^4\}) - x_2;$$

$$B_1^5 = (\{v_4^5, v_5^5\}, \{v_1^5, v_3^5\}) - x_1 x_2, \quad B_1^6 = (\{v_4^6\}, \{v_1^6, v_3^6\}) - x_1 x_5,$$
$$B_2^5 = (\{v_4^5, v_5^5\}, \{v_2^5\}) - x_2 x_5; \qquad B_2^6 = (\{v_4^6\}, \{v_2^6\}) - x_3.$$

Отсюда получим разложения на функции с числом аргументов не более двух:

$$f_3(x_1, x_3, x_4) = f_7(x_1, x_3) \mid \overline{x}_4, \qquad f_4(x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_2 \mid \overline{x}_3,$$
$$f_5(x_1, x_2, x_5) = f_8(x_1, x_2) \mid f_9(x_2, x_5), \qquad f_6(x_1, x_3, x_5) = f_{10}(x_1, x_5) \mid x_3.$$

Функции f_7, f_8, f_9 и f_{10} можно задать матрицами

$$\mathbf{M}^1{}_7 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_7 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \mathbf{M}^1{}_8 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_8 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\mathbf{M}^1{}_9 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} - & 1 \\ 0 & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_9 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \mathbf{M}^1{}_{10} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_{10} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & - \\ - & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Значение функции f_7 не определено на наборе (0, 1), и она реализуется как $f_7 = \overline{x}_1 \mid x_3$. Для остальных функций справедливы следующие соотношения:

$$f_8 = x_1 \oplus x_2 = f_{11} \mid f_{12}, \qquad f_9 = x_2 \mid \overline{x}_5, \qquad f_{10} = x_1\, \overline{x}_5 = \overline{f}_{13},$$
$$f_{11} = x_1 \mid \overline{x}_2, \qquad f_{12} = \overline{x}_1 \mid x_2, \qquad f_{13} = x_1 \mid \overline{x}_5.$$

Таким образом, получена структура, представленная системой функций f, f_1, …, f_{13}. Соответствующая комбинационная схема из элементов И-НЕ, дополненная инверторами, изображена на рис. 1.

