Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники»

Кафедра радиотехнических систем

С. Б. Саломатин, Д. Л. Ходыко

ЦИФРОВЫЕ АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ЗАЩИТЫ ОТ ПОМЕХ

Учебно-методическое пособие
по курсам
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ,
МЕТОДЫ И СРЕДСТВА РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ ЗАЩИТЫ
для студентов специальностей «Радиоэлектронные системы»,
«Радиоэлектронная защита информации»
дневной формы обучения

Минск 2007

УДК 621.391.828
ББК 32.811.7
С 16

Рецензент
д-р техн. наук, проф. В. К. Конопелько

Саломатин, С. Б.

С 16 Цифровые адаптивные методы защиты от помех : учеб.-метод. пособие по курсам «Цифровая обработка сигналов», «Методы и средства радиоэлектронной защиты» для студ. спец. «Радиоэлектронные системы», «Радиоэлектронная защита информации» днев. формы обуч. / С. Б. Саломатин,

Д. Л. Ходыко. – Минск : БГУИР, 2007. – 84 с. : ил.

ISBN 978–985–488–203–1

В пособии рассмотрены регрессионные модели дискретных сигналов, помех и полигармонических сигналов, методы оптимальной и адаптивной обработки на основе метода наименьших квадратов, фильтров Винера, Калмана. Приводятся адаптивные методы подавления помех в пространственно-временной и частотных областях.

УДК 621.391.828
ББК 32.811.7

ISBN 978–985–488–203–1

1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ КАК МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

При представлении случайного процесса в виде совокупности случайных величин его теоретико-вероятностное описание естественно строить на основе вероятностного описания случайных величин, т.е. с использованием многомерных законов распределения, например при решении задач в рамках корреляционной теории с применением матриц корреляционных моментов.

1.1. Системная функция и импульсная характеристика

Рассмотрим случайные дискретные процессы и системы. Пусть системная функция $H(z)$ имеет вид

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_p z^{-p}}, \tag{1.1}$$

где $p < q$.

Полагая корни z_k уравнения $A(z) = 0$ простыми, получим разложение

$$H(z) = \sum_k \frac{g_k}{1 - z_k z^{-1}},$$

где вычет

$$g_k = \lim_{z \to z_k} \frac{H(z)}{z}(z - z_k) = \lim_{z \to z_k} H(z)(1 - z_k z^{-1}).$$

Импульсная характеристика системы принимает вид

$$h[n] = \sum_k g_k z_k^n 1[n].$$

При наличии белого шума с единичной дисперсией на входе системы корреляционная функция отклика $R[m]$ может быть выражена через системную корреляционную функцию $R_h\,[m]$:

$$R[m] = h[m] * h[-m] = \sum_{k=0}^{\infty} h[|m| + k]h[k] = R_h[m].$$

Спектральную плотность мощности S(ω) дискретной системы можно разложить:

$$S(w) = H(z)H(\frac{1}{z}) = \sum_k \frac{a_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_k \frac{b_k}{1 - z_k z},$$

где

$$a_k = \lim_{z \to z_k} H(z)H(\frac{1}{z})(1 - z_k z^{-1}) = g_k H(\frac{1}{z_k}),$$

$$b_k = \lim_{z \to 1/z_k} H(z)H(\frac{1}{z})(1 - z_k z) = g_k H(\frac{1}{z_k}) = a_k .$$

С учетом свойства четности корреляционную функцию можно записать как

$$R[m] = \sum_k a_k z_k^{|m|} .$$

Отклик дискретной системы с системной функцией (1.1) при белом шуме $u[n]$ на входе описывается разностным уравнением

$$x[n] + a_1 x[n-1] + \ldots + a_p x[n - p] = b_0 u[n] + \ldots + b_q u[n - q],$$

которое можно записать в виде

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b_k u[n-k].$$

1.2. Авторегрессионный процесс

Случайный процесс $x[n]$ называется авторегрессионным АР-процессом $A(p)$, или процессом авторегрессии порядка p, если

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_p z^{-p}} .$$

В этом случае случайный процесс удовлетворяет уравнению

$$x[n] + a_1 x[n-1] + \ldots + a_p x[n - p] = b_0 u[n],$$

где $u[n]$ – дискретный белый шум, математическое ожидание $M\{u^2[n]\}=1$.

В другой форме записи

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + b_0 u[n].$$

Модель авторегрессии выражает текущее значение процесса через линейную комбинацию предыдущих значений процесса и отсчета белого шума.

Название процесса – термин математической статистики, где линейная комбинация

$$x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_p y_p + z = z + \mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{y}$$

связывает неизвестную переменную x с отсчетами $\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_p]^T$ и называется моделью регрессии (x регрессирует на y). В рассматриваемых соотношениях $x[n]$ регрессирует на предыдущие отсчеты, поэтому это модель авторегрессии.

Процессы авторегрессии могут быть стационарными и нестационарными.

Для стационарности процесса необходимо, чтобы корни λ_k характеристического уравнения

$$\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \ldots + a_p = 0$$

лежали внутри круга единичного круга ($|\lambda_I| < 1$).

1.3. Корреляционная функция и корреляционная матрица

Пусть наблюдается вектор

$$\mathbf{x}(n) = [x[n],\ x[n-1],\ x[n-2], \ldots,\ x[n-N-1]]^T.$$

Корреляционная матрица процесса $\mathbf{R} = M\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}$ запишется как

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(N-1) \\ r_{xx}^*(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^*(N-1) & r_{xx}^*(N-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix},$$

где $r_{xx}(n,m) = M\{x(n)x^*(m)\}$ – значение автокорреляционной функции дискретного процесса $x(n)$.

Для стационарного процесса

$$r_{xx}(n,m) = r_{xx}(n-m) = r_{xx}(k) = M\{x(n)x^*(n+k)\}.$$

В качестве оценок корреляционных значений используются:

- несмещенная оценка:

$$\hat{r}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-k-1} x^*(n)x(n+k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1;$$

- смещенная оценка:

$$\hat{r}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1} x^*(n)x(n+k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1.$$

Напомним, что спектральная плотность мощности связана с корреляционной функцией через дискретное во времени преобразование Фурье:

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) e^{-j2pfk}.$$

Корреляционная функция асимптотически стационарного АР-процесса $AP(p)$ с нулевым средним:

$$M\{\sum_{k=0}^{p} a_k^* x(n-k) x^*(n-l)\} = M[u(n) x^*(n-l)],\ b_0 = 1.$$

Дисперсия процесса:

$$D_x = r_{xx}(0) = \frac{D_z}{1 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_p r_p},$$

где D_z – дисперсия процесса $z(n) = b_0\ u(n)$; $\rho_i = r_{xx}(i)\ /\ r_{xx}(0)$ – коэффициент корреляции i-й составляющей процесса.

Для $l > 0$ текущие значения $u(n)$ некоррелированы с выходными значениями $x(n - l)$, что позволяет получить уравнение Юла–Уокера:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k^* r_{xx}(l-k) = 0, \quad l > 0,$$

или

$$r_{xx}(l) = -a_1^* r_{xx}(l-1) - a_2^* r_{xx}(l-2) - \ldots - a_p^* r_{xx}(l-p), \quad l > 0.$$

В матричном виде

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p-1) \\ r_{xx}^*(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^*(p-1) & r_{xx}^*(p-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{xx}^*(1) \\ r_{xx}^*(2) \\ \vdots \\ r_{xx}^*(p) \end{bmatrix}$$

или

$$\mathbf{Ra} = -\mathbf{r}.$$

Параметры авторегрессии могут быть вычислены путем решения уравнения

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r},$$

при условии, что инверсная матрица $\mathbf{R}^{-1}$ существует. Наиболее удобно использовать для этих целей следующий *алгоритм Левинсона–Дурбина*.

Для $l = 0$ уравнения Юла–Уокера принимают вид

$$\sum_{k=0}^{p} a_k^* r_{xx}(-k) = M\{\varepsilon(n)x^*(n)\} = M\{\varepsilon(n)\varepsilon^*(n)\} = \sigma^2, \tag{1.2}$$

где σ^2 – дисперсия инновационного процесса, $\sigma^2 = \sigma_u^2 |b_0|^2 \delta(l)$, $\sigma_u^2 \delta(l)$ – дисперсия белого шума; $\varepsilon(n) = b_0 u(n)$.

В матричном виде выражение (1.2) запишется как

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p) \\ r_{xx}^*(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^*(p) & r_{xx}^*(p-1) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{r} = \left[r_{xx}^*(1), \ldots, r_{xx}^*(p)\right]^T$.

Для расчетов иногда удобна следующая форма записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_p \\ a_1 & 1 + a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & a_{p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{xx}(0) \\ r_{xx}(1) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{bmatrix} = D_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица системы уравнений может быть представлена в виде суммы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & a_{p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ 0 & a_2 & \cdots & a_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример. Рассмотрим случай $p = 2$. Уравнения Юла–Уокера имеют вид

$$r_x(0) + a_1 r_x(1) + a_2 r_x(2) = D_z,$$

$$r_x(1) + a_1 r_x(2) + a_2 r_x(1) = 0,$$

$$r_x(2) + a_1 r_x(1) + a_2 r_x(0) = 0.$$

Требуется найти выражения для вычисления значений корреляционной функции и коэффициентов авторегрессионного процесса.

Решение. Матрица коэффициентов равна

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2\\ a_1 & 1+a_2 & 0\\ a_2 & a_1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a_1 & 1 & 0\\ a_2 & a_1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a_1 & a_2\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Значения корреляционной функции можно вычислить по формуле

$$r_x(i-1)=\frac{C_{1,i}}{|\mathbf{C}|}D_z,\quad i=1,2,3,$$

где $C_{1,i}$ – алгебраические дополнения первой строки матрицы $\mathbf{C}$; $|\mathbf{C}|$ – определитель матрицы.

Значения коэффициентов авторегрессионного процесса могут быть получены следующим образом:

$$a_{k-1}=\frac{R_{1,k}}{|\mathbf{R}_x|}D_z,\quad k=2,3,$$

где $R_{1,k}$ – алгебраические дополнения элементов первой строки корреляционной матрицы.

Примем i = 1, тогда $C_{1,1} = 1 + a_2$; $|\mathbf{C}| = (1 - a_2)[(1 + a_2)^2 - a_1^2]$.

Дисперсия равна

$$D_x=\frac{(1+a_2)D_z}{(1-a_2)[(1+a_2)^2-a_1^2]}=r_x(0).$$

С учетом соотношений

$$C_{1,2} = -a_1;\ C_{1,3} = a_1^2 - a_2(1 + a_2).$$

Определим последующие значения корреляционной функции:

$$r_x(1)=-\frac{D_z a_1}{|\mathbf{C}|}=-\frac{a_1}{1+a_2}D_x,$$

$$r_x(2)=\frac{a_1^2-a_2(1+a_2)}{|\mathbf{C}|}D_z=(-a_2+\frac{a_1^2}{1+a_2})D_x.$$

1.4. Авторегрессионный скользящего среднего процесс (АРСС)

Случайный процесс называется АРСС-процессом, если он удовлетворяет уравнению процесса

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b_k u[n-k].$$

В этом случае, используя равенство

$$M\{x[n-m]\}\ u[n-r]\} = 0 \quad \text{при } m < r$$

и умножая на $x[n-m]$ уравнение процесса, получим

$$R[m] + a_1 R[m-1] + \ldots + a_p R[m-p] = 0\ ,\ m > q\ ,$$

где $R[m]$ – значение автокорреляционной функции процесса.

Системная функция формирующего фильтра для такого процесса имеет вид

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{b_0 + \sum\limits_{k=1}^{Q} b_q(k) z^{-k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-k}},$$

где $b_q(k) = b_k$; $a_p(k) = -a_k$. Функция $H(z)$ имеет p полюсов и q нулей.

При белом шуме на входе с постоянной дисперсией σ_u^2 спектральная плотность мощности на выходе фильтра описывается выражением

$$S(z) = s_u^2 \frac{B_q(z) B_q(\frac{1}{z})}{A_p(z) A_p(\frac{1}{z})}.$$

В частотной области

$$S(w_н) = s_u^2 \frac{\left|B_q(w_н)\right|^2}{\left|A_p(w_н)\right|^2}.$$

Рассматриваемый процесс часто называют АРСС (p, q)-процессом и используют для него следующую форму записи:

$$x[n] + \sum_{m=1}^{p} a_p(m) x[n-m] = \sum_{m=0}^{q} b_q(m) u[n-m].$$

Такими же уравнениями связаны друг с другом автокорреляционная функция r_x(k) и взаимная корреляционная функция $r_{x,u}$(k):

$$r_x(k) + \sum_{m=1}^{p} a_p(m) x[k-m] = \sum_{m=0}^{q} b_q(m) r_{u,x}[k-m].$$

Если $p \ge q$ и известны отсчеты корреляционной функции $r_x(0)$, …, $r_x(p–1)$, тогда значения $r_x(\ k\ )$ при $k \ge q$ могут быть вычислены рекуррентно:

$$r_x(k) = -\sum_{m=1}^{p} a_p(m) r_x(k-m)\,.$$

В данном случае уравнения Юла–Уокера нелинейны относительно коэффициентов формирующего фильтра и их решение в общем случае вызывает трудности.

1.5. Скользящего среднего процесс (СС-процесс)

Процесс скользящего среднего описывается уравнением

$$x[n] = b_0\, u[n] + \ldots + b_q\, u[n-q].$$

Другая форма записи

$$x[n] = \sum_{k=1}^{q} b_k u[n-k] + b_0 u[n]\,.$$

Системная функция формирующего фильтра представляется как

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q},$$

а импульсная характеристика фильтра как

$$h[n] = b_0\, \delta[n] + b_1\, \delta[n\text{-}1] + \ldots + b_q\, \delta[n\text{-}q].$$

В случае использовании белого шума с дисперсией σ_u^2 энергетический спектр процесса на выходе формирующего фильтра равен

$$S(z) = \sigma_u^2\, B_q(z)\, B(1/z).$$

В случае случайного комплексного процесса $x[n]$ корреляционная функция равна

$$r_x[n] = s_u^2 \sum_{k=0}^{q-|k|} b_q(k + |n|) b_q^*(k)\,.$$

Пример. Найти энергетический спектр на выходе формирующего фильтра первого порядка

Решение. Системная функция равна

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}.$$

Z-образ энергетического спектра при $\sigma_u^2 = 1$ равен

$$S(z) = (b_0 + b_1 z^{-1})(b_0 + b_1 z) = (b_0^2 + b_1^2) + b_1 b_2 (z + z^{-1}) =$$
$$= r_x(0) + r_x(1)(z + z^{-1}).$$

Частотная функция спектра имеет вид

$$S(w_H) = r_x(0) + 2r_x(1)\cos w_H .$$

Фильтр, формирующий СС(q)-процесс, является нерекурсивным.

1.6. Линейное предсказание

Рассмотрим оценку отсчета АР(p)-процесса x[$n-i$] в точке (n – i) при использовании остальных отсчетов от $x[n – M]$ до $x[n]$:

$$\{ x[n], x[n-1], \dots , x[n-M]\}.$$

В соответствии с уравнением процесса искомую оценку можно записать в виде

$$\hat{x}[n-i] = -\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{M} h_k^* x[n-k] = \mathbf{h}^H \mathbf{a}(n-1),$$

где $\{h_k\}$ – весовые коэффициенты предсказывающего фильтра,

$\mathbf{a}(n) = [x[n], x[n-1],..., x[n-M]]^T$ – вектор данных

Ошибка предсказания

$$e^{(i)}(n) = x[n-i] - \hat{x}[n-i] = \sum_{k=0}^{M} h_k^*(n)x[n-k], \qquad a_i(n) = 1.$$

Найдем оптимальные весовые коэффициенты фильтра, которые минимизируют средний квадрат ошибки:

$$r = M\{|e|^2\} = M\{|x[n] - \hat{x}[n]|^2\} = M\{(x[n] - \mathbf{h}^H\mathbf{a}(n-1))(x[n] - \mathbf{h}^H\mathbf{a}(n-1))^* =$$
$$= r_x(0) - \mathbf{h}^H\mathbf{r} - \mathbf{r}^H\mathbf{h} + \mathbf{h}^H\mathbf{R}\mathbf{h},$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ – соответственно вектор и матрица значений корреляционной функции.

