УДК 517.977

С. И. Сиротко, А. В. Пашук
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

К УСЛОВИЯМ РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Условия регулярности играют важную роль в исследовании задач математического программирования, поскольку гарантируют выполнение необходимых условий оптимальности Каруша – Куна – Таккера. Несмотря на сравнительную эффективность известных условий регулярности, существуют достаточно широкие классы задач оптимизации, в которых эти условия не выполняются. С другой стороны, можно указать иные более слабые условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий Каруша – Куна – Таккера. Одним из таких условий является ослабленное условие постоянной положительно линейной зависимости (RCPLD). В данной заметке предлагается модификация RCPLD, позволяющая ослабить требования к ограничениям задачи математического программирования. Также в заметке доказываются достаточные условия R-регулярности (error bound property).

Ключевые слова: условия регулярности, оптимизация, множители Лагранжа.

Для цитирования: Сиротко С. И., Пашук А. В. К условиям регулярности в задачах математического программирования // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (254). С. 10–14.

S. I. Sirotko, A. V. Pashuk
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

ON CONSTRAINT QUALIFICATIONS IN MATHEMATICAL PROGRAMMING

Constraint qualifications play an important role in investigation of mathematical programs since they guarantee the validity of the Karush – Kuhn – Tucker necessary optimality conditions. In spite of effectivity of known constraint qualifications there are vast classes of optimization problems in which these conditions are not fulfilled. On the other hand one can point other weaker constraint qualifications which provide the validity of Karush – Kuhn – Tucker conditions. One of such CQs is the relaxed constant positive linear dependence constraint qualification (RCPLD). In this article we propose a modification of RCPLD which allows to weaken the requirements to constraint in mathematical programs. We also prove sufficient conditions of error bound property.

Key words: constraint qualifications, optimization, Lagrange multipliers.

For citation: Sirotko S. I., Pashuk A. V. On constraint qualifications in mathematical programming. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, no. 1 (254), pp. 10–14 (In Russian).

Введение. Пусть f и h_i $i = 1, \ldots, p$ – непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R. Рассмотрим задачу математического программирования

$$f(y) \to \min, y \in C$$

с непустым множеством допустимых точек

$$C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \ \ i \in I, \ \ h_i(y) = 0 \ \ i \in I_0\},$$

где $I = \{1, \ldots, s\}$, $I_0 = \{s + 1, \ldots, p\}$.

Основным необходимым условием оптимальности в задачах математического программирования является условие Каруша – Куна – Таккера (ККТ) [1]. Однако ККТ справедливо лишь при наличии условий регулярности ограничений задачи.

Наиболее известным из условий регулярности является условие Мангасаряна – Фромовица (MFCQ) [2]. В литературе известны также более слабые условия регулярности, имеющие отличный от MFCQ характер. К таким условиям, в частности, относится ослабленное условие положительно-линейной зависимости (RCPLD) [3].

Важную роль в построения численных алгоритмов решения задачи оптимизации, в анализе их сходимости, в анализе устойчивости и чувствительности решений играет условие R-регулярности (error bound property) [4–7]. В данной публикации предлагается новая модификация условия RCPLD с более слабыми требованиями к ограничениям и новое достаточное условие R-регулярности.

Основные определения и вспомогательные утверждения. Обозначим $|y|$ евклидову норму вектора y и положим

$$d_C(y) = \inf_{v \in C} |v - y|.$$

Через $I(y)$ обозначим множество активных в точке $y \in C$ индексов из I.

Определение 1. Множество C будем называть *R-регулярным в точке* $y^0 \in C$, если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y^0)$ такие, что

$$d_C(y) \le \alpha \max\{0,\ h_i(y)\ \ i \in I,\ |h_i(y)|\ \ i \in I_0\}$$

для всех $y \in V(y^0)$.

Множество

$$\Gamma_C(y) = \{\ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle \le 0\ \ i \in I(y)\ \ \langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle = 0\ \ i \in I_0\}$$

будем называть линеаризованным касательным конусом к множеству C в точке $y \in C$.

Следуя источникам [8, 9], введем множество $I^a(y)$ всех существенно активных индексов из $I(y)$, т. е. таких, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}\rangle = 0$ для любого $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$.