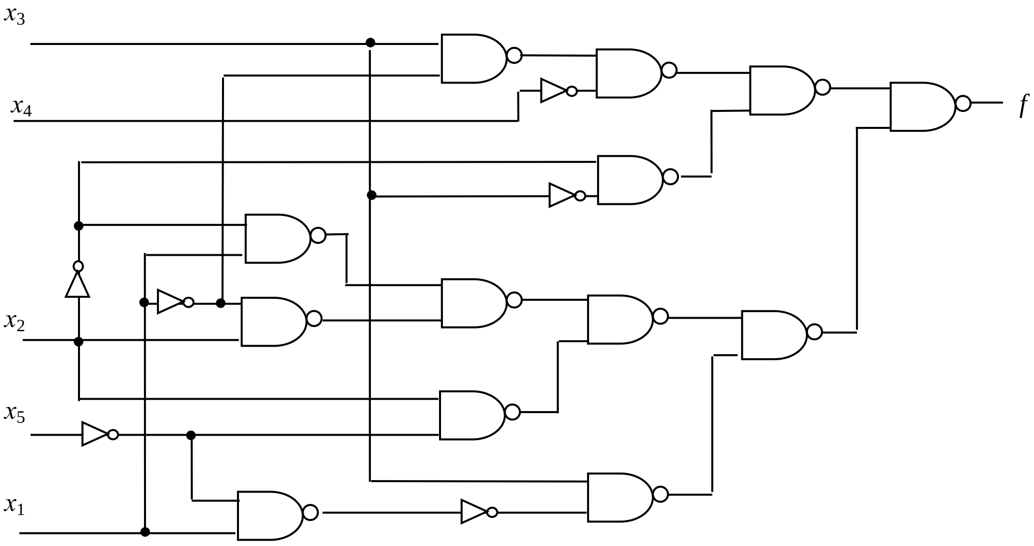

Рис. 1. Схема из элементов И-НЕ

Fig. 1. Circuit with NAND gates

Получим теперь комбинационную схему, реализующую ту же функцию в базисе элементов И и ИЛИ, с доступными инверсиями входных сигналов. Согласно таблице в бикликах $B_1 = (V_1^1, V_1^0)$ и $B_2 = (V_2^1, V_2^0)$, покрывающих граф G, $V_1^1 = V_2^1 = V^1$ для операции И и $V_1^0 = V_2^0 = V^0$ для операции ИЛИ. По матрице **G** можно заметить, что для лучшего варианта разложения $f = \varphi(g_1, g_2)$ желательно выбрать для функции φ операцию И, если у матрицы $\mathbf{M}^0$ больше строк, чем у матрицы $\mathbf{M}^1$, и наоборот, операцию ИЛИ, если у $\mathbf{M}^1$ строк больше, чем у $\mathbf{M}^0$. Лучшим считаем вариант, когда функции g_1 и g_2 имеют меньшее число существенных аргументов. Для выходной функции выбираем операцию ИЛИ ($f = f_1 \vee f_2$). Тогда звездные биклики, из которых надо выбрать пару биклик для начальных значений B_1 и B_2, имеют следующий вид:

$(\{v_1\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}) - x_3\,x_4$; $(\{v_2\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}) - x_1\,x_3$;
$(\{v_3\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}) - x_2\,x_4$; $(\{v_4\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}) - x_1\,x_2$;
$(\{v_5\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}) - x_2\,x_3\,x_5$; $(\{v_6\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}) - x_1\,x_2\,x_5$;
$(\{v_7\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}) - x_1\,x_3\,x_4$.

Такое множество звездных биклик совпадает с точностью до порядка задания долей с тем множеством, которое было получено на первом этапе реализации заданной функции в базисе И-НЕ. Тем же путем получаем $B_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_7\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\})$ с переменными x_1, x_2, x_3, x_4 и $B_2 = (\{v_4, v_5, v_6\}, \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\})$ с переменными x_1, x_2, x_3, x_5. Для разложения $f = f_1 \vee f_2$ имеем те же троичные матрицы с той лишь разницей, что $\mathbf{M}^1{}_i$ и $\mathbf{M}^0{}_i$ $(i = 1, 2)$ поменялись местами:

$$\mathbf{M}^1{}_1 = \begin{array}{c c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ 0 & - & 1 & - \\ - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_1 = \begin{array}{c c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \end{array}; \qquad \mathbf{M}^1{}_2 = \begin{array}{c c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - \\ - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_2 = \begin{array}{c c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array}.$$

Графы G_1 и G_2, соответствующие функциям f_1 и f_2, представлены матрицами

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_3 \vee x_4 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_1 \vee x_3 \\ x_4 & x_4 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & x_1 \\ x_5 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_5 & x_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}.$$

Для функций f_1 и f_2 получим разложения $f_1 = f_3 \vee f_4$ и $f_2 = f_5 \vee f_6$. Звездные биклики графов G_1 и G_2 имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} (\{v_1^1\}, \{v_5^1, v_6^1, v_7^1\}) - x_3\, x_4, & (\{v_1^2\}, \{v_5^2, v_6^2, v_7^2\}) - x_1\, x_2, \\ (\{v_2^1\}, \{v_5^1, v_6^1, v_7^1\}) - x_1\, x_3, & (\{v_2^2\}, \{v_5^2, v_6^2, v_7^2\}) - x_2\, x_3\, x_5, \\ (\{v_3^1\}, \{v_5^1, v_6^1, v_7^1\}) - x_2\, x_4, & (\{v_3^2\}, \{v_5^2, v_6^2, v_7^2\}) - x_1\, x_2\, x_5, \\ (\{v_4^1\}, \{v_5^1, v_6^1, v_7^1\}) - x_1\, x_3\, x_4. & \end{array}$$

Из этих звездных биклик получим пары (B_1^1, B_2^1) и (B_1^2, B_2^2), покрывающие соответственно графы G_1 и G_2:

$$\begin{array}{ll} B_1^1 = (\{v_1^1, v_3^1\}, \{v_5^1, v_6^1, v_7^1\}) - x_2\, x_3\, x_4, & B_1^2 = (\{v_1^2, v_3^2\}, \{v_5^2, v_6^2, v_7^2\}) - x_1\, x_2\, x_5, \\ B_2^1 = (\{v_2^1, v_4^1\}, \{v_5^1, v_6^1, v_7^1\}) - x_1\, x_3\, x_4; & B_2^2 = (\{v_2^2\}, \{v_5^2, v_6^2, v_7^2\}) - x_2\, x_3\, x_5. \end{array}$$