Решение задачи минимизации эрмитовой функции r приводит к результату

$$\frac{\partial r(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 0 \Rightarrow \mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}.$$

Откуда получаем соотношение, связывающее весовые коэффициенты предсказывающего фильтра и коэффициенты стохастического процесса АР(p)

$$h_k = -a_k, k = 1,2,..., p.$$

Новая интерпретация уравнения авторегрессии

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k^* x[n-k] + v[n] = \hat{x}[n] + v[n].$$

Отсюда следует, что линейный предсказатель может быть описан моделью процесса АР(p) (рис.1.1):

Линейный предсказатель вперед:

$$\overrightarrow{x}_p[n] = -\sum_{i=1}^{p} a_p^*[i]\, x[n-i].$$

Линейный предсказатель назад:

$$\overleftarrow{x}_p[n] = -\sum_{i=0}^{p-1} b_p^*[i]\, x[n+p-i].$$

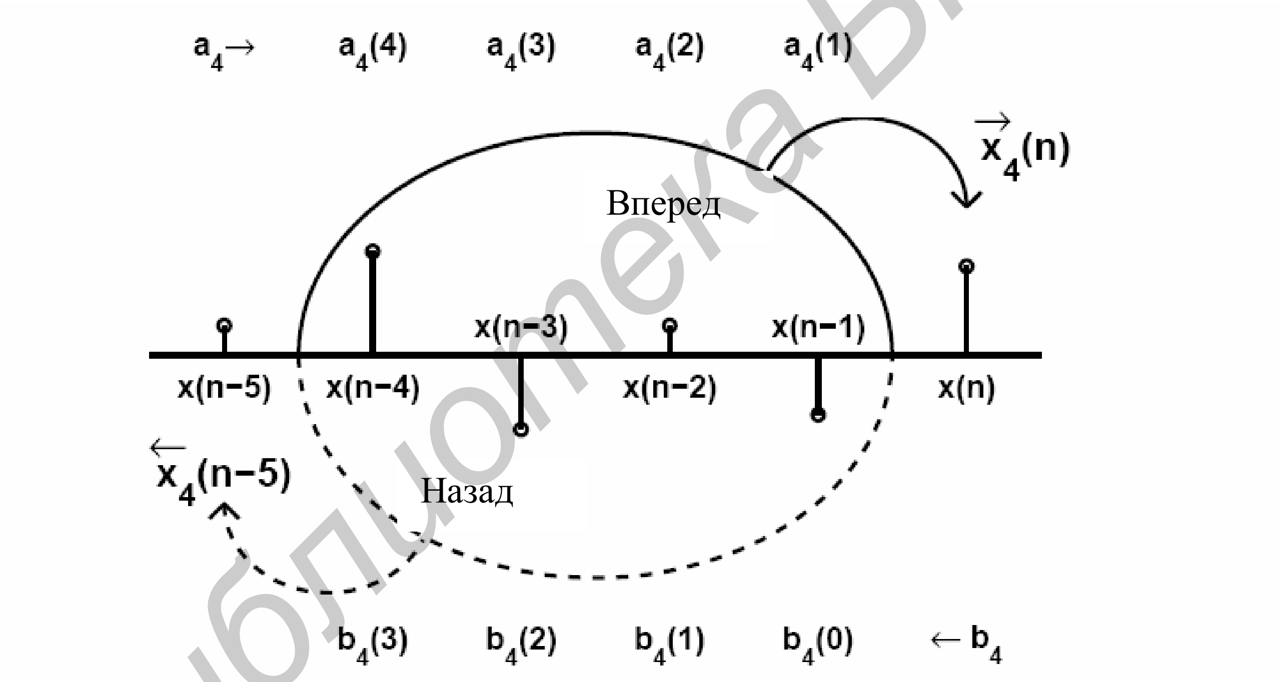


Рис. 1.1. Модель линейного предсказателя

Геометрическое представление линейного предсказателя

Векторное гильбертово пространство H случайных переменных со скалярным произведением векторов и квадратичной нормой (длиной) определяется как $< X, Y >= E[X * Y]$, $\| X^2 \| =< X, X >= E[| X |^2]$.

Пример. Найти вектор $\mathbf{x}(n)$, который покрывает значение $x[n]$ в подпространстве H_{n-p}^{n-1}, образованное последними значениями $x[n-1], x[n-2],..., x[n-p]$.

Решение. Применим *метод ортогонального проектирования*. Принцип ортогонального проектирования определяет, что вектор $\hat{X}_n$ является проекцией X_n на подпространстве H_{n-p}^{n-1} и ошибка E_n ортогональна известным данным (рис. 1.2)

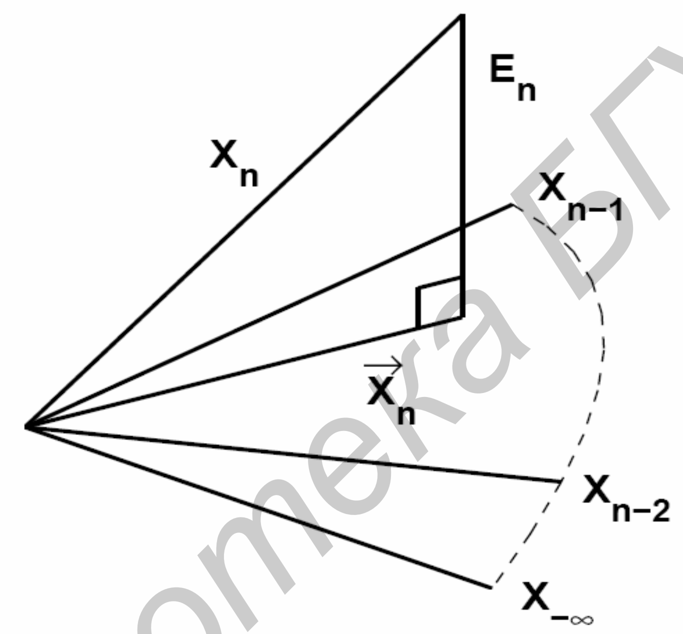


Рис. 1.2. Расположение векторов по методу ортогонального проектирования

Минимум среднего квадрата ошибки определяется как минимум расстояния между векторами X_n и $\hat{X}_n$ и равен

$$\| E_n \|^2 = \| X_n - \hat{X}_n \|^2 = M\{| X_n - \hat{X}_n |^2\},$$

где E_n – ошибка предсказания $< E_n, \hat{X}_n > = M\{E_n^* \hat{X}_n\} = 0$.

1.7. Преставление случайных стационарных помех с неизвестным спектром мощности

Повышение помехозащищенности радиосистем в условиях действия интенсивных пассивных узкополосных и активных помех с неизвестным спектром мощности представляет собой важную техническую задачу. Подавление узкополосных помех большой мощности возможно при параметрическом описании и точной оценке неизвестных параметров действующих помех.

Теплицева ковариационная матрица. Пусть имеется дискретная конечная выборка $\mathbf{x} = [x[0], x[1],\ldots, x[N-1]]^T$ из нормального случайного стационарного комплексного процесса с нулевым средним значением $M\{\mathbf{x}\} = 0$. Ковариационная матрица $M\{\mathbf{x}\,\mathbf{x}^H\} = \mathrm{S}$ с элементами σ_{ik} является эрмитовой ($\mathrm{S} = \mathrm{S}^H$) и положительно определенной, т. е. $(\mathrm{x}^H\,\mathrm{S}\,\mathrm{x}) > 0$ для произвольного вектора x. Для случайного стационарного процесса справедливо соотношение

$$M\{\mathbf{x}_i\,\mathbf{x}_l^{\,H}\} = M\{\mathbf{x}_{i+\tau}\,\mathbf{x}_{l+\tau}^{\,H}\}.$$

Матрица ковариаций S является теплицевой с элементами $\sigma_{ik} = \sigma_{i\text{-}k}$ и с учетом эрмитовых свойств $\sigma_{i\text{-}k} = \sigma_{ik}^{\,*}$. Структура матрицы имеет вид

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1^* & \mathbf{K} & s_{N-2}^* & s_{N-1}^* \\ s_1 & s_0 & \mathbf{O} & & s_{N-2}^* \\ & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & s_1^* \\ s_{N-1} & s_{N-2} & \mathbf{L} & s_1 & s_0 \end{bmatrix} =$$

$$= s_0 \begin{bmatrix} 1 & r_1^* & \mathbf{K} & r_{N-2}^* & r_{N-1}^* \\ r_1 & 1 & \mathbf{O} & & r_{N-2}^* \\ & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & r_1^* \\ r_{N-1} & r_{N-2} & \mathbf{L} & r_1 & 1 \end{bmatrix} = s_0\mathbf{R},$$

где **R** – корреляционная матрица.

Характерным свойством ковариационной матрицы случайного стационарного дискретного процесса является то, что её элементы на любой диагонали, параллельной главной, одинаковы. Первая строка или первый столбец полностью определяют элементы ковариационной матрицы.

Матрица $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ размером ($N \times N$), обратная эрмитовой теплицевой матрице ковариаций S, также эрмитова и обладает свойством персимметрии, заключающимся в симметрии элементов матрицы относительно обеих главных диагоналей. Используя эти свойства, обратную матрицу можно представить в виде

$$\mathbf{\Sigma}^{-1}(g) = e^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 \\ g_{N-1} & \cdots & g_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_1^* & \cdots & g_{N-1}^* \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & g_1^* \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \right.$$
$$\left. - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{N-1}^* & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 \\ g_1^* & \cdots & g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_{N-1} & \cdots & g_1 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & g_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

или в более компактной форме

$$\mathbf{\Sigma}^{-1}(g) = e^{-1}(\mathbf{BB}^H - \mathbf{CC}^H),$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{I}_N + \sum_{k=1}^{N-1} g_k \mathbf{E}^k$; $\mathbf{C} = \sum_{k=1}^{N-1} g_k^* \mathbf{E}^{N-k}$,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$ $\{g_k, k = 1,\ldots,N-1\}$ – комплексные величины;

e – действительный параметр, определяющий интенсивность процесса.

При объеме выборки N ковариационная матрица случайного стационарного дискретного гауссовского комплексного процесса содержит (N – 1) в общем случае комплексный и один действительный параметр. Для нестационарного гауссовского комплексного процесса с неизвестной матрицей ковариаций число неизвестных действительных параметров N, а комплексных – $N(N-1)/2$. Плотность распределения наблюдаемой выборки **y** из случайного стационарного комплексного процесса при нормальном распределении выборочных значений

$$p(y/e,\boldsymbol{\gamma})=p^{-N}\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(g)\right|\exp[-\mathbf{y}^{H}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(g)\mathbf{y}].$$

Как следует из приведенного выше выражения, для полного описания случайного дискретного стационарного гауссовского процесса достаточно задать матрицу ковариаций S или обратную ей матрицу $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$. Гауссовская аппроксимация узкополосных помех, воздействующих на средства радиосистем, приводит к синтезу алгоритмов обработки на основе методов параметрической статистики. Учет негауссовской компоненты помех может быть сделан с использованием непараметрических методов. Для выполнения условий положительной определенности все собственные числа матрицы корреляций должны быть положительны либо должны быть положительны определитель и все главные миноры.

Авторегрессионные (АР) *процессы*. Для описания случайных стационарных процессов широко используется представление последних в виде процессов авторегрессии заданного порядка. При этом часто достигается адекватное описание случайных узкополосных помех и сигналов при существенно более низком числе неизвестных параметров. Важным достоинством дискретного АР-процесса является существование функции от выборочных значений, образующих необходимые и достаточные статистики, число которых для действительного АР-процесса p-го порядка равно $(p+1)(p+2)/2$. Это свойство упрощает и делает более эффективным оценки параметров случайных процессов. Отметим, что марковские модели случайных процессов являются частным случаем авторегрессионных процессов.

Энергетический спектр АР-процесса имеет вид

$$S_{AR}(w)=e\Big/\left|1-\sum_{k=1}^{p}q_k e^{-jwk}\right|^2, -p\le w\le p,$$

где e – интенсивность формирующего процесса; q_k – комплексные параметры АР-процесса p-го порядка.

Спектр мощности характеризуется возможным наличием ярко выраженных экстремумов, число которых может достигать значения p.

Процессы скользящего среднего. Формируются усреднения с весами заданного числа q независимых случайных величин. Процесс может быть сформирован нерекурсивным цифровым фильтром q-го порядка, на вход которого подаются независимые отсчеты шума.

Энергетический спектр дискретного процесса скользящего среднего имеет вид

$$S_{MA}(w) = e_0 \left| 1 - \sum_{k=1}^{q} h_k e^{-jkw} \right|^2, -p \le w \le p \ ,$$

где e_0 – дисперсия независимых случайных величин с нулевым средним; h_k – веса суммирования.

Энергетический спектр хорошо аппроксимирует узкие провалы в сплошном спектре, число которых достигает значения, равного порядку процесса скользящего среднего q. Представление можно, например, использовать для описания спектра мощности мешающих излучений в заданной относительно широкой полосе частот загруженного диапазона радиоволн. Для обеспечения стационарности (положительной определенности теплицевой эрмитовой матрицы ковариаций) на параметры h_k процесса скользящего среднего в отличие от АР-процесса не требуется накладывать какие-либо ограничения.

Авторегрессионный скользящий средний процесс (АРСС). Дискретный процесс может формироваться рекурсивным цифровым фильтром, на вход которого подается процесса скользящего среднего. Спектр мощности процесса АРСС имеет вид

$$S_{ARMA}(w) = e_0 \frac{\left| 1 - \sum_{k=1}^{q} h_k e^{-jwk} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{l=1}^{p} q_l e^{-jwl} \right|^2}, \quad -p \le w \le p \ .$$

Представление АРСС принципиально включает более широкий класс спектров реальных случайных процессов. Однако при синтезе алгоритмов обработки могут возникать аналитические трудности.

Частотные методы обеспечения помехоустойчивости радиосистем при действии помех, коррелированных по времени, основаны на использовании различий в спектрах полезного сигнала и помехи.

Временная корреляция для помехи означает статистическую взаимосвязь её случайных значений в разные моменты времени. С другой стороны, корреляция во времени полностью определяет частотный спектр помехи. Чем уже по временной оси корреляционная характеристика помехи, тем шире её частотный спектр и наоборот. Частотные методы защиты от помех основаны фактически на использовании их временной корреляции.

Активная имитирующая помеха на ложной доплеровской частоте. Для подобного класса помех корреляционную функцию можно представить в виде

$$K_J(r,t) = D_J K_J(r) K_J(t),$$

где $K_J(r)$ – пространственная корреляционная функция параметра r; $K_J(t)$ – временная корреляционная функция параметра t.

Оптимальная частотная обработка смеси полезного сигнала, помехи и внутреннего шума заключается в частотной режекции или «выбеливании» помехи путем создания фильтра с амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками специальной формы.

Упражнения и контрольные задания

1. Пусть корреляционная функция $R[n]$ случайного дискретного процесса имеет вид

$$R[n] = s^2 \frac{\sin^2(pn/2)}{(pn/2)},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Требуется найти спектральную плотность мощности.

2. Спектральная плотность мощности имеет вид

$$S(w) = \frac{c^2}{(e^{jw} - a)(e^{-jw} - a)},\ \ a < 1.$$

Найти корреляционную функцию процесса.

