Н.В. Михайлова
(Минск)

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФИЛОСОФСКОЙ ПРОБЛЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Специфика философии математики определяется тем, что, как часть философии науки, она занимается методологическими вопросами обоснования математики. Несмотря на все усилия, предпринятые математиками и философами XX века, проблема обоснования современной математики все еще далека от своего окончательного решения. Это определяет актуальность исследования сущности проблемы обоснования и необходимость использования принципиально новых концептуальных и методологических подходов к концепции обоснования математики. В статье акцентированное внимание уделено методологическому анализу актуальной философской проблемы обоснования математического анализа как основной дисциплины математического познания.

* * *

Теории современного математического анализа включают в себя проблемы и задачи вещественного, комплексного и функционального анализа, сложность которых реально отражается в содержательных контрпримерах в математическом анализе, используемых в проблемном обучении математике. Математический анализ непрерывно обогащается новыми фактами, поэтому математик и философ, академик Н.Н. Лузин считал, что задача преподавания математического анализа является труднейшей задачей науки и педагогики. Математический анализ – это общеобразовательная математическая дисциплина в классических и технических университетах, объектом изучения которой является та часть высшей математики, которая связана с основополагающими понятиями, действительного числа, функции, производной и интеграла. Преподавание математики для математиков и инженеров – методологически разные вещи, но «массовым образом преподается то, что студентам-нематематикам непонятно и в общем, не может быть понято (а математикам понятно и может быть понято»[1]. При общей трактовке математического анализа к нему относят также функциональный анализ, комплексный анализ и даже нестандартный анализ. Методологический прагматизм математического анализа задает в совокупности неявное проблемное поле исследований по концептуальному обоснованию высшей математики, которую в образовательных целях сузим к обоснованию отдельных аспектов математического анализа.

Но мы все еще привязаны к духовному прошлому и все еще

[1] Лифшиц Б.А. Математический анализ в техническом университете // Компьютерные инструменты в образовании. 2015. № 3. С. 32

обращаемся к великим мыслителям античности. Например, онтологические корни математического анализа восходят к атомистическим идеям античных исследователей. Следует также отметить роль методологии математики, которая стала формироваться с возникновением научного познания. Предметом методологии математики является изучение методов, средств и приемов, с помощью которых приобретается, а также обосновывается новое знание в математической науке. При философском анализе истории обоснования математического анализа можно указать на методологические трудности, которые были связаны с противоречиями абстрактных теорий, оперировавших логико-математическими представлениями о бесконечных множествах. Заметим, что математический анализ в узком смысле – это традиционное дифференциальное и интегральное исчисление, изучаемое во всех курсах высшей математики для инженерных и естественнонаучных специальностей, а математический анализ в широком смысле можно описать как совокупность математических дисциплин, представляющих развитие идей и методов дифференциального и интегрального исчисления. Заметим, что, вопреки широко распространенному мнению, «жесткая» формализация доказательства все же не является синонимом надежности и строгости математических рассуждений даже с философской точки зрения обоснования математического анализа для студентов технического университета. Но почему в проблеме обоснования такое пристальное внимание уделяется обоснованию именно математического анализа?

Авторитетный философ математики В.Я. Перминов очень убедительно объясняет: «В 30-х годах прошлого века П. Бернайс сформулировал некоторый критерий успешной или состоявшейся программы обоснования математики, который сводится к тому, что любая такая программа должна быть способной обосновать математический анализ. Смысл критерия ясен. Математический анализ – центральная дисциплина современной математики, являющаяся идейным истоком большинства существующих математических теорий и основой большей части приложений математики»[2]. По поводу актуальности обоснования математического анализа заметим, что усвоение разделов и направлений математического анализа для многих студентов сопряжено с определенными когнитивными трудностями, обусловленными современным опытом преподавания математики в школе без доказательств и тем более без соответствующего понимаемого обоснования. Заметим, что идеи математического анализа охватывают всю современную математику, начиная от абстрактных областей и до многих прикладных разделов, ориентированных на приложения математики. Но пока ни одна из известных программ обоснования теорий современной математики не удовлетворяет «критерию успешности Бернайса». Следует подчеркнуть, даже история становления математического анализа показывает, когда математический анализ стал мощным инструментом познания, то до конца XIX века работающие математики, удовлетворенные успехом этой математической

[2] Перминов В.Я. Проблема обоснования математики у А.Н. Колмогорова // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. С. 20.