Не полностью определенные функции f_3, f_4, f_5 и f_6 представим в виде матриц

$$\mathbf{M}^1{}_3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}; \quad \mathbf{M}^1{}_4 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_4 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array};$$

$$\mathbf{M}^1{}_5 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_5 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & - & 0 \\ 1 & 0 & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}; \quad \mathbf{M}^1{}_6 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 1 \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_6 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 \\ 0 & - & - \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}.$$

Соответствующие функциям f_3, f_4, f_5 и f_6 графы G_3, G_4, G_4 и G_4 представлены матрицами

$$\mathbf{G}_3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_3 \vee x_4 & x_4 & x_3 \\ x_4 & x_4 & x_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{G}_4 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_3 & x_1 & x_1 \vee x_3 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{G}_5 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_5 & x_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}, \quad \mathbf{G}_6 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} x_5 & x_3 & x_2 \end{bmatrix} & 1 \end{array}.$$

Для реализации функций f_3, f_4, f_5 и f_6 выберем операцию И. Тогда звездные биклики графов G_3, G_4, G_5 и G_6 будут иметь следующий вид:

$$\begin{array}{llll} (\{v_1^3, v_2^3\}, \{v_3^3\}) - x_4, & (\{v_1^4, v_2^4\}, \{v_3^4\}) - x_1\, x_3, & (\{v_1^5, v_2^5\}, \{v_3^5\}) - x_1\, x_2, & (\{v_1^6\}, \{v_2^6\}) - x_5, \\ (\{v_1^3, v_2^3\}, \{v_4^3\}) - x_4, & (\{v_1^4, v_2^4\}, \{v_4^4\}) - x_1\, x_3, & (\{v_1^5, v_2^5\}, \{v_4^5\}) - x_1\, x_5, & (\{v_1^6\}, \{v_3^6\}) - x_3, \\ (\{v_1^3, v_2^3\}, \{v_5^3\}) - x_2\, x_3, & (\{v_1^4, v_2^4\}, \{v_5^4\}) - x_3\, x_4, & (\{v_1^5, v_2^5\}, \{v_5^5\}) - x_1\, x_2, & (\{v_1^6\}, \{v_4^6\}) - x_2. \end{array}$$

Покрытиями графов G_3, G_4, G_5 и G_6 будут пары

$$\begin{array}{ll} B_1^3 = (\{v_1^3, v_2^3\}, \{v_3^3, v_4^3\}) - x_4, & B_1^4 = (\{v_1^4, v_2^4\}, \{v_3^4, v_4^4\}) - x_1\, x_3, \\ B_2^3 = (\{v_1^3, v_2^3\}, \{v_5^3\}) - x_2\, x_3; & B_2^4 = (\{v_1^4, v_2^4\}, \{v_5^4\}) - x_3\, x_4; \end{array}$$

$$B_1^5 = (\{v_1^5, v_2^5\}, \{v_3^5, v_5^5\}) - x_1 x_2, \quad B_1^6 = (\{v_1^6\}, \{v_2^6, v_3^6\}) - x_3 x_5,$$
$$B_2^5 = (\{v_1^5, v_2^5\}, \{v_4^5\}) - x_1 x_5; \quad B_2^6 = (\{v_1^6\}, \{v_4^6\}) - x_2.$$

Приведенные пары биклик определяют разложения

$$f_3(x_2, x_3, x_4) = f_7(x_2, x_3) \wedge x_4, \qquad f_4(x_2, x_3, x_4) = f_8(x_1, x_3) \wedge f_9(x_3, x_4),$$
$$f_5(x_1, x_2, x_5) = f_{10}(x_1, x_2) \wedge f_{11}(x_1, x_5), \quad f_6(x_1, x_3, x_5) = f_{12}(x_3, x_5) \wedge x_2.$$

Для функций, составляющих разложения, матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{M}^1{}_7 = \begin{array}{c} x_2\ x_3 \\ \begin{bmatrix} - & 1 \\ 1 & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_7 = \begin{array}{c} x_2\ x_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad \mathbf{M}^1{}_8 = \begin{array}{c} x_1\ x_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_8 = \begin{array}{c} x_1\ x_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\mathbf{M}^1{}_9 = \begin{array}{c} x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & - \\ - & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_9 = \begin{array}{c} x_3\ x_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad \mathbf{M}^1{}_{10} = \begin{array}{c} x_1\ x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_{10} = \begin{array}{c} x_1\ x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\mathbf{M}^1{}_{11} = \begin{array}{c} x_1\ x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & - \\ - & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_{11} = \begin{array}{c} x_1\ x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad \mathbf{M}^1{}_{12} = \begin{array}{c} x_3\ x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}^0{}_{12} = \begin{array}{c} x_3\ x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