3. Задана последовательность отсчетов корреляционной функции $r_x(0)=1$; $r_x(1)=0,5$; $r_x(2)=0,5$; $r_x(3)=0,25$. Найти модель авторегрессионного процесса.

4. Пусть задан АРСС (1,1)-процесс в форме разностных уравнений

$$x[n] + a\,x[n-1] = u[n] + c\,u[n-1]; \qquad M\{u^2[n]\} = \lambda^2.$$

Найти корреляционную функцию процесса.

5. Найти оценку предсказания для авторегрессионного процесса $x[n]$, если его корреляционная функция равна $r_x(k) = a^{|k|}$.

2. АНАЛИЗ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Предположим, что обрабатываемый сигнал представляет собой аддитивную смесь p комплексных гармоник $s[n]$ и гауссовского шума $v[n]$:

$$x[n] = s[n] + v[n] = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{j(2pf_i n + f_i)} + v[n].$$

Параметры сигнала $\{A_i,\ f_I,\ f_i\}$ считаются постоянными, но неизвестными. Иными словами, рассматривается детерминированный сигнал с неизвестными параметрами. Число гармоник p – известно. Шум имеет нулевое среднее значение, дисперсию s_v^2 и ковариационную матрицу $\mathbf{K}_{vv} = s_v^2 \mathbf{I}$. Задача обработки состоит в оптимальной оценки дискретного спектра сигнала.

2.1. Оценка на основе критерия максимума правдоподобия

Запишем в матричном виде N отсчетов сигнала:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = A_0 e^{jj_0} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2pf_0} \\ \vdots \\ e^{j2pf_0(N-1)} \end{bmatrix} + \mathbf{v} = C_0 \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}.$$

Функция распределения вероятности данных представляет собой комплексный гауссиан со средним значением $\mathbf{s} = C_0\mathbf{s}_0$ и ковариационной матрицей $\mathbf{K}_{vv}$:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{p^N \det\{\mathbf{K}_{vv}\}} \exp[-(\mathbf{x}-\mathbf{s})^H \mathbf{K}_{vv}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{s})].$$

Метод максимального правдоподобия оценивает параметры как координаты максимума условной вероятности $p(\mathbf{x}|A_0,\ f_0,\ f_0\}$. Для этого проведем минимизацию функции:

$$S(C_0, f_0) = (\mathbf{x} - C_0\mathbf{s}_0)^H \mathbf{K}_{vv}^{-1} (\mathbf{x} - C_0\mathbf{s}_0).$$

С математической точки зрения эта задача сводится к задаче нахождения минимума функции $z(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - \mathbf{Ax})^H \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})$ относительно вектора $\mathbf{x}$. Используя законы линейной алгебры, решение $\mathbf{x}_0$ получаем в виде

$$\frac{\partial\, z(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^H \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}^H \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}\,.$$

Оптимальная оценка C_0 при известной частоте f_0 и аддитивном белом шуме запишется как

$$\hat{C}_0 = (\mathbf{s}_0^H \mathbf{K}_{vv}^{-1}\mathbf{s}_0)^{-1}\mathbf{s}_0^H \mathbf{K}_{vv}^{-1}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{s}_0^H \mathbf{x}}{\mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0} = \frac{\mathbf{s}_0^H \mathbf{x}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2pf_0 n}\,.$$

Используем полученный результат для формирования целевой функции максимально правдоподобной оценки частоты f_0 :

$$\begin{aligned} S(f_0) &= (\mathbf{x} - \hat{C}_0\mathbf{s}_0)^H(\mathbf{x} - \hat{C}_0\mathbf{s}_0) = \mathbf{x}^H(\mathbf{x} - \hat{C}_0\mathbf{s}_0) - \hat{C}_0^*(N\hat{C}_0 - N\hat{C}_0) = \\ &= \mathbf{x}^H\mathbf{x} - \frac{1}{N}\,|\,\mathbf{s}_0^H\mathbf{x}\,|^2\,. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что для минимизации $S(f_0)$ достаточно максимизировать

$$\frac{1}{N}\,|\,\mathbf{s}_0^H\mathbf{x}\,|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2pf_0 n}\right|^2.$$

Таким образом, частота отдельной гармоники в шуме оценивается по максимуму пика периодограммы. В том случае, если имеет место спектральное разрешение (частоты различаются более чем $1/N$), то локальные максимумы периодограммы позволяют оценить частоты нескольких синусоидальных сигналов. В общем случае функция максимального правдоподобия для p синусоид нелинейная относительно набора частот и для оптимальной оценки используют методы аппроксимации.

2.2. Структура корреляционной матрицы, проекционные методы

Понятие проекционного метода предполагает использование операторов-проекторов, которые проектируют произвольный вектор пространства в вектор ортогонального подпространства.

Предположим, что гармонические составляющие имеют случайные фазы, равномерно распределенные на интервале [0, 2π]. Обрабатываемый сигнал относится к классу случайных стационарных в широком смысле случайных процессов.

Автокорреляционная функция суммы p гармоник и белого шума имеет вид

$$r_{xx}(k) = \sum_{i=1}^{p} A_i^2 e^{j2pf_i k} + s_v^2 d(k).$$

Корреляционная матрица $\mathbf{R}_{xx}$ представляет собой сумму сигнальной и шумовой частей:

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{vv} = \sum_{i=1}^{p} A_i^2 \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H + s_v^2 \mathbf{I}.$$

Матрица корреляции сигнала $\mathbf{R}_{ss}$ имеет ранг p, в то время как шумовая часть $\mathbf{R}_{vv}$ характеризуется полным рангом.

Проведем декомпозицию корреляционной матрица $\mathbf{R}_{xx}$, размером ($M \times M$), используя такие понятия как, собственные значения и собственные векторы:

$$\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^{p} (l_i + s_v^2) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{i=p+1}^{M} s_v^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H,$$

где $\{l_i\}$ – множество собственных значений; $\{\mathbf{u}_i\}$ – множество собственных векторов корреляционной матрицы.

Разобьем множество собственных векторов на две группы. К первой группе $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ отнесем векторы, ассоциированные с p наибольшими собственными значениями корреляционной матрицы $\mathbf{R}_{xx}$, которые (при положительных отношениях сигнал/шум) в свою очередь ассоциированы с подпространством возможных сигналов $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_p\}$. Проектор на подпространство сигналов строится из p собственных векторов, соответствующих p максимальным собственным значениям.

Вторая группа собственных векторов корреляционной матрицы $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_{p+2}, \ldots, \mathbf{u}_M\}$ ассоциируется с ($M - p$) наименьшими собственными значениями корреляционной матрицы $\mathbf{R}_{xx}$, которые связываются с шумовым подпространством, ортогональным подпространству сигналов. Проектор на подпространство шумов строится из ($M - p$) наименьших (остальных) собственных векторов корреляционной матрицы.

2.3. Метод Писаренко

В качестве математической модели суммы p комплексных синусоид используется авторегрессионная модель p-го порядка:

$$s[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k^* s[n-k] \text{ или } \mathbf{a}^H \mathbf{s}(n) = 0.$$

Добавление шума $v[n]$ изменяет модель к виду

$$\mathbf{a}^H (\mathbf{x}(n) - \mathbf{v}(n)) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k x[n-k] - \sum_{k=0}^{p} a_k v[n-k].$$

Полученное выражение описывает авторегрессионный процесс со скользящим средним АРСС (p, p) с одинаковыми параметрами авторегрессионной части и составляющей модели скользящего среднего. Корреляционная матрица такого процесса удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{a} = s_v^2 \mathbf{a}.$$

Отсюда следует, что вектор **a** является собственным вектором, ассоциированным с минимальным собственным значением s_v^2 корреляционной матрицей размером $(p + 1) \times (p + 1)$.

Нули передаточной функции авторегрессионного фильтра $A(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}$ лежат на окружности единичного радиуса и определяют частоты синусоид.

Метод Писаренко использует автокорреляционный метод (со смещением) оценки матрицы $\mathbf{R}_{xx}$, а также дает точность оценки дисперсии шума в одномерном подпространстве.

Пример. Сигнал определяется как $s[n] = \cos(2\pi n/8 + \phi)$, где фаза ϕ имеет равномерное распределение на интервале $[0, 2\pi]$. Автокорреляционная функция сигнала определяется как $r_{ss}(k) = 0{,}5 \cos(2\pi k/8)$. Добавим к сигналу шум с дисперсией $s_v^2 = 0{,}01$.

Требуется оценить частоту гармонического сигнала принимаемого на фоне аддитивного шума.

Решение. Корреляционная матрица аддитивной смеси сигнала и шума будет иметь вид

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} 0{,}51 & 1/(2\sqrt{2}) & 0 \\ 1/(2\sqrt{2}) & 0{,}51 & 1/(2\sqrt{2}) \\ 0 & 1/(2\sqrt{2}) & 0{,}51 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1/(2\sqrt{2}) & 0 \\ 1/(2\sqrt{2}) & 0{,}5 & 1/(2\sqrt{2}) \\ 0 & 1/(2\sqrt{2}) & 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения корреляционной матрицы равны

$$\{ l_i \} = \{1{,}01;\ 0{,}51;\ 0{,}01\}.$$

Собственные векторы имеют вид

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0{,}5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Авторегрессионый фильтр модели шумовой компоненты определяется через третий $\mathbf{u}_3$ собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению l_3, и описывается передаточной функцией

$$A(z) = \mathbf{z}^H \mathbf{u}_3 = -0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1} - 0{,}5 z^{-2}.$$

Корни уравнения $A(z) = 0$ равны $z_{1,2} = \exp(\pm jp / 4)$, что соответствует синусоидальному сигналу частотой $(p / 4)$ рад/с.

2.4. Множественная классификация сигналов – алгоритм MUSIC

Алгоритм использует свойство, согласно которому сигнальные векторы ортогональны шумовому подпространству, т.е.

$$\mathbf{s}_i^H \mathbf{u}_j = 0, \quad i = 1,2,\ldots,p, \quad j = p+1, p+2,\ldots,M.$$

Спектральная оценка степени ортогональности шуму произвольного сигнального вектора $\mathbf{s}(f) = [1, e^{j2pf}, e^{j4pf}, \ldots, e^{j2pf(M-1)}]^T$ имеет вид

$$S_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\sum_{i=p+1}^{M} |\mathbf{s}^H(f)\hat{\mathbf{u}}_i|^2}.$$

Теоретически, если число p наибольших собственных значений оценено верно, то на частоте сигнала $f = f_i$ спектральная оценка стремится к бесконечности $S_{MUSIC}(f) \to \infty$. Неточность в определении границ шумового подпространства приводит к ошибкам в оценке частоты. Альтернативная оценка использует собственные векторы сигнального подпространства:

$$S'_{MUSIC}(f) = \sum_{i=1}^{p} \left| \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{s}^H(f)\hat{\mathbf{u}}_i \right|^2.$$

Упрощенная по Барлетту спектральная оценка использует аппроксимацию корреляционной матрицы через p наибольших собственных значений и векторов $\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \sum_{i=1}^{p} l_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$, что приводит к оценке

$$\hat{S}_{XX}(f) = \frac{1}{M}\mathbf{s}^H(f)\hat{\mathbf{R}}_{XX}\mathbf{s}(f) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{p} \hat{l}_i |\mathbf{s}^H(f)\hat{\mathbf{u}}_i|^2.$$

Стандартная процедура обработки предполагает: формирование матрицы данных A и корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \mathbf{A}^H\mathbf{A}/C$, получение набора собственных векторов шумового подпространства, вычисление спектральной оценки $S_{MUSIC}(f)$ для различных частот с последующим отбором максимальных значений.

Вычисление корреляционной матрицы через перемножение матриц данных может потребовать больших вычислительных затрат. Используя метод декомпозиции сингулярных значений (SVD), можно уменьшить сложность алгоритма.

SVD-декомпозиция представляет комплексную матрицу размером (K ´ M) в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{U}^H,$$

где **D** – унитарная матрица размером ($K \times K$); **U** – унитарная матрица размером ($M \times M$); S = diag (σ_1, σ_2 , …, σ_q). Здесь q – ранг матрицы **A**.

Сингулярные значения σ_l вычисляются как квадратные корни ненулевых собственных значений λ_l матрицы $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Столбцы матрицы $\mathbf{U}$ или правые сингулярные векторы $\mathbf{u}_l$ являются собственными векторами $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$.

Алгоритм MUSIC

1. Формируется матрица данных $\mathbf{A}$.
2. Используя SVD декомпозицию, находят собственные векторы $\mathbf{u}_l$ шумового подпространства.
3. Вычисляют оценку $S_{MUSIC}(f)$ по инвертированной сумме периодограмм, полученных с помощью собственных векторов шумового пространства.
4. Строят сетку оценочных частот по соответствующим максимумам спектральной оценки.

2.5. Дискретное преобразование Карунена–Лоэва

Пусть $\mathbf{x} = [x[1], x[2], \ldots, x[\mathrm{M}]]^T$ – случайный вектор с нулевым средним и корреляционной матрицей $\mathbf{R}_x$. Подвергнем этот вектор линейному преобразованию

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^H\mathbf{x}\,; \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A} = [\ \mathbf{a}_j\ ]$, $j = 1,\ldots, M$ – унитарная матрица. При этом

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} w_i\mathbf{a}_i\,;\ \mathbf{a}_i^H\mathbf{a}_j = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Рассмотрим оценку $\hat{\mathbf{x}}$ вектора $\mathbf{x}$ в форме m компонент ($1 \le m \le M$) вектора $\mathbf{w}$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{m} w_i\mathbf{a}_i, \qquad 1 \le m \le M\,.$$

Ошибка $\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \sum_{i=m+1}^{M} w_i\mathbf{a}_i\,,$$

при этом средний квадрат ошибки

$$M\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^H\boldsymbol{\varepsilon}_m\} = \sum_{i=m+1}^{M}\mathbf{a}_i^H M\{|w_i|^2\}\mathbf{a}_i = \sum_{i=m+1}^{M} M\{|w_i|^2\}\mathbf{a}_i^H\mathbf{a}_i\,. \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует, что $w_i = \mathbf{a}_i^H\mathbf{x}$ и, следовательно, $M\{|w_i|^2\} = \mathbf{a}_i^H\mathbf{R}_x\mathbf{a}_i$.

Определим такую матрицу **A**, которая минимизировала бы средний квадрат ошибки, при условии нормировки вектора $\mathbf{a}_i$:

$$\mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i = 1, i = m+1, ..., M .$$

Задача сводится к поиску минимума функции Лагранжа:

$$L(\mathbf{a}_i, l_i) = \sum_{i=m+1}^{M} \mathbf{a}_i^H \mathbf{R}_x \mathbf{a}_i + \sum_{i=m+1}^{M} l_i (1 - \mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i),$$

где l_I – множитель Лагранжа.

Приравнивая градиент этого выражения к нулю, получим уравнение

$$\nabla_{\mathbf{a}_i} \left[\sum_{i=m+1}^{M} \mathbf{a}_i^H \mathbf{R}_x \mathbf{a}_i + \sum_{i=m+1}^{M} l_i (1 - \mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i) \right] = \nabla_{\mathbf{a}_i} \left[\mathbf{a}_i^H \mathbf{R}_x \mathbf{a}_i + l_i (1 - \mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i) \right] = \mathbf{0},$$

из которого получается соотношение

$$\mathbf{R}_x \mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i. \tag{2.3}$$

Используя данное соотношение и учитывая (2.2), выразим минимальную ошибку как

$$M\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^H \boldsymbol{\varepsilon}_m\}_{\min} = \sum_{i=m+1}^{M} l_i . \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) и определения собственных значений и векторов следует, что задача минимума среднего квадрата ошибки сведена к поиску собственных значений λ_i и собственных векторов $\mathbf{a}_i$ матрицы $\mathbf{R}_x$. Следовательно, матрица преобразований **A** является матрицей состоящей из ортонормированных собственных векторов матрицы $\mathbf{R}_x$. Обозначим эту матрицу через $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_i\}$, i=1,…, M.