науки, перестали уделять должное внимание философско-методологическому анализу обоснования математического познания, считая при этом математический анализ «самостоятельной философией».

Математический анализ в широком смысле – это хорошо развитые сейчас области современного математического знания, например такие, как вещественный, комплексный и функциональный анализ, обоснование которых непосредственно связано с вечной «проблемой бесконечного». В общеметодологическом плане обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных современных математических рассуждений и их доказательств. В таком контексте при исследовании проблемы обоснования современной математики следует ориентироваться на реальные и наиболее перспективные направления развития самой математики. Поэтому проблему обоснования современного математического анализа целесообразно обсуждать прежде всего с точки зрения методологического подхода, а именно в плане общих принципов математического познания, сочетающих разные стороны математической деятельности и различные формы рефлексии в философии математики, развитые философами, логиками и математиками. Методологический кризис в обосновании нового математического знания обусловлен ориентацией исследователей этой проблемы на постмодернистские теории в философии и социокультурные проблемы преподавания математики, а не на сущность изучаемого предмета. Но на протяжении уже долгого времени развитие методологии преподавания математического анализа сосредоточено вокруг проблемы ее логических основ последовательности изложения предметного содержания, в котором с учетом общих закономерностей восхождения от абстрактного к конкретному выделяются разные пространства.

На всех исторических этапах системная интерпретация аргументации математического знания при разных методологических подходах выступает в философском единстве, а один из них, в контексте проблемы обоснования математики, в определенный период даже становился главенствующим. Заметим, что многие математики в начале прошлого столетия «были убеждены в том, что работами Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса проблема обоснования анализа решена окончательно и бесповоротно, что проблемы иррационального числа, например, больше не существует … работы Вейля во всяком случае показывают, что вопрос этот еще спорный, что над проблемами числа и континуума еще много придется поработать»[3]. Трудности обоснования математического анализа связаны с совместимостью разных стратегий обоснования, поскольку наиболее известные направления обоснования ориентированы на различные задачи и цели математического исследования. Синтез известных направлений обоснования математики, который оказывается системно-методологической функцией, то есть либо системной организации теорий математики, либо их эффективного применения, что оборачивается задачей интеграции математики как науки. В

[3] Яновская С. Предисловие к русскому переводу // Вейль Г. О философии математики. 2-е изд. М.: Ком. Книга, 2005. С. 4–5.

этих условиях задание «жесткой» целевой функции обоснования математики нелогично, хотя критерий системной целостности дает определенность новой цели познания, так как он еще требует учета специфических особенностей различных направлений обоснования математического анализа.

Поэтому при обосновании многочисленных теорий математического анализа следует исходить не только из разных конкретных практических математических примеров, а еще из обоснования логико-гносеологического статуса математической теории в целом. Логико-гносеологический подход к проблеме обоснования связан со снятием неоправданных запретов на исходные принципы и логику редукции программ обоснования, выдвинутых в начале прошлого века, через рационализацию их гносеологических допущений. С гносеологической точки зрения причина кризиса теоретико-множественного обоснования математики заключается в следующих причинах. Во-первых, в некоторой абсолютизации возможной применимости методологических принципов теоретико-множественного мышления в математическом познании, а во-вторых, в крайней степени абстрагирования, на которой, по сути, основаны принципы теоретико-множественного способа мышления. Слабой стороной математического анализа XVIII века было отсутствие логического обоснования ее важнейших частей. Например, аппарат анализа бесконечно малых был развит без достаточной философско-методологической проработки его строгого логического обоснования, хотя он востребован при исследовании свойств мировоззренчески обоснованных различных классов функций и их новых комбинаций.