По этим матрицам получим алгебраические представления полностью определенных функций и реализации не полностью определенной функции f_{12}:

$$f_7 = x_2 \vee x_3, \qquad f_8 = x_1 \oplus x_3 = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3, \qquad f_9 = x_3 \vee \bar{x}_4,$$
$$f_{10} = x_1 \sim x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2, \qquad f_{11} = \bar{x}_1 \vee x_5, \qquad f_{12} = \bar{x}_3 \bar{x}_5.$$

Соответствующая комбинационная схема из элементов И и ИЛИ изображена на рис. 2.

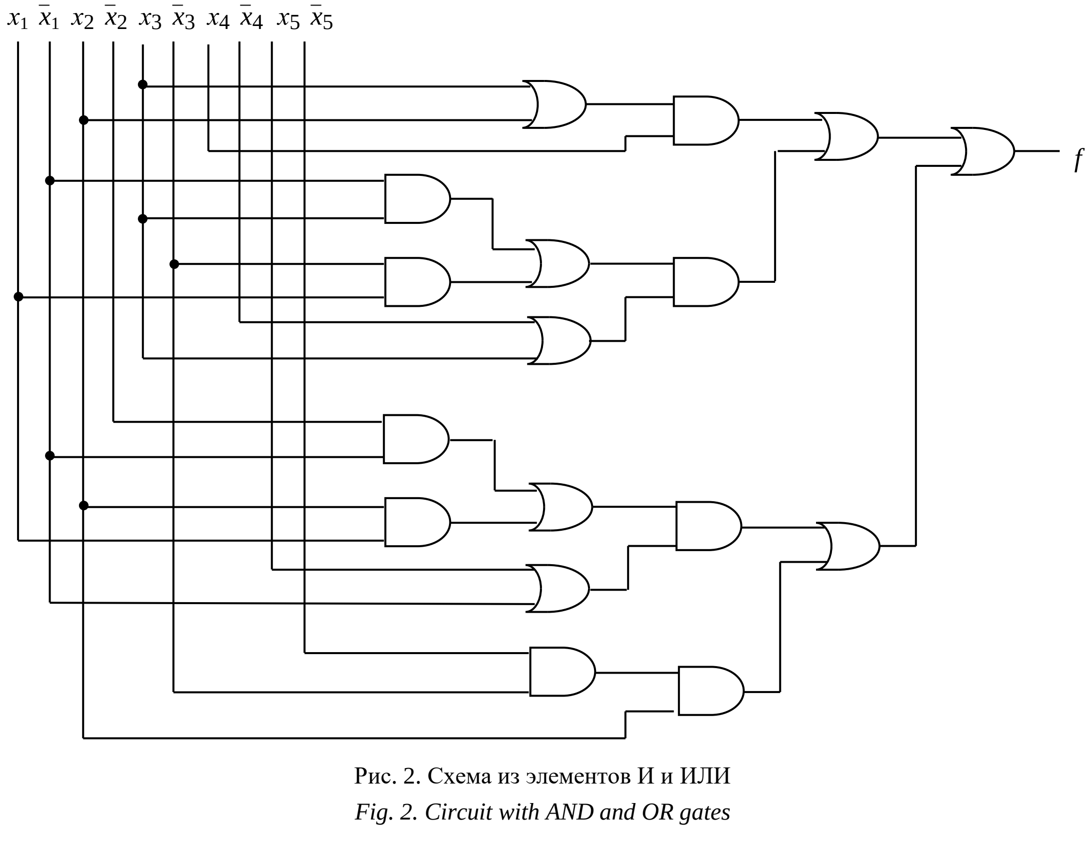

Рис. 2. Схема из элементов И и ИЛИ

Fig. 2. Circuit with AND and OR gates

Заключение. В статье показано, как можно применить метод алгебраической декомпозиции для синтеза комбинационных схем. Достоинством предложенного подхода является возможность получения схем с повышенным быстродействием, которое характеризуется числом уровней, или глубиной схемы. Представленный метод конкурентоспособен по отношению к факторизационному методу, описанному в работе [8]. Схема, реализующая систему булевых функций из примера в работе [8] и полученная описанным выше методом, содержит на единицу больше элементов, чем схема, полученная факторизационным методом при использовании двухвходовых элементов, но имеет на единицу меньше уровней. Для совместной реализации булевых функций из заданной системы должно быть предусмотрено выявление совпадения получаемых функций на каждом уровне декомпозиции.