Тогда

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}^H \mathbf{x}. \tag{2.5}$$

В результате преобразования (2.5) формируется вектор **w** с нулевым средним значением и корреляционной матрицей

$$\mathrm{L} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_M).$$

Такое преобразование называется дискретным преобразованием Карунена–Лоэва (ДПКЛ).

Обратное преобразование выражает вектор **x** через координаты вектора **w**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\,\mathbf{w} = \mathbf{q}_1 w_1 + \mathbf{q}_2 w_2 , + \ldots + \mathbf{q}_M w_M.$$

2.6. Дискретное разложение Карунена–Лоэва случайной периодической последовательности

Известно, что корреляционная матрица стационарного процесса является теплицевой. Если корреляционная последовательность случайного процесса является периодической с периодом M, то корреляционная матрица становится циркулянтной. Общий вид циркулянтной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{bmatrix}.$$

Любая строка такой матрицы получается из предыдущей путем циклического сдвига на одну позицию вправо.

Циркулянтная корреляционная матрица имеет вид

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) & \ldots & r_x(M-1) \\ r_x(M-1) & r_x(0) & r_x(1) & \ldots & r_x(M-2) \\ r_x(M-2) & r_x(M-1) & r_x(0) & \ldots & r_x(M-3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \cdots \\ r_x(1) & r_x(2) & \ldots & r_x(M-1) & r_x(0) \end{bmatrix}.$$

Введем M – точечное ДПФ последовательности отсчетов корреляционной функции $r_x(l)$:

$$\tilde{R}_x(k) = \sum_{l=0}^{M-1} r_x(l) W_M^{kl},$$

где $W_M = \exp(-2\pi j/M)$.

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{M}}[1, W_M^k, W_M^{2k}, \ldots, W_M^{(M-1)k}]^T, \qquad 0 \le k \le M-1.$$

Нетрудно установить, что справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{w}_k = \tilde{R}_x(k) \mathbf{w}_k, \qquad 0 \le k \le M-1.$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{w}_k$ ДПФ является собственным вектором циркулянтной корреляционной матрицы $\mathbf{R}_x$, а величина $\tilde{R}_x(k)$ – собственным значением этой матрицы. Таким образом, ДПФ эквивалентно ДПКЛ периодической импульсной последовательности.

Справедливо еще одно полезное соотношение:

$$\mathbf{W}^H \mathbf{R}_x \mathbf{W} = diag(\tilde{R}_x(0), \tilde{R}_x(1), ..., \tilde{R}_x(M-1)),$$

которое говорит о том, что матрица ДЭФ **W** диагонализирует циркулянтную корреляционную матрицу.

Пример. Дано разностное уравнение

$$x[n] = v[n]+bv[n-1],$$

где $v[n]$ – белый гауссовский шум с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Найти ДПКЛ при $M = 3$.

Решение. Найдем матрицу $\mathbf{R}_x$:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1+b^2 & b & 0 \\ b & 1+b^2 & b \\ 0 & b & 1+b^2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим собственные значения матрицы $\mathbf{R}_x$:

$$|\,\mathbf{R}_x - \lambda\mathbf{I}| = (1 + b^2 - \lambda)[(1 + b^2 - \lambda)^2 - 2b^2] = 0.$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda^{(1)} = 1 + b^2; \quad \lambda^{(2,3)} = 1 + b^2 \pm b\sqrt{2}.$$

Матрица **Q** состоит из ортонормированных собственных векторов:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$$

матрицы $\mathbf{R}_x$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}.$$

ДПКЛ принимает вид $\mathbf{x}(n) = w_1(n)\,\mathbf{q}_1 + w_2(n)\,\mathbf{q}_2 + w_3\,\mathbf{q}_3$.

Причем $M\{w_1^2\} = \lambda_1$, $M\{w_2^2\} = \lambda_2$, $M\{w_3^2\} = \lambda_3$.

Упражнения и контрольные задания

1. Проведите сравнительный анализ методов Писаренко и MUSIC.
2. Как можно использовать преобразование Карунена–Лоэва в процессе анализа свойств сигналов и помех?

3. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Результаты измерений, подлежащие обработке, содержат определенный полезный сигнал на фоне различного рода помех (шумов), при этом спектр помех в общем случае недетерминирован и в той или иной мере представлен по всему интервалу главного частотного диапазона. Спектр полезного сигнала наложен на спектр шумов.

Оптимальные фильтры позволяют достаточно надежно производить обнаружение сигнала, наилучшим образом выделять сигнал на фоне помех или в максимальной степени подавить помехи без существенного искажения сигнала.

3.1. Критерии построения оптимальных фильтров

Используются три основных критерия построения оптимальных фильтров:

- минимум среднего квадратического отклонения профильтрованного сигнала от его действительного или заданного значения;
- максимум отношения сигнал/шум;
- максимум энергетического отношения сигнал/шум на выходе фильтра.

При анализе и синтезе фильтров используется аддитивная модель входного сигнала:

$$x[n] = s[n] + v[n],$$

где $s[n]$ – полезная составляющая сигнала, $v[n]$ – составляющая помех.

Синтез оптимальных фильтров производится с максимальным использованием известной априорной информации как о сигналах, которые необходимо выделить, так и о шумах и помехах. Используется информация о природе полезного сигнала и шума, об их спектральном составе, о корреляционных и взаимно корреляционных характеристиках. Наличие определенных особенностей (различий) в характеристиках сигнала и шума позволяет реализовать фильтр вообще и оптимальный фильтр в частности. Если такие особенности отсутствуют, постановка задачи становится некорректной.

Априорные данные о полезных сигналах, как правило, являются достаточно определенными. Определение характеристик действующих помех представляет собой более сложную проблему, но даже при полной неопределенности можно допустить, что помеха является нормальным стационарным процессом с нулевым средним значением.

3.2. Цифровой фильтр, оптимальный по критерию максимума отношения сигнал–шум

Такой тип фильтра может использоваться для обнаружения сигнала в аддитивной смеси шумом (помехой). Пусть наблюдается величина

$$x[n] = s[n] + v[n], \tag{3.1}$$

где $s[n]$ – отсчеты сигнала; $v[n]$ – отсчеты шума (помехи), n = 1, 2, …, N.

Сигнал и шум представляют собой дискретные величины, зависящие от интервала дискретизации T. Уравнение (3.1) представляет собой дискретную версию уравнения наблюдения.

Определим линейный цифровой фильтр, оптимальный по критерию максимума отношения сигнал–шум на его выходе. Будем рассматривать две разновидности сигнала $s[n]$.

Первая разновидность представляет собой детерминированный по форме сигнал

$$s[n] = s_0\,[n]\ ,\ n = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.2}$$

где $s_0\,[n]$ – полностью известная форма сигнала $s[n]$.

Вторая разновидность предполагает, что принимается случайный сигнал с известной корреляционной матрицей $\boldsymbol{R_S}$.

В выражении (3.1) предполагается, что сигнал и помеха некоррелированы и имеют нулевые средние значения.

Отклик нерекурсивного фильтра с отсчетами импульсной характеристики $h[n]$ при входном воздействии $x[n]$ имеет вид

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} x[n-m]h[m], \tag{3.3}$$

где $h[m]$ = 0 при m вне интервала [0, n]. При n < 0 $y[n]$ = 0, так как входное воздействие $x[m]$ также равно нулю вне интервала [0, n].

В конце интервала (при $n = N - 1$) отклик равен

$$y[N-1\} = \sum_{m=0}^{N-1} x[N-1-m]h[m]\,. \tag{3.4}$$

Определим векторы **h**, **x**, **s**, **v** и их инверсии $\underline{\mathbf{h}}$, $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{s}}$, $\underline{\mathbf{v}}$ следующим образом:

$$\mathbf{h} = [h[0], h[1], \ldots h[N-1]]^T \qquad \underline{\mathbf{h}} = [h[N-1], h[N-2], \ldots h[0]]^T\ ;$$

$$\mathbf{x} = [x[0], x[1], \ldots x[N-1]]^T \qquad \underline{\mathbf{x}} = [x[N-1], x[N-2], \ldots x[0]]^T;$$

$$\mathbf{s} = [s[0], s[1], \ldots s[N-1]]^T \qquad \underline{\mathbf{s}} = [s[N-1], s[N-2], \ldots s[0]]^T;$$

$$\mathbf{v} = [v[0], v[1], \ldots v[N-1]]^T \qquad \underline{\mathbf{v}} = [v[N-1], v[N-2], \ldots v[0]]^T.$$

Свертку (3.4) можно записать в векторном виде:

$$y[N-1\} = \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{h} = \mathbf{h}^T \underline{\mathbf{x}} = \mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}} + \mathbf{h}^T \underline{\mathbf{v}}. \tag{3.5}$$

Мощность отклика определяется соотношением

$$P_y = M\{(y[N-1])^2\} = M\{\mathbf{h}^T \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{h}\} = \mathbf{h}^T \mathbf{R}_{\underline{x}} \mathbf{h},$$

где $\mathbf{R}_{\underline{x}}$ – корреляционная матрица процесса $\underline{\mathbf{x}}$. Для стационарного процесса справедливо равенство

$$\mathbf{R}_{\underline{x}} = \mathbf{R}_x.$$

Таким образом, получаем

$$P_y = \mathbf{h}^T \mathbf{R}_x \mathbf{h}.$$

Аналогичным образом можно определить мощности сигнала и помехи:

$$P_s = \mathbf{h}^T \mathbf{R}_s \mathbf{h}, \quad P_v = \mathbf{h}^T \mathbf{R}_v \mathbf{h}, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{R}_s$, $\mathbf{R}_v$ – корреляционные матрицы сигнала (если он случайный) и помехи.

Отношение сигнал–шум на выходе фильтра запишется в виде

$$q = \frac{P_s}{P_v} = \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{R}_s \mathbf{h}}{\mathbf{h}^T \mathbf{R}_v \mathbf{h}}. \tag{3.7}$$

3.3. Согласованный фильтр для детерминированного сигнала в аддитивной смеси с шумом

Белый шум имеет корреляционную матрицу вида

$$\mathbf{R}_v = s_v^2 \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, s_v^2 – дисперсия шума.

Мощность сигнала запишется как

$$P_s = (\mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}})^2,$$

отношение сигнал–шум принимает вид

$$q = \frac{P_s}{P_v} = \frac{(\mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}})^2}{s_v^2 (\mathbf{h}^T \mathbf{h})}. \tag{3.8}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского

$$\left(\mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}}\right)^2 \le \left(\mathbf{h}^T \mathbf{h}\right)\left(\underline{\mathbf{s}}^T \underline{\mathbf{s}}\right), \tag{3.9}$$

выражение (3.8) можно привести к виду

$$q \le \frac{\underline{\mathbf{s}}^T \underline{\mathbf{s}}}{s_v^2} = \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{s}}{s_{\mathbf{v}}^{\mathbf{2}}}. \tag{3.10}$$

Максимальное отношение сигнал–шум на выходе оптимального фильтра запишется как

$$q = q_m = \frac{\left\|\mathbf{s}\right\|^2}{s_v^2}.$$

Неравенство (3.10) переходит в равенство и $q = q_m$ при $\mathbf{h} = c\ \underline{\mathbf{s}}$. При $c = 1$ получаем соотношение

$$\mathbf{h} = [h[0], h[1], \ldots, h[N-1]]^T = \left[s[N-1], s[N-2], \ldots, s[0]\right]^T = \underline{\mathbf{s}}. \tag{3.11}$$

Отсчеты импульсной характеристики фильтра $\mathbf{h}$ представляют собой зеркальное отражение отсчетов сигнала. Оптимальный фильтр с таким вектором импульсной характеристики называется цифровым согласованным фильтром.

Сигнальная составляющая на выходе фильтра имеет вид

$$s_o[n] = \mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}}. \tag{3.12}$$

Пример. Сигнал $s[n]$ имеет вид

$$s[n] = a^{\,n-n_0}\, 1[n-n_0], \qquad |a| < 1,$$

где $1[n]$ – дискретная функция единичного скачка.

Шум $v\,[n]$ – белый с дисперсией s_v^2.

Найти импульсную характеристику согласованного фильтра и отношение сигнал–шум при s_v^2 = 0,25.

Решение. Если сигнал имеет конечную длительность по числу отсчетов, равных N, то по выражению (3.11) находим отсчеты импульсной характеристики

$$h[n] = ca^{N-1-n}, \qquad 0 \le n \le N-1.$$

Отношение сигнал–шум равно

$$q_m = \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{s_v^2} = \frac{s_{0,m}}{s_v^2} = \frac{1}{s_v^2}\frac{1-a^{2N}}{1-a} = \frac{4{,}115}{0{,}25} = 16{,}46.$$

Отклик согласованного фильтра:

$$s_0[n] = \mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}} = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]s[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} s[N-1-m]s[n-m] = h * s.$$

Структура фильтра при коррелированном шуме имеет несколько иную форму. Любую симметричную матрицу $\mathbf{A}$ можно представить в виде произведения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^T, \tag{3.13}$$

где $\mathbf{L}$ – нижняя треугольная матрица, у которой все элементы выше главной диагонали равны нулю, $\mathbf{L}^T$ – верхняя треугольная матрица.

Здесь

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{O} & \mathbf{L} \\ l_{n1} & l_{n2} & \mathbf{L} & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Такое разложение $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$ ($\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$) называют **LU**-разложением матрицы.

Выразим корреляционную матрицу шума следующим образом:

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{L}_v \mathbf{L}_v^T.$$

В знаменателе выражения

$$q = \frac{\left(\mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}}\right)^2}{\mathbf{h}^T \mathbf{R}_v \mathbf{h}} \tag{3.14}$$

получим

$$\mathbf{h}^T \mathbf{R}_v \mathbf{h} = \mathbf{h}^T \mathbf{L}_v \mathbf{L}_v^T \mathbf{h} = \left(\mathbf{L}_v^T \mathbf{h}\right)^T \left(\mathbf{L}_v^T \mathbf{h}\right).$$

Преобразуем числитель (3.14) следующим образом:

$$\left(\mathbf{h}^T \underline{\mathbf{s}}\right) = \mathbf{h}^T \mathbf{L}_v \mathbf{L}_v^{-1} \underline{\mathbf{s}} = \left(\mathbf{L}_v^T \mathbf{h}\right)^T \left(\mathbf{L}_v^{-1} \underline{\mathbf{s}}\right).$$

Подставим полученные выражения в отношение (3.14):

$$q = \frac{[(\mathbf{L}_v^T\mathbf{h})(\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}})]^2}{\left(\mathbf{L}_v^T\mathbf{h}\right)^T\left(\mathbf{L}_v^T\mathbf{h}\right)}.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского

$$[(\mathbf{L}_v^T\mathbf{h})(\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}})]^2 \le \{(\mathbf{L}_v^T\mathbf{h})^T(\mathbf{L}_v^T\mathbf{h})\}\{(\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}})^T(\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}})\},$$

приходим к неравенству

$$q \le (\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}})(\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}}) = \left\|\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}}\right\|^2 = q_m. \qquad (3.15)$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}})^T(\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}}) = \underline{\mathbf{s}}^T(\mathbf{L}_v^{-1})^T\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{s}}^T\mathbf{L}_v^{-T}\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}}.$$

Используя свойство

$$\mathbf{L}^{-T}\mathbf{L}^{-1} = (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}, \qquad (3.16)$$

получим

$$q_m = \underline{\mathbf{s}}^T\mathbf{R}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T\mathbf{R}_v^{-1}\mathbf{s}. \qquad (3.17)$$

Неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство $q = q_m$ при условии пропорциональности

$$\mathbf{L}_v^T\mathbf{h} = c\mathbf{L}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}}, \qquad c = const.$$

Отсюда после умножения слева на $\mathbf{L}_v^{-1}$(или $\mathbf{L}_v^{-T}$) получим выражение для оптимального вектора коэффициентов фильтра:

$$\mathbf{h}_{opt} = c\mathbf{R}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}}. \qquad (3.18)$$

В частном случае при белом шуме $\mathbf{R}_v^{-1} = 1/s_v^2$ и $c/s_v^2 = 1$ приходим к выражению (3.11).