Теории математического анализа часто характеризуются тем, что в теоретической и практической математической деятельности приходится анализировать различные сложные функциональные зависимости, поэтому математический анализ, изучающий такого рода зависимости, представляет сейчас наиболее важный раздел современной математики. С точки зрения математического познания проблемно ориентированное обоснование математического анализа включает в себя несколько аспектов: во-первых, доведение математических теорий до принятого современного уровня строгости; во-вторых, полноценная аргументация существования новых математических объектов; в-третьих, учет саморазвития математических теорий при решении конкретных задач и избавления их от возможных противоречий[4]. Отметим, например, что математический анализ практически и теоретически реально опирается на теорию действительных чисел, изучение которых привело высшую математику к рассмотрению различных бесконечных множеств. Кроме того, с помощью понятия предела наконец получили объяснение такие важнейшие понятия математического анализа, как сходимость, производная, интеграл, непрерывность, сумма ряда и многое другое. Заметим, что уже при становлении теорий математического анализа стало проявляться внутренне присущее ему специфическое противоречие между способностью получать практически важные прикладные результаты

[4] Михайлова Н.В. Проблемно-ориентированное обоснование современного математического анализа // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4. С. 53–59.

и философскими трудностями объяснения или обоснования новых понятий и применяемых методов в разделах прикладной математики.

Иногда складывалось впечатление, что онтологический и логико-гносеологический подходы к обоснованию математики переплетаются, хотя в современной математике отдельные онтологические и гносеологические основания, необходимые для целостного обоснования, вообще говоря, не совместимы. Поэтому для анализа сущности обоснования необходимо уточнение отличия гносеологии от онтологии, состоящего в том, что онтология математики пытается ответить на вопрос, какие математические объекты допустимо рассматривать в математических рассуждениях, а гносеология математики – ответить на вопрос о том, как они появились, а также какие именно действия и операции с ними допустимы. Поэтому методология математического познания не может быть концептуально свободной от соответствующего онтологического и гносеологического содержания. Онтологический аспект специфики математики проявляется в том, что в ее абстрактных структурах содержатся базисные интуиции математического познания, которые затем синтезируются в составе математических теорий и структур математики, а самоочевидность исходных математических представлений – это признак онтологической значимости этих представлений. С критически-рефлексивной точки зрения философии математического образования, проблема обоснования, например, такого фундаментального раздела современной математики, как математический анализ и его направления – функционального анализа состоит в нахождении необходимых условий его признания прежде всего в математическом сообществе, а затем, естественно, и в образовательной среде.

Но среди методологических проблем математического образования главным остается вопрос качества обоснования теорий, вопрос о том, как можно точно определить такое качество. Но прежде чем попытаться решить проблему повышения качества обоснования математического анализа в техническом университете, необходимо осмыслить само «качество» как философскую категорию. «Если в качестве области, подлежащей обоснованию, мы выберем раздел математики, то внешнее рассмотрение может быть начато с определения областей его приложения в естествознании, технике и других сферах»[5]. Такой подход к обоснованию с точки зрения образования отражает тот исторический факт, что естественнонаучные и технические науки никогда не оспаривали роль математики. Математическое доказательство считается надежным, если в нем отсутствуют контрпримеры, обилием которых славятся утверждения и теоремы математического анализа, и называется строгим, если оно не содержит в себе неявных математических предпосылок, вообще говоря, не оговоренных ранее, то есть строгость характеризует математический анализ его с формальной стороны, а также с точки зрения корректности определений и полноты посылок. Тогда проблема обоснования теорий математического

[5] Арепьев Е.И., Мороз В.В. К вопросу о возможности унификации процедуры обоснования научных областей: поиск сущностных оснований математики // Вестник Челябинского гос. ун-та. 2018. № 11. С. 66.

анализа, например, востребованной теории обобщенных функций, сводится к анализу следующих двух вопросов: обоснованию строгости новой математической теории и законченности математических доказательств, а также к обоснованию непротиворечивости математических теорий, гарантирующих надежность содержательных теорий, которые составляют фундамент математического знания.