Лемма 1 [9]. Пусть $y^0 \in C$. Тогда существует вектор $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}\rangle = 0 \text{ для всех } i \in I_0 \cup I^a(y^0);$$

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}\rangle < 0 \text{ для всех } i \in I(y^0) \setminus I^a(y^0).$$

Lemma 2 [9]. Пусть $y^0 \in C$. Тогда

$$I^a(y_0) = \{i \in I(y^0) \mid \exists\, \lambda \in \Lambda_0(y^0) \text{ такой, что } \lambda_i > 0\},$$

где

$$\Lambda_0(y^0) = \Big\{\lambda \in R^p \Big| \sum_{i \in I_0 \cup} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0,\ \lambda_i \ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y^0) = 0\ \ i \in I\Big\}.$$

Нам нужна также следующая лемма Каратеодори.

Lemma 3 [3]. Пусть

$$0 \ne y = \sum_{i \in J} \alpha_i v^i + \sum_{i \in K} \alpha_i v^i$$

для всех $i \in K$, где векторы $\{v^i\ i \in J\}$ линейно независимы. Тогда существуют множество $S \subset K$ и числа $\beta_i\ \ i \in J \cup S$ такие, что векторы $\{v^i\ i \in J \cup S\}$ линейно независимы, и

$$y = \sum_{i \in J} \beta_i v^i + \sum_{i \in S} \beta_i v^i,$$

где $\alpha_i\, \beta_i > 0$ при всех $i \in S$.

Пусть $S_0 \subset I_0$, $S \subset I$. Система векторов

$$\{\nabla h_i(y)\ \ i \in S_0 \cup S\}$$

называется положительно-линейно зависимой, если найдутся не все равные нулю числа $\{\lambda_i\ \ i \in S_0 \cup S\}$ такие, что $\lambda_i \ge 0$ для $i \in S$ и

$$\sum_{i \in S_0 \cup S} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0.$$

Определение 2. Пусть множество $I_{00} \subset I_0$ такое, что $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_{00}\}$ является базисом системы векторов $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_0\}$. Точка $y^0 \in C$ удовлетворяет условию RCPLD, если найдется окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такая, что:

1) ранг системы $\{\nabla h_i(y)\ \ i \in I_0\}$ один и тот же для любого $y \in V(y^0)$;

2) при любом $K \subset I(y^0)\ K \subset I(y^0)$, если система векторов $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_{00} \cup K\}$ положительно-линейно зависима, то $\{\nabla h_i(y)\ \ i \in I_{00} \cup K\}$ является линейно зависимой при всех $y \in V(y^0)$.

Следующее определение мотивировано определением RCPLD [3], рассматривающим положительно-линейно зависимые системы.

Определение 3. Пусть для множества $I_{00} \subset I_0$ векторная система $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_{00}\}$ является базисом системы $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_0\}$. Будем говорить, что точка $y^0 \in C$ удовлетворяет условию положительно-линейной зависимости (PLD), если найдется окрестность $V(y^0)$ такая, что

1) $\{\nabla h_i(y)\ \ i \in I_0\}$ имеет одинаковый ранг для всех $y \in V(y^0)$;

2) для любого $K \subset I^a(y^0)$, если система $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_{00} \cup K\}$ положительно-линейно зависима, то система $\{\nabla h_i(y)\ \ i \in I_{00} \cup K\}$ линейно зависима для всех $y^0 \in V(y^0)$.

Будем говорить, что точка $y^0 \in C$ удовлетворяет условию положительно-линейной зависимости на множестве C (PLD_C), если оба требования определения PLD выполняются для всех $y \in V(y^0) \cap C$.

Основная часть. Рассмотрим задачу

$$(\text{P}): f(y) \to \min,\ y \in C,$$

и докажем, что PLD является условием регулярности.

Определение 4. Следуя источнику [3], будем говорить, что точка $y^0 \in C$ удовлетворяет аппроксимативному условию Каруша – Куна – Таккера (AKKT) в задаче (P), если существуют последовательности $y^k \to y^0$, $\lambda_i^k \in R\ \ i \in I_0$, $\lambda_i^k \ge 0\ \ i \in I$ такие, что

$$\nabla f(y^k) + \sum_{i \in I_0} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in I(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) \to 0.$$

Известно (см. [3]), что любое решение задачи (P) удовлетворяет AKKT.

Теорема 1. Пусть y^0 является решением задачи (P). Если y^0 удовлетворяет условию PLD, то KKT выполняется в данной точке.