Положим $c = 1$, запишем отклик фильтра

$$y[n] = \mathbf{x}^T\mathbf{h}, \qquad \mathbf{h} = \mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}}.$$

С учетом факторизации $\mathbf{R}_v^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ получим

$$y[n] = \mathbf{x}^T\mathbf{R}_v^{-1}\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{x}^T\mathbf{L}\mathbf{L}^T\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{x}_1^T\underline{\mathbf{s}}_1, \qquad (3.19)$$

где $\mathbf{x}_1 = \mathbf{L}^T\mathbf{x}$; $\underline{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{L}^T\underline{\mathbf{s}}$.

Отношение сигнал–шум в этом случае равно

$$q_m = (\mathbf{s}^T\mathbf{L})(\mathbf{L}^T\mathbf{s}) = \mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_1.$$

Структурная схема оптимального цифрового фильтра показана на рис. 3.1. Оптимальный фильтр содержит обеляющий фильтр с коэффициентом передачи $\mathbf{L}^T$.

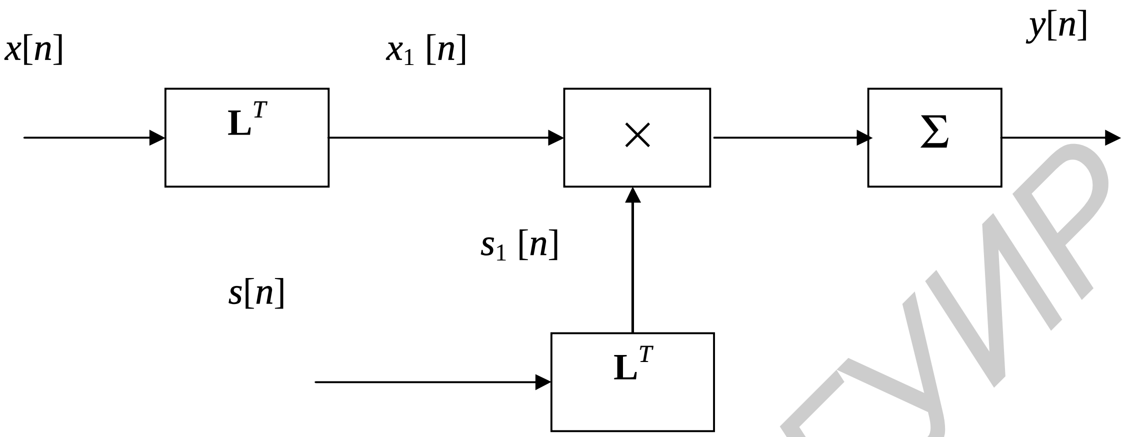


Рис. 3.1. Структурная схема цифрового оптимального фильтра при коррелированном шуме

Пример. Входная последовательность состоит из двух отсчетов: $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, сигнал равен $\mathbf{s} = [s_1, s_2]^T$, где $s_1 = s[0] = A$; $s_2 = s[1] = A$.

Спектральная плотность мощности шума равна

$$S(w_н) = \begin{cases} N_0, & |w_н| \le w_{н,s} \\ 0, & \textit{при других}\ w_н \end{cases},$$

где $w_н = wT$ – нормированная частота.

Требуется найти импульсную характеристику фильтра и максимальное отношение сигнал–шум.

Решение. Определим корреляционную функцию шума:

$$R[n] = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} S(w_н) e^{j w_н n} dw_н = \frac{N_0 w_н}{p} \frac{\sin w_н n}{w_н n}.$$

Дисперсия шума равна

$$s_v^2 = 2 N_0 f_{н,s},$$

где $f_{н,s}$ – нормированная частота.

Коэффициент корреляции

$$r = \frac{\sin w_{н,s} n}{w_{н,s} n}.$$

Корреляционная матрица шума

$$\mathbf{R}_v = s_v^2 \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}; \qquad r = \frac{\sin w_{н,s}}{w_{н,s}}.$$

Обратная корреляционная матрица

$$\mathbf{R}_v^{-1} = \frac{1}{s_v^2 (1 - r^2)} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица **L** разложения матрицы $\mathbf{R}_v^{-1} = \left[R_{i,j}\right]$ имеет элементы

$$l_{1,1} = \sqrt{R_{1,1}};\ l_{2,1} = R_{1,2} / \sqrt{R_{1,1}};\ l_{2,2} = \sqrt{R_{2,2} - l_{2,1}^2};$$

где $R_{i,j}$ – элемент матрицы $\mathbf{R}_v^{-1}$.

Матрица **L** имеет вид

$$\mathbf{L} = \frac{1}{s_v \sqrt{1 - r^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r & \sqrt{1 - r^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s_v \sqrt{1 - r^2}} \mathbf{L}_1,$$

$$\mathbf{L}^T = \frac{1}{s_v \sqrt{1 - r^2}} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ 0 & \sqrt{1 - r^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s_v \sqrt{1 - r^2}} \mathbf{L}_1^T.$$

Сигналы на выходах формирующих фильтров имеют вид

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{x} = \frac{1}{s_v \sqrt{1 - r^2}} \begin{bmatrix} x_1 - r x_2 \\ x_2 \sqrt{1 - r^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{s} = \frac{1}{s_v \sqrt{1 - r^2}} \begin{bmatrix} s_1 - r s_2 \\ s_2 \sqrt{1 - r^2} \end{bmatrix}.$$

Фильтр реализует алгоритм

$$y[n] = \mathbf{x}_1^T \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} x_1 - a_1 x_2 & a_2 x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - a_1 s_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix},$$

где $a_1 = r$, $a_2 = \sqrt{1 - r^2}$.

Импульсная характеристика фильтра равна

$$\mathbf{h}_{opt} = c \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{s} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} s_1 - r s_2 \\ s_2 - r s_1 \end{bmatrix},$$

где $c_1 = 1/s_v^2(1-r^2)$.

По условию задачи $s_1 = s_2 = A$, тогда

$$\mathbf{h}_{opt} = c_2[1 \quad 1]^T, \qquad c_2 = A/s_v^2(1+r).$$

Максимум отношения сигнал–шум

$$q_m = \mathbf{s}^T \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{s} = c_1 [A \quad A] \begin{bmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = \frac{2A^2}{(1+r)s_v^2}.$$

3.4. Случайный сигнал в аддитивной смеси с помехой

В том случае, если помеха – белый шум, то корреляционная матрица помехи равна

$$\mathbf{R}_v = s_v^2 \mathbf{I}.$$

Отношение сигнал–шум на выходе фильтра

$$q = \frac{1}{s_v^2} \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{R}_s \mathbf{h}}{\mathbf{h}^T \mathbf{h}}.$$

Отношение типа

$$q(z) = \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}}{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}$$

называется отношением Рэлея. Для собственных чисел λ матрицы $\mathbf{A}$ справедливы неравенства

$$\lambda_{min} \leq q £ \lambda_{max}.$$

При известной матрице $\mathbf{A} = \mathbf{R}_s$ можно найти максимальные значения отношения сигнал–шум:

$$q_m = \frac{l_m}{s_v^2}.$$

Составим однородную систему уравнений

$$(\mathbf{A} - q_m \mathbf{I})\, \mathbf{h} = 0.$$

Решение системы дает значения оптимального вектора $\mathbf{h}_{opt}$.

Если матрица $\mathbf{R}_s$ – симметрическая, то для неё справедливо разложение

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{U} \mathrm{L} \mathbf{U}^T,$$

где L = diag (λ_1, λ_2, … , λ_n); λ_i, i = 1, 2,…, n – собственные числа сигнальной корреляционной матрицы $\mathbf{R}_s$; $\mathbf{U}$ – ортогональная матрица, её векторы-столбцы $\{u_m\}$, m = 1, 2, …, n – ортонормированные собственные векторы корреляционной матрицы $\mathbf{R}_s$.

В результате синтеза цифрового оптимального фильтра получаем

$$q_m = \frac{l_{\max}}{s_v^2}; \qquad \mathbf{h}_{opt} = \mathbf{u}_{\max},$$

где $\mathbf{u}_{\max}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{R}_s$, соответствующий её максимальному собственному числу.

Коррелированный шум. Поиск максимума отношения сигнал–шум можно вести в следующем порядке. Будем варьировать вектор импульсной характеристики $\mathbf{h}$, считая заданными матрицы корреляционных значений сигнала и шума.

Вычислим производную по вектору ∂q / $\partial \mathbf{h}$ и приравняем её к нулю. Из условия

$$\frac{\partial q}{\partial \mathbf{h}} = 0$$

найдем выражение для $\mathbf{h}_{opt}$.

Вычисление производных сопряжено с некоторыми особенностями. Известны следующие производные по вектору $\mathbf{x}$ от квадратичных форм вида $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{A}$ – симметрическая матрица:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}\mathbf{A}^T\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{I} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathrm{I} = 2\mathbf{x}^T\mathbf{A}.$$

Учитывая, что значением квадратичной формы является скалярная величина, после дифференцирования получаем производную отношения квадратичных форм:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\left(\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}\right) = \frac{2}{\left(\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}\right)^2}(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Найдем производную отношения сигнал–шум:

$$\frac{dq}{d\mathbf{h}} = \frac{2}{\left(\mathbf{h}^T\mathbf{R}_v\mathbf{h}\right)^2}\left[\mathbf{h}^T\mathbf{R}_s\mathbf{h}^T\mathbf{R}_v\mathbf{h} - \mathbf{h}^T\mathbf{R}_v\mathbf{h}^T\mathbf{R}_s\mathbf{h}\right].$$

Уравнение нахождения максимума имеет вид

$$\mathbf{h}^T\mathbf{R}_s\mathbf{h}^T\mathbf{R}_v\mathbf{h}-\mathbf{h}^T\mathbf{R}_v\mathbf{h}^T\mathbf{R}_s\mathbf{h}=0.$$

Тогда

$$\mathbf{h}^T\mathbf{R}_s=\frac{\mathbf{h}^T\mathbf{R}_s\mathbf{h}}{\mathbf{h}^T\mathbf{R}_v\mathbf{h}}\mathbf{h}^T\mathbf{R}_v=q\mathbf{h}^T\mathbf{R}_v,$$

или

$$\mathbf{R}_s\mathbf{h}=q\mathbf{R}_v\mathbf{h}.$$

После умножения слева на обратную матрицу $\mathbf{R}_v^{-1}$ (при условии, что исходная матрица невырожденная) получаем уравнение для определения $\mathbf{h}_{opt}$:

$$\mathbf{Ah}=q\mathbf{h}\quad\Rightarrow\quad(\mathbf{A}-q\mathbf{I})\mathbf{h}=0,$$

где $\mathbf{A}=\mathbf{R}_v^{-1}\mathbf{R}_s$.

Задача теперь сводится к получению собственных векторов и собственных значений матрицы **A**.

Умножим уравнение $\mathbf{Ah}=q\mathbf{h}$ слева на $\mathbf{h}^T$ и найдем q:

$$q=\frac{\mathbf{h}^T\mathbf{Ah}}{\mathbf{h}^T\mathbf{h}}.$$

При известной матрице **A** можно найти отношение сигнал–шум:

$$q_m=l_{\max}$$

и, решив однородную систему уравнений

$$(\mathbf{A}-q_m\mathbf{I})\mathbf{h}=0,$$

найти оптимальную импульсную характеристику $\mathbf{h}=\mathbf{h}_{opt}$.

Пример. Проведем расчет цифрового оптимального фильтра при наличии широкополосного сигнала и коррелированной помехи.

Известно, что корреляционная матрица широкополосного сигнала имеет вид

$$\mathbf{R}_s=P_s\mathbf{I},\qquad P_s=const,$$

а коэффициент корреляции помехи может быть выражен через соотношение

$$r_v(i,j)=r^{(i-j)^2},\qquad 1\le i,j\le N.$$

Решение. На выходе оптимального фильтра максимальное отношение сигнал–шум равно

$$q_m = P_s \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{h}}{\mathbf{h}^T \mathbf{R}_v \mathbf{h}}$$

и обеспечивается при выборе импульсной характеристики $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{opt}$. Импульсная характеристика фильтра определяется через собственный вектор корреляционной матрицы помехи $\mathbf{R}_v$, который, в свою очередь, соответствует минимальному собственному числу матрицы.

Пусть ρ = 0,9, N = 4, тогда

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} 1 & r & r^4 & r^9 \\ r & 1 & r & r^4 \\ r^4 & r & 1 & r \\ r^9 & r^4 & r & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}9^4 & 0{,}9^9 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}9^4 \\ 0{,}9^4 & 0{,}9 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9^9 & 0{,}9^4 & 0{,}9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Минимальному собственному числу матрицы $\mathbf{R}_v$

$$\lambda_{\min} = 2{,}494 \cdot 10^{-3}$$

соответствует собственный вектор

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_{opt} = [0{,}2625; –06566; 0{,}6566; –0{,}2625]^T = [h_1, h_2, –h_2, –h_1]^T.$$

Системная функция фильтра равна

$$H(z) = h_1 + h_2 z^{-1} - h_2 z^{-2} - h_1 z^{-3}.$$

Пример. Найдем весовые коэффициенты $\mathbf{h}_0$ оптимального пространственного фильтра, работающего по критерию максимального правдоподобия. Критерий максимума правдоподобия используется при синтезе адаптивного процессора, осуществляющего подстройку весовых коэффициентов элементов антенной решетки.

Известно, что вектор входного сигнала антенной решетки определяется по формуле

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t); \qquad \mathbf{s}(t) = \mathrm{s}(t)\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = [1, e^{jq_1}, ..., e^{jq_{N-1}}]^T$ – фазовый вектор антенной решетки.

Решение. Определим функцию правдоподобия

$$\ln L[s(t)] = C - \frac{1}{2}[\mathbf{x}(t) - s(t)\mathbf{v}]^T \mathbf{R}_n^{-1} [\mathbf{x}(t) - s(t)\mathbf{v}],$$

где $\mathbf{R}$ – корреляционная матрица помехи.

Дифференцируя, получим уравнение правдоподобия

$$-2\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{x}+2s(t)\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{v}=0.$$

Оценка $\hat{s}(t)$, максимизирующая функцию правдоподобия, определяется выражением

$$\hat{s}(t)\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{v}=\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{x}.$$

Отсюда получаем

$$\hat{s}(t)=\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{v}}.$$

Поскольку $\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{v}$, то можно сделать вывод, что оценка формируется цифровым оптимальным фильтром с коэффициентом усиления

$$K=\frac{1}{\mathbf{v}^T\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{v}}.$$

С другой стороны, если записать оценку в виде

$$\hat{s}(t)=\mathbf{h}_0^T\mathbf{x}(t),$$

для оптимального по критерию максимального правдоподобия весового вектора $\mathbf{h}_0$ получим соотношение

$$\mathbf{h}_0=K\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{v}.$$

3.5. Оптимальный фильтр Винера

Рассмотрим линейный дискретный фильтр с коэффициентами импульсной характеристики $\{h_k\}$, на вход которого поступает сигнал $x[n] = s[n] + v[n]$, где $s[n]$ – полезный сигнал, $v[n]$ – помеха.