При раскрытии концептуальных различий отдельных программ обоснования в философии математики, в известной мере абстрагируясь от указанных формальных структур, приходится иногда переносить акценты на концептуальный и методологический инструментарий. Это придает особый статус вопросам теории познания, поскольку в логико-гносеологическом плане обоснование математики – это те фундаментальные принципы и идеи, которые направляют общий ход научного поиска. Понятие обоснованности является более широким по объему, так как оно охватывает не только доказательные, но и правдоподобные или вероятностные математические рассуждения. Поэтому необходимость проблемно ориентированного синтеза в обосновании обусловлена: во-первых, утратой целостности структуры обоснования; во-вторых, появлением новых когнитивных форм математики; в-третьих, экспликацией единства математического знания. Можно даже утверждать, что в общеметодологическом плане системно-методологическое обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность как классических, так и связанных с ними сравнительно новых современных математических теорий и доказательств.

Целью обучения математическому анализу в любом техническом университете является формирование у студентов умения осмысливать сущность математических понятий и утверждений, а также понимать логику рассуждений и использование полученных математических знаний для поиска решения прикладных задач. В математическом анализе главную методологическую роль с точки зрения его обоснования играет понятие предела. «Теория пределов является одной из самых трудных для усвоения студентами и организации изучения разделов анализа. Это связано с тем, что эта теория обладает высокой степенью абстракции, новизной понятия, символики и приемов рассуждения»[6]. Важнейший вопрос касается методологии понятия «предельный переход» как способа существования математических объектов, получаемых с его помощью. В частности, на рубеже XIX–XX веков уже возникает концептуально новый способ методологического анализа, базирующийся на основе системного подхода к математическому знанию, отличающийся от предыдущих тем, что упор в нем делается на явные методы конструирования новых теоретических систем. Аргументировать необходимость системной методологии или системно-методологического подхода к проблеме обоснования математики можно следующим образом. Основу системной методологии в обосновании математических теорий составляют особые факторы, с помощью которых

---

[6] Браславская Н.Б., Прохорова А.В. Операция предельного перехода и ее роль в развитии интеллекта студентов технических вузов // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2008. № 29. С. 23.

выявляются связи общей структуры построения системы как целого и системы как взаимоотношения составляющих ее элементов.

В связи с этим нельзя не отметить, что теоремы Гёделя о неполноте привели в 30-е годы прошлого века к первому методологическому кризису, а начиная со второй половины XX века в современной математике произошли еще два кризиса, столь же непредсказуемые, как и кризис, вызванный гёделевскими результатами. Например, новые методологические проблемы математического анализа связаны с проблемой переусложненности. Одна из них состоит в том, что доказательства стали настолько длинными и сложными, что никто не берет на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность, а вторая связана с обоснованностью применения компьютеров в новых «необозримых» математических доказательствах. В философской и математической, а тем более в педагогической литературе эти проблемы пока еще детально даже не обсуждались. Такое положение дел в современной математической образовательной практике настоятельно требует специального методологического анализа. Во-первых, несмотря на устойчивость математических теорем, математика оказалась не такой строгой наукой. Во-вторых, методологически значимым для современной математики является вопрос о правомерности применения компьютерных методов, используемых для доказательства. В-третьих, обозримость математических доказательств с необходимостью связывается с их проверяемостью и убедительностью, то есть возможностью их мысленной репрезентации и в проблеме схватывании структуры доказательства целиком.

Преподавание математического анализа для математиков и будущих инженеров с внедрением компьютерных технологий должно методически отличаться. В частности, «необходимо менять методику чтения лекций по математическому анализу, делая акцент не на углубленном изучении методов вычислений интегралов и детальном доказательстве теорем и фактов, а на практически ориентированном обосновании появления идеи интегрального исчисления в математическом анализе на основе моделирования реальных процессов»[7]. Кроме того, не все в порядке с «логической стройностью» и обоснованностью математического знания в предназначенных для студентов-нематематиков из технических университетов учебников и учебных пособий по высшей математике. Сказанное особенно актуально, в том числе и с точки зрения методологии преподавания математического анализа, для студентов технического университета. Раздел математического анализа, в силу своей методологической глубины, эксплицирует основные понятия курса высшей математики для студентов технических университетов. Методологическая составляющая системно-методологического подхода к обоснованию теорий математического анализа состоит в когнитивном исследовании методологии математического познания, соотношения между методами познания и в определении сферы их эффективной применимости. Можно предположить, что философская составляющая обоснования теорий математического

[7] Гавриков А.И. Применение основной идеи интегрального исчисления на лекциях по математическому анализу в техническом вузе // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2016. № 3. С. 6.