Доказательство. Из определения AKKT следует существование последовательностей $y^k \to y^0$, $\lambda_i^k \in R\ \ i \in I_0$, $\lambda_i^k \ge 0\ \ i \in I$, для которых

$$-\nabla f(y^k) - \sum_{i \in I(y^0) \setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) - \varepsilon_k =$$

$$= \sum_{i \in I_0} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in I^a(y^0) \cap K} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \qquad (1)$$

где $\varepsilon_k \to 0$.

Пусть векторная система $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_{00}\}$ является базисом системы $\{\nabla h_i(y^0)\ \ i \in I_{00}\}$. Тогда из формулы (1) следует

$$-\nabla f(y^k) - \sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) - \varepsilon_k =$$
$$= \sum_{i\in I_{00}} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i\in I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \qquad (2)$$

где $\lambda_i^k \geq 0 \ \ i\in I(y^0)$, $\alpha_i^k \in R \ \ i\in I_{00}$.

1) Предположим, что

$$-\nabla f(y^k) + \sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) - \varepsilon_k \neq 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$, начиная с некоторого k_0.

В соответствии с леммой 3 для любого k найдется множество $J(k) \subset I^a(y^0)$, при котором

$$-\nabla f(y^k) - \sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) - \varepsilon_k =$$
$$= \sum_{i\in I_{00}} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i\in J(k)} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k), \qquad (3)$$

где $\alpha_i^k \geq 0 \ \ i\in J(k)$ и векторы $\{\nabla h_i(y^k) \ \ i\in I_{00} \cup J(k)\}$ линейно независимы.

Ввиду конечности индексного множества I можно, не ограничивая общности, считать, что $J(k)$ одно и то же при всех k, т. е. $J(k) = J$.

Пусть

$$M_k = \max\{\lambda_i^k \ \ i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0);$$
$$\alpha_i^k \ \ i\in J, |\alpha_i^k| \ \ i\in I_{00}\} \to \infty.$$

Тогда, разделив (3) на M_k и перейдя к пределу, получим

$$\sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) + \sum_{i\in I_{00}} \lambda_i \nabla h_i(y^0) +$$
$$+ \sum_{i\in J} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \qquad (4)$$

где не все λ_i равны нулю.

Пусть $\bar{y}$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда

$$\sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i \left\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \right\rangle = 0,$$

где $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0$ для всех $i \in I(y^0)\setminus I^a(y^0)$.

Отсюда $\lambda_i = 0$ при $i \in I(y^0)\setminus I^a(y^0)$, и из равенства (4) следует

$$\sum_{i\in I_{00}} \lambda_i \nabla h_i(y^0) + \sum_{i\in j} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0,$$

т. е. векторы $\{\nabla h_i(y^0) \ \ i\in I_{00} \cup J\}$ линейно зависимы, что противоречит условию PLD.

Следовательно, существует ограниченная подпоследовательность в $\{M_k\}$ (для простоты обозначим ее также $\{M_k\}$), и без потери общности можно считать

$$\lambda_i^k \to \lambda_i \geq 0 \ \ i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0);$$
$$\alpha_i^k \to \lambda_i \geq 0 \ \ i\in J;$$
$$\alpha_i^k \to \lambda_i \in R \ \ i\in I_{00}.$$

Тогда предел в формуле (3) дает

$$\nabla f(y^k) + \sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) +$$
$$+ \sum_{i\in I_{00}} \lambda_i \nabla h_i(y^0) + \sum_{i\in J} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0,$$

т. е. ККТ выполняется в точке y^0.

2) Предположим, что

$$-\nabla f(y^k) - \sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) - \varepsilon_k = 0 \qquad (5)$$

при бесконечно большом наборе k (для простоты при всех k). Тогда, если $\{\lambda_i^k\}$ ограниченна, то без потери общности можно принять $\lambda_i^k \to \lambda_i \geq 0$ и, значит,

$$\nabla f(y^0) + \sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0.$$

Следовательно, ККТ выполняется в y^0.

Если $\{\lambda_i^k\}$ не ограниченна, то из формулы (5) следует, что

$$\sum_{i\in I(y^0)\setminus I^a(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0,$$

где среди λ_i найдутся $\lambda_i \neq 0$.

Последнее невозможно ввиду леммы 2.