Сигнал на выходе фильтра запишется как

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h_k^*x[n-k],\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Определим ошибку фильтрации $\varepsilon[n] = s[n] - y[n]$. Поставим задачу: определить коэффициенты фильтра $\{h_k\}$ таким образом, чтобы минимизировать ошибку $\varepsilon[n]$.

Сделаем следующие допущения. Сигналы $x[n]$ и $s[n]$ стационарны и имеют нулевые средние значения. Сигналы и коэффициенты фильтра являются комплексными числами. Фильтр устойчив, имеет, например, КИХ-структуру.

Стоимостная функция, учитывающая размер ошибки, выбирается из класса среднего квадрата ошибки $J = M\{|e[n]|^2\}$, что удобно с математической точки зрения.

Оператор комплексного градиента имеет вид

$$\nabla_k\{f(a_k + jb_k)\} = \frac{\partial f}{\partial a_k} + j\frac{\partial f}{\partial b_k}, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Комплексный градиент стоимостной функции равен

$$\nabla_k J = M\{e^*[n]\nabla_k e[n] + e[n]\nabla_k e^*[n]\} =$$
$$= M\{\frac{\partial e[n]}{\partial a_k}e^*[n] + \frac{\partial e^*[n]}{\partial a_k}e[n] + j\frac{\partial e[n]}{\partial b_k}e^*[n] + j\frac{\partial e^*[n]}{\partial b_k}e[n]\} =$$
$$= -2M\{x[n-k]e^*[n]\}.$$

Оптимум определяется через решение уравнения $\nabla J = 0$ или

$$M\{x[n-k]e_o^*[n]\} = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Принцип ортогональности. Функция оптимальной оценки ошибки $e_\text{o}[n]$ ортогональна функции дискретного входного сигнала $x[n-k]$, структура которого содержит сигнал $s[n]$, и, следовательно, ортогональна функции оптимальной оценки выходного сигнала $y_o[n] = \hat{s}[n]$:

$$M\{y_o[n]e_o^*[n]\} = 0.$$

Коэффициенты импульсной функции $\{h_{\text{o},k}\}$ оптимального фильтра находятся из решения уравнения:

$$M\{x[n-k]\left(s^*[n] - \sum_{i=0}^{\infty} h_{o,k}x^*[n-i]\right)\} = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

которое сводится к уравнению Винера–Хопфа:

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_{o,i}M\{x[n-k]x^*[n-i]\} = M\{x[n-k]s^*[n]\}.$$

Автокорреляционная функция входного сигнала определяется как

$$r_{xx}(i-k) = M\{x[n-k]x^*[n-i]\},$$

а функция взаимной корреляции сигналов $s[n]$ и $x[n]$ – как

$$r_{xs}(-k) = M\{x[n-k]s^*[n]\}.$$

Для КИХ фильтра M -го порядка получаем простое решение:

$$\sum_{i=0}^{M} h_{o,i} r_{xx}(i-k) = r_{xs}(-k), \quad k = 0,1,2,\ldots,M-1,$$

или в матричной форме

$$\mathbf{R}\mathbf{h}_{\text{o}} = \mathbf{p},$$

где $\mathbf{R}$ – матрица корреляции вектора $\mathbf{x}(n)$; $\mathbf{p} = [r_{xs}(0), r_{xs}(-1),\ldots,r_{xs}(1-M)]^T$ – вектор взаимно корреляционных значений; $\mathbf{h}_o = [h_{o,0}, h_{o,1},\ldots,h_{o,M-1}]^T$ – вектор оптимальных весовых коэффициентов фильтра.

Коэффициенты фильтра определятся как

$$\mathbf{h}_{\text{o}} = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{p}.$$

Передаточная функция фильтра запишется через отношение спектральных мощностей как $H(f) = S_{xs}(f)/\,S_{xx}(f)$.

В матричном виде стоимостная функция J имеет вид

$$J(\mathbf{h}) = M\{(s[n] - \mathbf{h}^H\mathbf{x}(n))(s[n] - \mathbf{h}^*\mathbf{x}(n))^*\} =$$
$$= s_s^2 - \mathbf{h}^H\mathbf{p} - \mathbf{p}^H\mathbf{h} + \mathbf{h}^H\mathbf{R}\mathbf{h} = J_{\min} + (\mathbf{h}-\mathbf{h}_o)^H\,\mathbf{R}(\mathbf{h}-\mathbf{h}_o).$$

Функция J относится к классу квадратичных, и её минимум соответствует минимуму среднего квадрата ошибки $J_{\min} = J(\mathbf{h}_{\text{o}})$:

$$J_{\min} = s_s^2 - s_{y_o}^2 = s_s^2 - \mathbf{h}_o^H\mathbf{R}\mathbf{h}_o = s_s^2 - \mathbf{p}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}.$$

Если использовать декомпозицию корреляционной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\text{L}\mathbf{Q}$ и преобразовать весовой вектор $\mathbf{h}$ в канонические координаты $\mathbf{w} = \mathbf{Q}^H(\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{o}})$, то получим выражение для функции J следующего вида:

$$J = J_{\min} + (\mathbf{h}-\mathbf{h}_o)^H\,\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{Q}^H(\mathbf{h}-\mathbf{h}_o) =$$
$$= J_{\min} + \mathbf{w}^H\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{w} = J_{\min} + \sum_{k=0}^{M-1} l_k\,|w_k|^2,$$

где λ_k – собственные значения матрицы $\mathbf{R}$.

3.6. Методы формирования весовых коэффициентов

Оптимальная весовая обработка сигнала и помехи предполагает вычисление вектора весовых коэффициентов $\mathbf{h}$ по формуле Винера–Хопфа:

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}_J^{-1}\mathbf{s}, \tag{3.20}$$

где $\mathbf{R}_J^{-1}$ – обратная корреляционная матрица помех; $\mathbf{s}$ – вектор-столбец, характеризующий амплитудно-фазовое распределение сигнала по каналам приема.

Если бы характеристики сигнала и помех были известны заранее, то можно было бы определить величины, входящие в выражение (3.20).Однако на практике характеристики сигнала и помех неизвестны и непрерывно изменяются. Поэтому необходимо обновлять значение весового вектора, чтобы подстраиваться под изменяющуюся обстановку. Это приводит к необходимости постоянно оценивать матрицу $\mathbf{R}_J$ и вектор $\mathbf{s}$ в выражении (3.20). Такой метод весовой обработки называется *прямым* методом формирования весовых коэффициентов.

Методы обращения корреляционной матрицы условно можно разделить на две группы. К первой относятся методы, основанные на оценке и последующем обращении корреляционной матрицы, а ко второй – методы, основанные на непосредственном итерационном уточнении обратной корреляционной матрицы.

Простейшим методом первой группы является замена обращаемой матрицы помехи $\mathbf{R}_J$ ее оценкой $\hat{\mathbf{R}}_J$ по N выборкам входных напряжений:

$$\hat{\mathbf{R}}_J = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i^*\mathbf{u}_i^T,$$

где $\mathbf{u}_i$ – вектор комплексных амплитуд принимаемых колебаний; N – число опытов при оценке $\hat{\mathbf{R}}_J$.

Рассмотрим один из простых способов получения обратной корреляционной матрицы помех для адаптивных приемных устройств. Обозначим матрицу

$$\mathbf{R}_J = (\mathbf{I} + g\ \mathbf{u}^*\mathbf{u}^T)$$

и потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{R}_J^{-1} = (\mathbf{I} + e\ \mathbf{u}^*\mathbf{u}^T).$$

Для определения величины e перемножим правые и левые части приведенных выше выражений. В результате получим

$$\mathbf{I} = \mathbf{I} + e\,\mathbf{u}^*\mathbf{u}^T + g\,\mathbf{u}^*\mathbf{u}^T + g\,e\,\mathbf{u}^*\mathbf{u}^T\mathbf{u}^*\mathbf{u}^T .$$

Решив это уравнение относительно e , получим

$$e = -\frac{g}{1 + g\,\mathbf{u}^T\mathbf{u}^*} .$$

С учетом последнего соотношения может быть получена формула для вычисления обратной корреляционной матрицы без выполнения сложной процедуры обращения матрицы:

$$\mathbf{R}_J^{-1} = \mathbf{I} - \frac{g}{1 + g\,\mathbf{u}^T\mathbf{u}^*}\mathbf{u}^*\mathbf{u}^T .$$

Условиями существования полученного выражения являются:

1) возможность представления матрицы помех в виде произведения матрицы-столбца на матрицу-строку;

2) выполнение неравенства $g \neq -\frac{1}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}^*}$.

Как правило, эти условия выполняются, если коэффициенты корреляции помех в различных каналах приема равны единицы. В противном случае эффективность обработки снижается.

Итерационный метод расчета обратных корреляционных матриц. Модель изменения корреляционной матрицы напряжений на j-м шаге оценки при известной матрице, полученной по $(j - 1)$ выборкам входного процесса, можно представить в виде

$$\mathbf{R}_J = \mathbf{R}_{J-1} + H\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_j^T ,$$

где H – вес для текущей оценки матрицы.

Если потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{R}_j^{-1} = \mathbf{R}_{j-1}^{-1} + b\,\mathbf{R}_{j-1}^{-1}\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_j^T\mathbf{R}_{j-1}^{-1},$$

и определить условия существования $b = -\frac{H}{1 + H\mathbf{u}_j^T\mathbf{R}_{j-1}^{-1}\mathbf{u}_\mathbf{j}^*}$,

$$H\mathbf{u}_j^T\mathbf{R}_{j-1}^{-1}\mathbf{u}_\mathbf{j}^* \neq -1,$$

то можно получить выражение для рекуррентного оценивания обратной корреляционной матрицы:

$$\hat{\mathbf{R}}_j^{-1} = \hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1} - \frac{H\hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1}\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_j^T\hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1}}{1 + H\mathbf{u}_j^T\hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1}\mathbf{u}_j^*}.$$

Алгоритм рекуррентного оценивания весового вектора $\mathbf{h}$ на j-м шаге определяется по формуле

$$\hat{\mathbf{h}}_j = \hat{\mathbf{h}}_{j-1} - \frac{H\hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1}\mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_j^T\hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1}}{1 + H\mathbf{u}_j^T\hat{\mathbf{R}}_{j-1}^{-1}\mathbf{u}_j^*}\mathbf{s}.$$

Упражнения и контрольные задания

1. Постройте структуру цифрового оптимального фильтра для оптимального обнаружения сигнала со случайной начальной фазой на фоне гауссовской помехи.

2. На вход оптимального цифрового фильтра Винера поступает вектор $\mathbf{x} = [x[0], x[1], ..., x[N-1]]^T$, представляющий собой аддитивную смесь полезного сигнала $\mathbf{s}$ и белого шума $\mathbf{v}$, $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{v}$. Полезный сигнал является гауссовско-марковским с нулевым средним значением $\mathrm{M}\{s[n]\} = 0$ и корреляционной функцией экспоненциального вида

$$r_s(k-m) = M\{s[k]s[m]\} = s_s^2 e^{-a(k-m)T} = s_s^2 a^{(k-m)},$$

где $a = e^{-aT}$.

Шум имеет нулевое среднее значение и дисперсию

$$M\{v[k]v[m]\} = \begin{cases} s_v^2 \ \textit{при} \quad k = m, \\ 0 \ \textit{при} \quad k \neq m. \end{cases}$$

Найти:

а) корреляционные матрицы сигнала **s** входного воздействия **x;**

б) вектор взаимной корреляционной функции;

в) весовые коэффициенты цифрового фильтра Винера.

3. Имеются следующие характеристики сигнала:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};\ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix};\ M\{s^2[n]\} = 42.$$

Определить средний квадрат ошибки на выходе оптимального фильтра.

4. Найти частотную характеристику цифрового фильтра Винера, если энергетические спектры сигнала **s** и шума **v** представляются как

$$S_s(w_н) = \frac{3{,}4}{1{,}9 - \cos w_н}; \quad S_v(w_н) = 1;\ w_н = wT_д.$$

4. МЕТОДЫ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

4.1. Адаптивная фильтрация по методу наискорейшего спуска

Решение для весовых коэффициентов $\mathbf{h}_{opt}$ импульсной характеристики оптимального стационарного линейного фильтра находится из уравнения Винера:

$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{sx},$$

где $R_x = M\{\mathbf{x}\,\mathbf{x}^H\}$ – корреляционная матрица входного сигнала $x(n)$;

$p_{sx} = M\{\mathbf{x}\, s^*[n]\}$ – вектор взаимно корреляционной функции между входным вектором и эталонным (желаемым) значением $s[n]$.

Такое решение минимизирует среднеквадратичную ошибку:

$$J(\mathbf{h}, n) = M[|e[n]|^2] = s_s^2 - \mathbf{h}^H\mathbf{p} - \mathbf{p}^H\mathbf{h} + \mathbf{h}^H\mathbf{R}_x\mathbf{h}.$$

Альтернативная адаптивная процедура поиска решения базируется на методе наискорейшего спуска.

Алгоритм наискорейшего спуска

1. Определить стартовую, начальную оценку весовых коэффициентов $\mathbf{h}(0)$.

2. Вычислить градиент вектора $\nabla J(n)$ функции стоимости $J(n)$ для текущей оценки весовых коэффициентов $\hat{\mathbf{h}}(n)$.

3. Установить весовой вектор в направлении, противоположном направлению градиенту, и получить следующую оценку $\hat{\mathbf{h}}(n+1)$.

4. Повторить шаги 2 и 3 до выполнения условия сходимости.

Правило рекурсивного обновления координат весового вектора имеет вид

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - C\nabla J(n).$$

Метод наискорейшего спуска относится к наиболее общим методам оптимизации, когда требуется знание только градиента стоимостной функции.

Напомним, что комплексный оператор градиента определяется как

$$\nabla_k\{f(h_k)\} = \frac{\partial f}{\partial a_k} + j\frac{\partial f}{\partial b_k}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $h_k = a_k + jb_k$ – координата вектора комплексных весовых коэффициентов импульсной характеристики фильтра $\mathbf{h} = [h_0, \ldots, h_{N-1}]$.

Градиент вектора функции стоимости $J(\mathbf{h})$ запишется в виде

$$\nabla J(\mathbf{h}) = -2\mathbf{p}_{sx} + 2\mathbf{R}_x\mathbf{h} = 2M\{\mathbf{x}(n)e^*(n)\}.$$

Обозначим шаг поиска как m, тогда обновление координат вектора весовых коэффициентов можно представить с помощью выражения

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + m[\mathbf{p}_{sx} - \mathbf{R}_x\mathbf{h}(n)], \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

При совместно стационарных процессах $s[n]$ и $\mathbf{x}[n]$ вектор импульсной характеристики $\mathbf{h}$, определяемый методом наискорейшего спуска, сходится к уравнению Винера–Хопфа $\lim\limits_{n\to\infty} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{sx}$, если величина шага удовлетворяет условию $0 < m < \dfrac{2}{l_{\max}}$, где $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное значение корреляционной матрицы $\mathbf{R}_x$. При этом выполняется соотношение

$$\mathbf{h}(n+1) - \mathbf{h}_{opt} = (\mathbf{I} - m\mathbf{R}_x)\mathbf{h}(n) + m\mathbf{R}_x\mathbf{h} - \mathbf{h} = (\mathbf{I} - m\mathbf{R}_x)(\mathbf{h}(n) - \mathbf{h}_{opt}).$$

Как следует из последнего соотношения, для целей оптимизации более удобно использовать вектор ошибки:

$$\mathbf{c}(n) = \mathbf{h}(n) - \mathbf{h}_{opt}.$$

Процедура обновления координат вектора ошибки запишется как

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - m\mathbf{R}_x)\mathbf{c}(n).$$

Если выбрать шаг m достаточно малой величины, то всегда можно обеспечить устойчивость матрицы ($\mathbf{I} - m\,\mathbf{R}_x$), гарантирующую асимптотическое стремление к нулю вектора ошибки $\mathbf{c}(n)$.