Список использованных источников

1. Cortadella, J. Timing-driven logic bi-decomposition / J. Cortadella // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2003. – Vol. 22, no. 6. – P. 675–685.

2. Mishchenko, A. An algorithm for bi-decomposition of logic functions / A. Mishchenko, B. Steinbach, M. Perkowski // Proc. of the 38th Annual Design Automation Conf. (DAC'2001), Las Vegas, USA, 18–22 June 2001. – Las Vegas, 2001. – P. 103–108.

3. Chang, S.-C. Technology mapping for TLU FPGA's based on decomposition of binary decision diagrams / S.-C. Chang, M. Marek-Sadowska, T. Hwang // IEEE Transactions Computer-Aided Design. – 1996. – Vol. 15, no. 10. – P. 1226–1235.

4. Бибило, П. Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 211 с.

5. Zakrevskij, A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions / A. D. Zakrevskij // Second Intern. Conf. on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD'97), Minsk, Belarus, 12–14 Nov. 1997 / National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics. – Minsk, 1997. – Vol. 1. – P. 36–41.

6. Поттосин, Ю. В. Эвристический метод алгебраической декомпозиции частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2020. – Т. 17, № 3. – С. 44–53.

7. Поттосин, Ю. В. Параллельно-последовательная декомпозиция системы частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков // Прикладная дискретная математика. – 2010. – № 4(10). – С. 55–63.

8. Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 592 с.

9. Евстигнеев, В. А. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании / В. А. Евстигнеев, В. Н. Касьянов. – Новосибирск : Наука, 1999. – 291 с.

References

1. Cortadella J. Timing-driven logic bi-decomposition. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2003, vol. 22, no. 6, pp. 675–685.

2. Mishchenko A., Steinbach B., Perkowski M. An algorithm for bi-decomposition of logic functions. *Proceedings of the 38th Annual Design Automation Conference (DAC'2001), Las Vegas, USA, 18–22 June 2001*. Las Vegas, 2001, pp. 103–108.

3. Chang S.-C., Marek-Sadowska M., Hwang T. Technology mapping for TLU FPGA's based on decomposition of binary decision diagrams. *IEEE Transactions Computer-Aided Design*, 1996, vol. 15, no. 10, pp. 1226–1235.

4. Bibilo P. N. Dekompozicija bulevyh funkcij na osnove reshenija logicheskih uravnenij. *Decomposition of Boolean Functions on the Base of Solving Logical Equations*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2009, 211 p. (In Russ.).

5. Zakrevskij A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions. *Second International Conference on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD'97), Minsk, Belarus, 12–14 November 1997*. National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics. Minsk, 1997, vol. 1, pp. 36–41.

6. Pottosin Yu. V. *A heuristic method for bi-decomposition of partial Boolean functions*. Informatika [*Informatics*], 2020, vol. 17, no. 3, pp. 44–53 (In Russ.).

7. Pottosin Yu. V., Shestakov E. A. *Series-parallel decomposition of a system of partial Boolean functions*. Prikladnaya diskretnaya matematika [*Applied Discrete Mathematics*], 2010, no. 4(10), pp. 55–63 (In Russ.).

8. Zakrevskij A. D., Pottosin Yu. V., Cheremisinova L. D. Logicheskie osnovy proektirovanija diskretnyh ustrojstv. *Logical Fundamentals of Discrete Devices Design*. Moscow, Fizmatlit, 2007, 592 p. (In Russ.).

9. Evstigneev V. A., Kas'janov V. N. Tolkovyj slovar' po teorii grafov v informatike i programmirovanii. *Explanatory Dictionary of Graph Theory Terminology in Informatics and Programming*. Novosibirsk, Nauka, 1999, 291 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Поттосин Юрий Васильевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: pott@newman.bas-net.by

Information about the author

Yuri V. Pottosin, Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: pott@newman.bas-net.by