Теорема 2. Пусть $y^0 \in C$. Предположим, что существует окрестность $V(y^0)$ такая, что

а) некоторое условие регулярности справедливо в любой допустимой точке из $V(y^0)$;

б) точка y^0 удовлетворяет PLD_C.

Тогда условие R-регулярности выполняется в точке $V(y^0)$.

Доказательство. Предположим, что условие R-регулярности не выполняется в $V(y^0)$. Тогда существует последовательность $v^k \to y^0$, $v^k \notin C$ такая, что

$$d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k) \ \ i\in I, |h_i(v^k)| \ \ i\in I_0\}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть y^k – решение задачи

$$|y - v^k| \to \min, y \in C.$$

Тогда $|v^k - y^k| \leq |v^k - y^0|$ и, следовательно, $y^k \to y^0$.

Положим

$$\bar{v}^k = \frac{v^k - y^k}{|v^k - y^k|} \to \bar{v};$$
$$I(y^k) = K \subset I(y^0).$$

Вследствие условия а) существуют векторы $\lambda^k \in R^p$ такие, что

$$\frac{v^k - y^k}{|v^k - y^k|} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k),$$

где $\lambda_i^k \geq 0$ при $i\in I$ и $\lambda_i^k = 0$ при $i \in I\setminus K$.

Тогда

$$\bar{v}^k = \sum_{i \in I_0 \cup K} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k);$$
$$\lambda_i^k \geq 0 \;\; i \in K, \lambda_i^k = 0 \;\; i \in I \setminus K. \tag{6}$$

Из (6) следует

$$\bar{v}^k - \sum_{i \in K \setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) =$$
$$= \sum_{i \in I_{00}} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in I^a(y^0) \cap K} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k), \tag{7}$$

где $\lambda_i^k \geq 0 \;\; i \in K$, $\alpha_i^k \in R \;\; i \in I_{00}$.

1) Предположим, что в формуле (7)

$$\bar{v}^k - \sum_{i \in K \setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) \neq 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$, начиная с некоторого k_0.

Тогда, исходя из леммы 3, для любого k найдется множество $J(k) \subset I^a(y^0) \cap K$ такое, что

$$\bar{v}^k - \sum_{i \in K \setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) =$$
$$= \sum_{i \in I_{00}} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in J(k)} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k),$$

где $\alpha_i^k > 0$ для всех $i \in J(K)$, и векторы $\{\nabla h_i(y^k) \;\; i \in I_{00} \cup J(k)\}$ линейно независимы.

Без потери общности можно считать $J(k)$ не зависящим от k, т. е. $J(k) = J$. Тогда

$$\bar{v}^k = \sum_{i \in K \setminus I^a(y^0)} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k) +$$
$$+ \sum_{i \in I_{00}} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in J} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k), \tag{8}$$

где векторы $\{\nabla h_i(y^k) \;\; i \in I_{00} \cup J\}$ линейно независимы, $\alpha_i^k \geq 0 \;\; i \in K$ и $\alpha_i^k > 0$ для всех $i \in J$.

Так как уравнение (8) представляет собой условие ККТ в точке y^k, то в соответствии с критерием R-регулярности [10, 11] последовательность $\{\alpha^k\}$ является неограниченной, т. е. $|\alpha^k| \to \infty$.

Тогда, разделив (8) на $|\alpha^k|$ и перейдя к пределу, получим

$$\sum_{i \in K \setminus I^a(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) + \sum_{i \in I_{00}} \lambda_i \nabla h_i(y^0) +$$
$$+ \sum_{i \in J} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \tag{9}$$

где $\lambda_i \geq 0 \;\; i \in J \cup (K \setminus I^a(y^0))$, $\lambda_i \in R \;\; i \in I_{00}$, и найдутся $\lambda_i \neq 0$.

В соответствии с леммой 2, $\lambda_i = 0$ при $i \in K \setminus I^a(y^0)$, следовательно, уравнение (9) принимает вид

$$\sum_{i \in I_{00}} \lambda_i \nabla h_i(y^0) + \sum_{i \in J} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0,$$

где среди λ_i есть ненулевые.

Поскольку $\{\nabla h_i(y^k) \;\; i \in I_{00} \cup J\}$ линейно независимы, последнее противоречит PLD_C.

