ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО КРАЕВОГО УСЛОВИЯ В СТЕРЖНЕВОМ ТЕЧЕНИИ

С.С. Каянович

Рассмотрим задачу (1)–(6) [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_1}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_1},\quad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0,\quad (x,t)\in\Omega_{iT},\ \ i=1,2,\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}=0,\quad (x,t)\in\Omega'_T, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0,\quad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T, \tag{3}$$

$$u_1\left|_{t=0}\right.=\bar{b}(x),\ x\in\bar{\Omega},\quad u_1\left|_{\tilde{S}_T}\right.=\tilde{\psi}_1(s,t),\ (s,t)\in\tilde{S}_T,\quad u_2\Big|_{S\bigcup T}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\bigg|_{S'_{1T}}=-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\bigg|_{S'_{1T}},\quad u_2|_{S'_{2T}}=-\int\limits_{H}^{H-\varepsilon_1}\frac{\partial u_1(x_1,z,t)}{\partial x_1}\,dz, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\left|_{\tilde{S}_T}\right.=\zeta(s)\sum_{j=1}^{2}\omega_j(s,t)\cos\alpha_j,\ \ \omega_i=\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_i}{\partial t},\ \ i=1,2,\ \ (s,t)\in\tilde{S}_T, \tag{6}$$

где $\dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}}\left|_{\tilde{S}_T}\right.$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внешней нормали к поверхности $\tilde{S}_T$. Все обозначения в (1)–(6) содержатся в [1]. В работах [1, 2] доказано, что система уравнений стержневого течения имеет единственное решение при любом $t=t_m=m\tau$ (при достаточно малом τ), причём $u_{1,m}\in C_{l,\alpha}\Big(\bar{\tilde{\Omega}}_m\Big)$, $p\in C_{l-1,\alpha}\Big(\bar{\tilde{\Omega}}_m\Big)$. Встаёт вопрос о численном нахождении решения. Для этого будет применён метод конечных разностей, при котором задача (1)–(6) заменяется разностной задачей, её аппроксимирующей. Порядок точности разностной задачи совпадает с порядком аппроксимации [3] (обозначения теории разностных схем см. в [3]).

Разностная схема для задачи (1), (4) на равномерной по шагам h, τ сетке рассматривалась в [4]. Поэтому сразу переходим к уравнению (3) и условиям (6). Уравнение (3) содержит частные производные, аналогичные производным из (1), поэтому их аппроксимация будет аналогичной. Остановимся на описании в разностном виде условий (6). Учитывая нулевые условия для функций u_1 и u_2 на частях границы

$$l_1\cup l_2\colon\Big[\frac{\delta}{2}\leqslant x_1\leqslant L-\frac{\delta}{2};x_2=0\cup x_2=H\Big],$$

взятых при значении $t = t_m$, а также определение срезающей функции $\zeta(x)$, замечаем, что левее прямой $x_1 = \dfrac{\delta}{2}$ и правее прямой $x_1 = L - \dfrac{\delta}{2}$ условия для нормальной производной $\dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}}|_{l_i}$, $i = 1, 2$, обращаются в нуль (см. [1]). На частях же $l_1 \cup l_2$ ненулевым остаётся только слагаемое $\nu \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$. При этом, например, на l_1 условие

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\bigg|_{l_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$

можно взять в виде $\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = 0$ (см. [5], а также [6], гл. IV, § 39).

Займёмся аппроксимацией краевого условия $\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = 0$. Далее применяем обозначения $p(x_1, x_2, t_m) = p(x_2)$, т.е. зависимость от переменных x_1 и t явно не указываем, $\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\bigg|_{l_1} = p'_{x_2}$, для разностной производной используем обозначение p_{x_2} (штрих отсутствует). Производную $p'_{x_2}(0)$ заменяем правой разностной производной $y_{x_2}(0) = \dfrac{y(h) - y(0)}{h}$ и краевое условие при $x_2 = 0$ напишем в виде $y_{x_2}(0) = 0$ (y есть сеточная функция для функции p). Для погрешности $z = y - p$ получаем $z_{x_2}(0) = y_{x_2}(0) - p_{x_2}(0)$. Разлагая $p(x_2)$ в окрестности узла $x_2 = 0$ по формуле Тейлора: $p(h) = p(0) + hp'(0) + 0,5h^2 p''(0) + O(h^3)$, находим

$$p_{x_2}(0) = p'(0) + 0,5hp''(0) + O(h^2) \tag{7}$$

(производные функции p есть производные по переменной x_2). Видим, что погрешность аппроксимации для краевого условия есть $O(h)$. Подправим условие $y_{x_2}(0) = 0$ так, чтобы порядок аппроксимации составлял $O(h^2)$, используя тот факт, что $p(x_2)$ есть решение исходной задачи (3), (6) (см. [3]). Выразим из уравнения (3) $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(0) = p''_{x_2 x_2}(0)$:

$$p''_{x_2 x_2}(0) = -p''_{x_1 x_1}(0).$$

Подставляя это $p''_{x_2 x_2}(0)$ в (7), получим

$$p_{x_2}(0) + 0,5hp''_{x_1 x_1}(0) = p'(0) + O(h^2), \tag{8}$$

т.е. выражение в левой части (8) аппроксимирует $p'(x_2)$ в точке $x_2 = 0$ на решении (3) со 2-м порядком. Подправив краевое условие, получим 2-ой порядок аппроксимации.

Для дальнейшего заметим, что непосредственно к стенке $x_2 = 0$ прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется по линейному закону ([6], гл. IV, § 42). Следовательно, справедливо считать, что в реальном течении $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0$ (при $x_2 = 0$). Далее замечаем, что, в силу (1), при $x_2 = 0$ имеем равенство

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},$$

т.е. $p'_{x_1}(0) = 0$, $\dfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \dfrac{\delta}{2}$. Отсюда следует, что $p''_{x_1 x_1}(0) = 0$, т.е. само условие $y_{x_2}(0) = 0$ имеет второй порядок аппроксимации на решении уравнения (3) (см. [3]).

Литература

1. Каянович С. С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С. С. *О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения* // Тезисы докл. XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017». Ч. 2. Мн., 2017. С. 10–11.

3. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем.* / М.: Наука, 1971.

4. Каянович С. С. *Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье–Стокса* // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 2. С. 36–40.

5. Каянович С. С. *Стержневое течение вязкой жидкости* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-техн. навук. 2013. № 3. С 32–35.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* / М.: Наука, 1988.