анализа как эволюционирующих систем специального вида тоже требует системного подхода для их вполне адекватного анализа.

При философском анализе обоснования направлений развития математического анализа всегда возникает постоянная методологическая необходимость подтверждения надежности математических теорий на новых более высоких уровнях строгости. Концептуальное развитие обоснования теорий математического анализа на основе методологического анализа связано с таким пониманием доминирующего статуса математических моделей реальности, которое снимает в рамках математических критериев неоправданные ограничения на реализацию программы обоснования. Аргументация целостности концепции обоснования теорий математического анализа должна также вскрывать внутренние закономерности и процессы, обусловливающие ее качественное своеобразие. С точки зрения сущности обоснования современной математики, именно системно-методологический подход представляет собой философски развернутый процесс восхождения от теоретического к практически реализуемому обоснованию. Для решения этой педагогической задачи необходимо рассмотреть философские аспекты различия между системными понятиями целого и целостности. С одной стороны, целое – это совокупность «сильно» взаимодействующих частей, в котором смысл понятия «часть» определяется также присущим системе взаимодействием. С другой стороны, системы, обладающие свойством целостности, рассматриваются как единый объект, а взаимосвязи частей бывают настолько сильны, что они не всегда могут рассматриваться как локализованные взаимодействия, с учетом того, что критическое мышление расширяет любые границы познания, тем самым позволяя выйти за пределы опыта непосредственных математических ощущений.

Следует признать, что проблема обоснования математического анализа и проблема развития математического знания в определенном смысле обособлены, как и соотношение оснований математики и философско-мировоззренческого осмысления ее обоснования. Основная трудность обоснования математического анализа заключена в отсутствии однозначного восприятия самого понятия «обоснование», что предполагает также когнитивный релятивизм в обосновании, поскольку с образовательной точки зрения проблема обоснования математики фактически обособлена от проблемы развития математического знания. Практически сущность методологического анализа актуальной философской проблемы обоснования результативных направлений в современных теориях математического и функционального анализа состоит в нахождении аргументов столь же значимых для других, как и для математиков. Кроме того, по существу, «методологическое противоречие» заключается в том, что основания математического знания принимаются как выверенные и очевидные. Поэтому при преподавании математического анализа студентам-инженерам целесообразно помнить еще и о различии правильного рассуждения и его обоснованности в том онтодидактическом смысле, что рассуждение может быть правильным и даже доказательным по формальным признакам, но необоснованным по содержанию. Уместно также заметить, что даже любой перечень новых методов математического доказательства, включая использование современных компьютерных технологий, и принципов построения математических объектов всегда остается и должен оставаться неполным, так как сформированные методы и принципы в силу развития математического знания подлежат пересмотру и уточнению.

При становлении новых направлений математического анализа стало проявляться внутренне присущее им некоторое специфическое противоречие между способностью получать конкретные практически важные результаты и философскими трудностями аргументации или обоснования их новых понятий и применяемых методов. Объектом философско-методологического интереса в осознании когнитивных трудностей математического познания остается различие между критически-рефлексивным мышлением и процессом понимания теорий в университетском курсе математического анализа. Проведенный в таком контексте анализ сущности методологической проблемы обоснования математического анализа, с помощью специального проблемно ориентированного подхода, по сути, практически способствует видоизменению традиционных общих образовательных взглядов на системное обоснование высшей математики. Это связано также с тем, что математический анализ как центральная дисциплина математического образования студентов технического университета в настоящее время превратился в разветвленную систему разных по содержанию прикладных математических направлений и специальных дисциплин.

В заключение можно сказать, что методологический сдвиг в решении проблемы обоснования современного математического анализа зависит не только от достижений в математической логике и анализе аксиоматических систем, а также от понимания общих проблем философии математики и от расширения допустимых когнитивно-методологических подходов к обоснованию математических теорий. Многообразие направлений, которые можно использовать в обосновании, выдвигает новую философскую проблему синтеза, что ставит системную методологию познания, по существу, в проблемно ориентированную философскую ситуацию.