2) Пусть в уравнении (7) для бесконечного множества индексов k (для простоты для всех k)

$$\bar{v}^k = \sum_{i \in K \setminus I^a(y^0)} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) \neq 0. \tag{10}$$

Тогда в соответствии с критериями [10, 11] последовательность $\{\lambda^k\}$ не ограниченна. Разделив (10) на $\max \{\lambda_i^k \;\; i \in K \setminus I^a(y^0)\}$ и перейдя к пределу, получим

$$\sum_{i \in K \setminus I^a(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0,$$

где присутствуют $\lambda_i \neq 0$.

Но, исходя из леммы 2, $\lambda_i = 0$ для всех $i \in K \setminus I^a(y^0)$. Таким образом, условие (10) невозможно.

Заключение. В статье получена новая модификация известного условия регулярности RCPLD. Это условие регулярности содержит более слабые требования к ограничениям задачи математического программирования, а также меньший объем вычислений при его проверке. Также доказаны достаточные условия R-регулярности в задаче оптимизации, которые расширяют известные ранее результаты, посвященные R-регулярности (error bound property).

Список литературы

1. Kuhn H. W., Tucker A. W. Nonlinear Programming // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. Berkeley: University of California Press, 1951. P. 481–492.

2. Mangasarian O. L., Fromovitz S. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1967. Vol. 7. P. 37–47.

3. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications / R. Andreani [et al.]. Mathematical Programming. 2012. Vol. 135. P. 255–273.

4. Pang J. Error bounds in mathematical programming // Mathematical Programming. 1997. Vol. 79. P. 299–332.

5. Luderer B., Minchenko L, Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2002. 220 p.

6. Kruger A. Y. Error Bounds and Metric Subregularity // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 1. P. 49–79.

7. Error bounds: necessary and sufficient conditions / M. J. Fabian [et al.] // Set-Valued and Variational Analysis. 2010. Vol. 18, no. 2. P. 121–149.

8. Kruger A. Y., Minchenko L. I., Outrata J. V. On relaxing the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification // Positivity. 2014. Vol. 18. P. 171–189.

9. Minchenko L. I. Note on MFCQ-like constraint qualifications // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. Vol. 182, no. 3. P. 1199–1204.

10. Bednarchuk E. M., Minchenko L. I., Rutkowski K. E. On Lipschitz-like continuity of a class of set-valued mappings // Optimization. 2020. Vol. 69, no. 12. P. 2535–2549.

11. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition // SIAM Journal on Optimization. 2011. Vol. 21, no. 1. P. 314–332.

References

1. Kuhn H. W., Tucker A. W. Nonlinear Programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, University of California Press, 1951, pp. 481–492.

2. Mangasarian O. L., Fromovitz S. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1967, vol. 7, pp. 37–47.

3. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L., Silva P. J. S. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Mathematical Programming*, 2012, vol. 135, pp. 255–273.

4. Pang J. Error bounds in mathematical programming. *Mathematical Programming*, 1997, vol. 79, pp. 299–332.

5. Luderer B., Minchenko L, Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher, 2002. 220 p.

6. Kruger A. Y. Error Bounds and Metric Subregularity. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 1, pp. 49–79.

7. Fabian M. J., Henrion R., Kruger A. Y., Outrata J. V. Error bounds: necessary and sufficient conditions. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 121–149.

8. Kruger A. Y., Minchenko L. I., Outrata J. V. On relaxing the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification. *Positivity*, 2014, vol. 18, pp. 171–189.

9. Minchenko L. I. Note on MFCQ-like constraint qualifications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 182, no. 3, pp. 1199–1204.

10. Bednarchuk E. M., Minchenko L. I., Rutkowski K. E. On Lipschitz-like continuity of a class of set-valued mappings. *Optimization*, 2020, vol. 69, no. 12, pp. 2535–2549.

11. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition. *SIAM Journal on Optimization*, 2011, vol. 21, no. 1, pp. 314–332.

Информация об авторах

Сиротко Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь,). E-mail: sergeyis@bsuir.by

Пашук Александр Владимирович – старший преподаватель кафедры информатики. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: pashuk@bsuir.by

Information about the authors

Sirotko Sergey Ivanovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Informatics. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sergeyis@bsuir.by

Pashuk Aleksandr Vladimirovich – Senior Lecturer, the Department of Informatics. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pashuk@bsuir.by

Поступила после доработки 04.01.2022