Декомпозиция симметрической и положительно определенной матрицы $\mathbf{R}_x$ дает

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{G}\Lambda\mathbf{G}^H,$$

где $\mathbf{G}$ – унитарная матрица, состоящая из собственных векторов матрицы $\mathbf{R}_x$; L= diag(l_1, l_2, …, l_p) – диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы $\mathbf{R}_x$.

После преобразований можно получить соотношение

$$\mathbf{G}^H\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - m\mathbf{\Lambda})\mathbf{G}^H\mathbf{c}(n).$$

Введем модифицированный вектор ошибки:

$$\mathbf{u}(n+1) = (\mathbf{I} - m\mathbf{\Lambda})\mathbf{u}(n).$$

Тогда можно получить следующее векторное уравнение:

$$\mathbf{u}(n+1) = (\mathbf{I} - m\mathbf{\Lambda})\mathbf{u}(n),$$

которое также можно записать в виде системы скалярных уравнений:

$$u_k[n+1] = (1 - m\,l_k)^n u[n], \qquad k = 0,1,...M-1.$$

Приведенные соотношения показывают, что в процессе адаптации происходит поворот системы координат так, что новые оси координат направляются по главным осям эллипса в направлении собственных векторов матрицы **R**.

Решением или наиболее вероятным состоянием уравнения является

$$\mathbf{u}(n) = (\mathbf{I} - m\mathbf{\Lambda})\mathbf{u}(0),$$

где $\mathbf{u}(0) = -\mathbf{G}^H\,\mathbf{h}(0)$ – начальный вектор.

Учитывая диагональную структуру матрицы ($\mathbf{I}$ – m L), каждая координата вектора **u** выражается в виде

$$u_k[n] = (1 - m\,l_k)^n u_k[0].$$

Монотонная сходимость $\mathbf{u}(n)\to 0$ обеспечивается только в том случае, если выполняется неравенство

$$-1 < (1 - m\ l_k) < 1, \qquad k = 0, 1, ..., M-1,$$

которое, в свою очередь, удовлетворяется при $0 < m < 2\ /\ l_{\max}$.

Максимальное собственное значение $l_{\max}$ определяет стабильность процесса адаптации, в то время как минимальное $l_{\text{мшт}}$ – время установления $t \approx 1/(m\ l_{\min})$.

Стоимостная функция $J(n)$ = $M\{\mathrm{e}^T(n)\ \mathrm{e}(n)\}$ в действующих координатах определяется как

$$J(n) = J_{\min} + \sum_{k=o}^{M-1} l_k\,|u_k[n]|^2 = J_{\min} + \sum_{k=0}^{M-1} l_k(1 - m\,l_k)^{2n}\,|u_k[0]|^2,$$

где $J_{\min}$ – ошибка фильтрации стационарного фильтра Винера.

При малых значениях шага поиска функция J монотонно убывает и сходится к значению

$$\lim_{n\to\infty} J(n) = J_{\min}.$$

График среднеквадратичной ошибки $J(n)$ называется обучающей кривой и используется для изучения сходимости фильтра.

Метод наискорейшего спуска базируется на свойствах корреляционной матрицы $\mathbf{R}$, в то время как фильтр Винера требует вычисления обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$. Градиентный метод предпочтительнее в тех случаях, когда корреляционная матрица имеет большие размеры или плохо обусловлена, что затрудняет процесс обратимости.

Рассмотрим поведение вектора импульсной характеристики фильтра $\mathbf{h}$ при изменении модифицированного вектора ошибки $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}_{opt} + \mathbf{c}(n) = \mathbf{h}_{opt} + \mathbf{Gu}(n) = \mathbf{h}_{opt} + \sum_{k=0}^{M-1} (1 - m\, l_k)^n u_k(n) \mathbf{g}_k ,$$

где $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{M-1}\}$ – собственные векторы матрицы $\mathbf{R}$, или векторы-столбцы матрицы $\mathbf{G}$.

Таким образом, вектор $\mathbf{h}(n)$ является линейной комбинацией собственных векторов $\mathbf{g}_k$, причем слагаемые под знаком определяются как моды фильтра. Каждая мода затухает по закону $(1 - m\ l_k)^n$, поэтому скорость сходимости вектора $\mathbf{h}(n)$ не может быть больше минимальной скорости затухания моды.

Точное вычисление градиента ∇J требует априорных знаний об ансамбле корреляционных матриц $\mathbf{R}$ и векторов взаимно корреляционных значений $\mathbf{p}$. На практике оценки $\mathbf{R}$, $\mathbf{p}$, а следовательно, и градиента получают из данных. Стандартная оценка корреляционных значений предполагает замену операции усреднения по ансамблю операцией усреднением во времени, т.е.

$$\hat{\mathbf{R}} \propto \sum_n \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{p}} \propto \sum_n \mathbf{x}(n)s^*[n].$$

Упрощенная версия использует одиночную выборку для формирования мгновенной оценки без усреднения:

$$\hat{\mathbf{R}}(n) = \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{x}(n)s^*[n].$$

LMS-алгоритм. Алгоритм, использующийся для вычисления коэффициентов фильтра мгновенный оценки, называется алгоритмом наименьших квадратов:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + m\, \mathbf{x}(n)[s^*[n] - \mathbf{x}^H(n)\hat{\mathbf{h}}(n)] = \hat{\mathbf{h}}(n) + m\, \mathbf{x}(n)e^*[n].$$

Алгоритм стартует с начального значения $\hat{\mathbf{h}}(0)$ и затем выполняет итерации.

1. Вычисляет значение на выходе фильтра: $y[n] = \hat{\mathbf{h}}(n)\mathbf{x}(n)$.
2. Оценивает ошибку: $e\,[n] = s\,[n] - y\,[n]$.
3. Вычисляет веса адаптации: $\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + m\,\mathbf{x}(n)e^*[n]$.

В отличие от детерминистского алгоритма по методу наискорейшего спуска LMS-алгоритм является стохастическим градиентным алгоритмом – оценка градиента выполняется в случайном направлении. Если принять в качестве стоимостной функции мгновенный квадрат ошибки $\hat{J}(n) = |e[n]|^2$, то по отношению к этой функции LMS-алгоритм ведет себя подобно алгоритму наискорейшего спуска. Рекурсивный характер алгоритма сглаживает большой разброс значений мгновенных оценок. Алгоритм прост в исполнении – не требует измерения корреляционных значений, инверсии матриц, его вычислительная сложность $O(M)$ пропорциональна длине фильтра. С другой стороны, адаптируя структуру линейного КИХ-фильтра, алгоритм в целом относится к классу нелинейных алгоритмов, что затрудняет его анализ. Его можно отнести к классу робастных алгоритмов в том смысле, что он ведет себя как минимаксный оператор в $H^{¥}$. В качестве модели поведения во времени вектора весовых коэффициентов фильтра $\mathbf{h}(n)$ может быть использована модель броуновского движения. При малых размерах шага LMS-алгоритм стремится по своим показателям к методу наискорейшего спуска, иными словами, сходится в среднеквадратичном смысле, т.е. $J(n) \to J(\infty)$ для $n \to \infty$, если μ удовлетворяет условию $0 < \mu < 2/\lambda_{max}$. Но так как матрица корреляций $\mathbf{R}$, а следовательно, и λ_{max} недоступны, то используется консервативная оценка λ_{max} по мощности входного сигнала $M\{\|\mathbf{x}(n)\|^2\}$. Поскольку $l_{\max} \le tr\{\mathbf{R}\} = \sum_{n=0}^{M-1} M\{|\mathbf{x}(n)|^2\}$, вектор весовых коэффициентов флуктуирует в процессе поиска. Это приводит к тому, что финальная среднеквадратичная ошибка $J(\infty)$ больше, чем минимальная ошибка J_{min} решения Винера.

Нормализованный LMS-алгоритм. Если обрабатывается вектор данных $\mathbf{x}(n)$ большого размера, то это может привести к большим погрешностям (градиентному шуму). Нормализованный LMS-алгоритм модифицирует входной вектор, нормируя его по норме Евклида:

$$\hat{\mathbf{h}}(n+1)=\hat{\mathbf{h}}(n)+\frac{\tilde{m}}{d+\|\mathbf{x}(n)\|^2}\mathbf{x}(n)e^{*}[n],$$

где δ – малая положительная константа, которая предотвращает возможность деления на ноль при малых значениях $\mathbf{x}(n)$.

Алгоритм сходится в среднеквадратичном смысле, если выполняются неравенства $0<\tilde{\mu}<2$. Нормализованный LMS-алгоритм более робастный, чем обычный LMS-алгоритм. Типичный выбор $\tilde{\mu}=1$ и $\hat{\mathbf{h}}(0)=0$ приводит к тому, что свободным параметром является только длина фильтра *M*.

Пример. Задан нерекурсивный фильтр первого порядка, на вход которого воздействует аддитивная сумма гармонического сигнала и шума (рис. 4.1) .

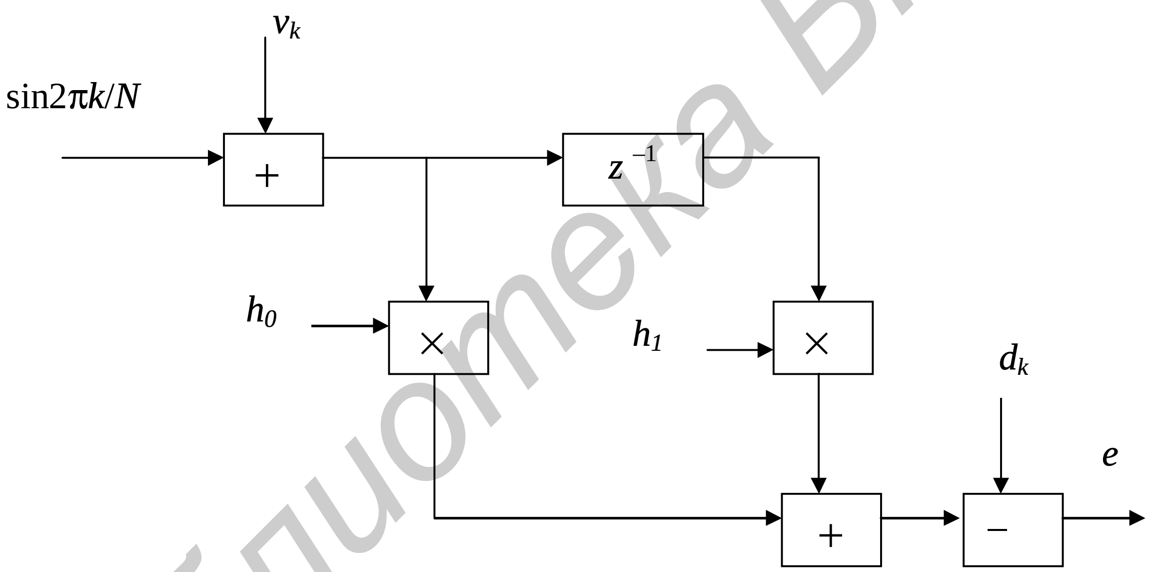


Рис. 4.1. Схема нерекурсивного фильтра первого порядка

Требуется найти алгоритм наискорейшего спуска, построить график обучающей кривой $f(n)$, а также зависимости от времени управляемых координат $h_0(n)$, $h_1(n)$.

Решение. Запишем отклик цифрового фильтра:

$$\hat{s}[n]=y[n]=h_0x[n]+h_1x[n-1]=\mathbf{h}^T\mathbf{x}[n]=\mathbf{x}^T[n]\mathbf{h},$$

где вектор $\mathbf{x}[n]=[x[n], x[n–1]]^T$.

Определим оптимальные значения весовых коэффициентов фильтра. Составим и решим уравнение Винера–Хопфа:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{h} = \mathbf{p}_{sx},$$

где $\mathbf{p}_{sx}$ = $M\{s[k]\ \mathbf{x}[k]\}$ – вектор взаимной корреляционной функции сигнала и входного воздействия; $\mathbf{R}_x$ – корреляционная матрица входного воздействия

$$x[n] = \sin(\frac{2p}{N} n) + v[n].$$

Здесь $v[n]$ – белый шум с нулевым средним значением $M\{v[n]\}$ = 0 и дисперсией $\sigma^2 = M\{\ v^2[n]\}$.

Найдем элементы матрицы $\mathbf{R}_x = [r_x(i)]$:

$$r_x(i) = M\{x[k]x[k-1]\} = M\{(\sin(\frac{2p}{N}k) + v[k])(\sin(\frac{2p}{N}(k-1)) + v[k-1]\} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \sin(\frac{2p}{N}k)\sin(\frac{2p}{N}(k-1)) = 0{,}5\cos\frac{2p}{N};$$

$$r_x(0) = M\{x^2[n]\} = 0{,}5 + s^{\ 2}.$$

Матрица корреляционных значений имеет вид

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 0{,}5 + s^{\ 2} & 0{,}5\cos(2p/N) \\ 0{,}5\cos(2p/N) & 0{,}5 + s^{\ 2} \end{bmatrix}.$$

Вектор взаимной корреляционной функции имеет вид

$$\mathbf{p}_{sx} = M\{s[k]\mathbf{x}[k]\} = M\begin{bmatrix} s[k]x[k] \\ s[k]x[k-1] \end{bmatrix},$$

причем

$$M\{s[k]x[k-n]\} = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \cos(\frac{2pk}{N})\sin(\frac{2p}{N}(k-n)) = -\sin(\frac{2p}{N}n),\ \ n = 0{,}1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{p}_{sx} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\frac{2p}{N} \end{bmatrix}^T.$$

Решением уравнения Винера–Хопфа является

$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{p}_{sx},$$

где $\mathbf{R}_x^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{R}_x)} \begin{bmatrix} 0{,}5 + s^{\,2} & -0{,}5\cos\dfrac{2p}{N} \\ -0{,}5\cos\dfrac{2p}{N} & 0{,}5 + s^{\,2} \end{bmatrix}$,

определитель $\det(\mathbf{R}_x) = (0{,}5 + s^{\,2})^2 - 0{,}25\cos^2(2p/N)$.

Вектор весовых оптимальных коэффициентов фильтра равен

$$\mathbf{h}_{opt} = \frac{1}{(0{,}5 + s^{\,2})^2 - 0{,}25\cos^2(2p/N)} \begin{bmatrix} 0{,}5\sin(2p/N)\cos(2p/N) \\ -(0{,}5 + s^{\,2})\sin(2p/N) \end{bmatrix}.$$

Рабочая характеристика фильтра. Среднеквадратичная ошибка описывается выражением

$$j(n) = M\{e^{\,2}[n]\} = M\{s^2[n]\} - 2\mathbf{p}_{sx}^T\mathbf{h} + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h},$$

где

$$M\{s^2[n]\} = \frac{4}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos^2\left(\frac{2p}{N}k\right) = 2;\ \mathbf{p}_{sx}^T\mathbf{h} = -h_1\sin\frac{2p}{N};$$

$$\mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h} = (0{,}5 + s^{\,2})(h_0^2 + h_1^2) + h_0h_1\cos\frac{2p}{N}.$$

Тогда функция $j(n)$ примет вид

$$j(n) = 2 + (0{,}5 + s^{\,2})(h_0^2 + h_1^2) + h_0h_1\cos\frac{2p}{N} + 2h_1\sin\frac{2p}{N}.$$

Минимальная ошибка фильтрации равна

$$e_{\min} = M\{s^2[n]\} - \mathbf{h}_{opt}^T\mathbf{p}_{sx} = 2 - \mathbf{h}_{opt}^T\mathbf{p}_{sx} = 2 + h_1\sin\frac{2p}{N}.$$

Для построения обучающей кривой определим вначале собственные значения и векторы корреляционной матрицы. Решая характеристическое уравнение $\det(\mathbf{R}_x - l\mathbf{I}) = 0$, получим

$$l_0 = 0{,}5 + s^{\,2} + 0{,}5\cos(2p/N); \qquad l_1 = 0{,}5 + s^{\,2} - 0{,}5\cos(2p/N).$$

Собственные векторы $\mathbf{g}_i$, $i = 0, 1$ корреляционной матрицы определятся из решения однородных уравнений

$$(\mathbf{R}_x - l_i\mathbf{I})\mathbf{g}_i = 0; \quad \mathbf{g}_i = [g_{i,1}; g_{i,2}]^T; i = 0{,}1,$$

а именно:

$$\mathbf{g}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1{,}1]^T;\ \mathbf{g}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1{,}-1]^T.$$

Матрица собственных векторов совпадает с матрицей Адамара и имеет вид

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Обучающая кривая определяется соотношением

$$f(n) = e_{\min} + l_0(1-ml_0)^{2n}\,|u_0(0)|^2 + l_1(1-ml_1)^{2n}\,|u_0(1)|^2,$$

где

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{G}^T\mathbf{c}_0 = \mathbf{G}\begin{bmatrix} c_{0,1} \\ c_{0,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} c_{0,1}+c_{0,2} \\ c_{0,1}-c_{0,2} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{h}(0) - \mathbf{h}_{opt} = \begin{bmatrix} h_0(0)-h_{0,opt} \\ h_1(0)-h_{1,opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{0,1} \\ c_{0,2} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{h}(0)=[h_0(0),\ h_1(0)]^T$ – начальный вектор импульсной характеристики фильтра; $\mathbf{h}_{opt}$ – оптимальный вектор импульсной характеристики.

Компоненты вектора $\mathbf{u}_0$ вычисляются как

$$u_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{0,1}+c_{0,2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(h_0(0)-h_{0,opt}) + (h_1(0)-h_{1,opt})];$$

$$u_0(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{0,1}-c_{0,2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(h_0(0)-h_{0,opt}) - (h_1(0)-h_{1,opt})].$$

Алгоритм наискорейшего спуска будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}_{opt} + (1-ml_0)^n u_0(0)\mathbf{g}_0 + (1-ml_1)^n u_0(1)\mathbf{g}_1.$$

4.2. Рекурсивный метод наименьших квадратов

Предположим, что множества двух переменных $d[i]$ и $x[i]$ связаны друг с другом моделью линейной регрессии:

$$d[i] = \sum_{k=0}^{M-1} w_o^* x(i-k) + e_o[i],$$

где w_o – неизвестные параметры модели; e_o – измеряемая ошибка ненаблюдаемой случайной переменной, которая учитывает возможные шумовые воздействия и погрешности.

Задача заключается в оценке неизвестных значений w_0 для переменных $\{x[i], d[i];\ i = 1,2,\ldots,N\}$, основываясь на оценках ошибки

$$e[i] = d[i] - y[i] = d[i] - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* x[i-k].$$

Решение по методу наименьших квадратов минимизирует функцию стоимости в виде суммы квадратов ошибок на интервале $i_1 \le i \le i_2$:

$$E\{\mathbf{w}\} = E(w_0, ..., w_{M-1}) = \sum_{i=i_1}^{i_2} |e[i]|^2 .$$

Различают следующие методы построения матриц дискретных сигналов.

Ковариационный метод. Отсчеты берутся на интервале $[M, N]$, пределы суммирования $i_1 = M$, $i_2 = N$. Матрица сдвигов имеет вид

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} x[M] & x[M+1] & \cdots & x[N] \\ x[M-1] & x[M] & \cdots & x[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[1] & x[2] & \cdots & x[N-M+1] \end{bmatrix}.$$

Автокорреляционный метод. Отсчеты берутся на интервале $[1, N]$ с дополнением нулями до длины $i_2 = M + N - 1$. Матрица сдвигов имеет ленточный вид:

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \cdots & x[M] & \cdots & x[N] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x[1] & \cdots & x[M-1] & \cdots & x[N-1] & x[N] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x[1] & \cdots & x[N-M+1] & x[N-M] & \cdots & x[N] \end{bmatrix}.$$

Метод опережающего окна. Интервал (окно) формирования отсчетов равен $[1, N]$. Первая строка матрицы апериодически сдвигается вправо в пределах выбранного окна:

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \cdots & x[M] & \cdots & x[N] \\ 0 & x[1] & \cdots & x[M-1] & \cdots & x[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x[1] & \cdots & x[N-M+1] \end{bmatrix}.$$

Метод запаздывающего окна. В данном случае отсчеты сигнала берутся на интервале $i_1 = M$, $i_2 = N + M - 1$. Последовательность отсчетов апериодически сдвигается влево с заполнением освободившихся позиций нулевыми символами справа:

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} x[M] & \cdots & x[N] & 0 & \cdots & 0 \\ x[M-1] & \cdots & x[N-1] & x[N] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[1] & \cdots & x[N-M+1] & x[N-M] & \cdots & x[N] \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим возможности ковариационного метода. В этом случае минимизируется функция стоимости следующего вида:

$$E\{\mathbf{w}\} = E(w_0,...,w_{M-1}) = \sum_{i=M}^{N} |e[i]|^2 = \sum_{i=M}^{N} \left| d[i] - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* x[i-k] \right|^2.$$

Градиент функции стоимости имеет вид

$$\nabla_k E = -2 \sum_{i=M}^{N} x[i-k] e^*[i], k = 0,1,...,M-1.$$

Условие минимизации по методу наименьших квадратов $\nabla E = 0$ может быть записано как

$$\sum_{i=M}^{N} x[i-k] e^*[i] = 0, \qquad k = 0,1,...,M-1.$$

Принцип ортогональности. Временной ряд, составленный из значений минимальных ошибок $\varepsilon_{\min}(i)$, ортогонален последовательностям $\{x[i\text{-}k]\}$ на каждом шаге k = 0,1,…, M–1 и, следовательно, также ортогонален последовательности оценок $\hat{d}[i] = y_{\min}[i]$, вычисленных по методу наименьших квадратов:

$$\sum_{i=M}^{N} \hat{d}[i] e_{\min}^*[i] = 0.$$

Весовые коэффициенты оптимального фильтра $h_j = \hat{w}_j$ находятся из решения системы уравнений

$$\sum_{i=M}^{N} x[i-k] (d^*[i] - \sum_{j=0}^{M-1} \hat{w}_j x^*[i-j]), \; k = 0,\, 1\, ,\ldots,\, M-1,$$

которая приводится к нормальной форме (Винера–Хопфа):

$$\sum_{j=0}^{M-1} \hat{w}_j \sum_{i=M}^{N} x[i-k] x^*[i-j] = \sum_{i=M}^{N} x[i-k] d^*[i], \; k = 0,\, 1\, ,\ldots,\, M-1.$$

Определим автокорреляционную функцию как

$$r(j,k)=\sum_{i=M}^{N} x[i-k]x^{*}[i-j], \quad j,k=0,1,\ldots,M-1,$$

а также взаимно корреляционную функцию между входной $\{x[n]\}$ и эталонной $\{d[n]\}$ последовательностями:

$$p(-k)=\sum_{i=M}^{N} x[i-k]d^{*}[i].$$

Нормальная форма уравнений Винера–Хопфа с использованием корреляционных функций запишется как

$$\sum_{j=0}^{M-1} \hat{w}_j r(j,k)=p(-k),\ k=0,1,\ldots,M-1.$$

Если ввести корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} r(0,0) & r(1,0) & \ldots & r(M-1,0) \\ r(0,1) & r(1,1) & \ldots & r(M-1,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(0,M-1) & r(1,M-1) & \ldots & r(M-1,M-1) \end{bmatrix}$$

и вектор взаимно корреляционных значений

$$\mathbf{p}=[p(0),p(-1),\ldots,p(-M+1)]^{T},$$

а также вектор весовых коэффициентов $\hat{\mathbf{w}}=[\hat{w}_0,\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{M-1}]^{T}$, то нормальную форму уравнений можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{w}}=\mathbf{p}.$$

Вектор весовых коэффициентов линейного фильтра $\mathbf{h}$ получится после вычисления обратной корреляционной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$ и умножения её на вектор взаимно корреляционных значений:

$$\mathbf{h}=\hat{\mathbf{w}}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}.$$

Определим вектор, состоящий из M отсчетов, как

$$\mathbf{x}(i)=[x[i],x[i-1],\ldots,x[i-M+1]]^{T}.$$

Корреляционную матрицу $\mathbf{R}$ можно записать в виде

$$\mathbf{R}=\sum_{i=M}^{N}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^{H}(i).$$

Матрица $\mathbf{R}$ – эрмитова, положительно определена и может быть представлена в виде произведения двух прямоугольных матриц Теплица:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}(M), \mathbf{x}(M+1), \ldots, \mathbf{x}(N)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^H(M) \\ \mathbf{x}^H(M+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^H(N) \end{bmatrix}$$

или в виде произведения $\mathbf{R} = \mathbf{A}^H \mathbf{A}$.

Запишем эталонный сигнал в виде вектора $\mathbf{d}^H = [d(M), d(M+1), \ldots, d(N)]$, тогда уравнения нормальной формы примут вид

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{A}^H \mathbf{d}.$$

Если инверсная матрица $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$ существует, то решение запишется как

$$\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{d}.$$

Полезно для решения системы уравнения типа **Ax** = **b** привлечь метод наименьших квадратов. Вычисление обратной матрицы может быть выполнено различными способами. Одним из эффективных методов обращения матрицы является метод декомпозиции сингулярных значений (SVD-метод), который использует понятие псевдоинверсии $\mathbf{A}^+$ и решение в виде $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$.

Комплексная матрица значений размером ($K \times M$) может быть представлена как

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^H,$$

где **U** – унитарная матрица размером ($K \times K$); **V** – унитарная матрица размером ($M \times M$); S = diag(σ_1, σ_2, …, σ_W) – диагональная матрица. Здесь σ_j – сингулярные значения, W – ранг матрицы **A**. Определим левые и правые сингулярные векторы $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ как столбцы матриц **U** и **V**, тогда можно получить следующее выражение:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{W} s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H.$$

Псевдоинверсия матрицы $\mathbf{A}^+$ определяется как

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^{W} \frac{1}{s_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^H.$$

Переопределенная система ($K > M$) в общем случае не имеет решения, и выбор оценки из соотношения $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{d} = (\mathbf{A}^{H}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{H}\mathbf{d}$ соответствует решению по методу наименьших квадратов с наименьшей ошибкой $\|\mathbf{d} - \mathbf{Aw}\|$.

Неопределенная система ($K < M$) имеет бесконечное число решений, и выбор оценки из соотношения $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{d} = (\mathbf{A}^{H}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{H}\mathbf{d}$ дает решение по методу минимальной нормы с наименьшим значением $\|\mathbf{w}\|$.

Ошибка метода наименьших квадратов может быть записана в виде

$$E_{\min} = E(\hat{\mathbf{w}}) = \|e_{\min}\|^2 = \|\mathbf{d}\|^2 - \|\hat{\mathbf{d}}\|^2 = \|\mathbf{d}\|^2 - \|\mathbf{Fd}\|^2,$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{AA}^{+}$ – оператор проецирования $\mathbf{d}$ в $\hat{\mathbf{d}}$.

Рекурсивный метод наименьших квадратов. Рассмотрим блок данных $[x[i],\ d[i]]$ длиной n, причем n – изменяемая величина. Запишем функцию стоимости, используя метод опережающего окна:

$$E(n) = \sum_{i=1}^{n} l^{n-i}\,|e(i)|^2,$$

где $l^{n\text{-}i}$ – экспоненциальный забывающий фактор, используемый для уничтожения памяти (объем ≈ $1/(1 - \lambda)$), «забывания» предшествующих данных, что важно для обработки нестационарных сигналов.

Вектор оценки весовых коэффициентов фильтра наименьших квадратов в момент времени n запишется как $\hat{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{R}^{-1}(n)\mathbf{p}(n)$, причем корреляционная матрица

$$\mathbf{R}(n) = \sum_{i=1}^{n} l^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^{H}(i),$$

а вектор взаимной корреляции

$$\mathbf{p}(n) = \sum_{i=1}^{n} l^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{d}^{*}(i).$$

Выделив в выражении для матрицы корреляционных значений $\mathbf{R}$ составляющую, учитывающую корреляционные значения для блока длиной (n–1), получим рекурсивное соотношение

$$\mathbf{R}(n) = l\left[\sum_{i=1}^{n-1} l^{n-1-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^{H}(i)\right] + \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{H}(n) = l\,\mathbf{R}(n-1) + \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{H}(n).$$

Подобная рекурсия справедлива и для вектора взаимно корреляционных значений:

$$\mathbf{p}(n) = l\ \mathbf{p}(n-1) + \mathbf{x}(n)\,\mathbf{d}^*(n).$$

Для уменьшения вычислительной сложности желателен рекурсивный вариант вычисления обратной корреляционной матрицы. Одним из остроумных решений является *лемма обращения матрицы.*

Пусть положительно определенная $(M \times M)$ матрица $\mathbf{A}$ имеет форму

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{H},$$

где $\mathbf{B}$ – положительно определенная матрица размером $(M \times M)$.

Матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – положительно определены и имеют размеры соответственно $(M \times N)$ и $(N \times N)$. Тогда обратная матрица может быть вычислена из выражения

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{C}(\mathbf{D} + \mathbf{C}^{H}\mathbf{B}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{H}\mathbf{B}.$$

Подставляя в последнее соотношение $\mathbf{A} = \mathbf{R}(n)$, $\mathbf{B}^{-1} = \lambda\ \mathbf{R}(n-1)$, $\mathbf{C} = \mathbf{x}(n)$ и $\mathbf{D} = 1$, получим рекурсивную формулу для вычисления обратной матрицы (уравнение Риккати):

$$\mathbf{\Psi}(n) = \mathbf{R}^{-1}(n) = l^{-1}\mathbf{\Psi}(n-1) - \frac{l^{-2}\mathbf{\Psi}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{H}(n)\mathbf{\Psi}(n-1)}{1 + l^{-1}\mathbf{x}^{H}(n)\mathbf{\Psi}(n-1)\mathbf{x}(n)}.$$

Рекурсивный алгоритм наименьших квадратов последовательно вычисляет:

1) априорную ошибку: $x(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^{H}(n-1)\mathbf{x}(n)$;

2) априорный вектор обеления: $\mathrm{P}(n) = \mathrm{Y}(n\text{-}1)\mathbf{x}(n)$;

3) вектор коэффициента усиления: $\mathbf{k}(n) = \dfrac{\mathbf{\Pi}(n)}{l + \mathbf{x}^{H}(n)\mathbf{\Pi}(n)}$;

4) вектор весов адаптации: $\hat{\mathbf{w}}(n) = \hat{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{k}(n)x^{*}(n)$;

5) обратную корреляционную матрицу по уравнению Риккати: $\mathbf{\Psi}(n) = l^{-1}\left[\mathbf{I} - \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^{H}(n)\right]\mathbf{\Psi}(n-1)$.

Выражение для априорной ошибки $\xi(n)$ использует старые веса, в то время как апостериорная ошибка $\varepsilon(n)$ оперирует с текущим весовым вектором $\mathbf{w}$. Выход оптимального фильтра $y(n) = \hat{\mathbf{w}}^{H}(n)\mathbf{x}(n)$. Поведение функции стоимости подчиняется рекурсии $E_{\min}(n) = lE_{\min}(n-1) + x^{*}(n)e(n)$. В рассматриваемом алгоритме предполагаются следующие начальные условия: $\hat{\mathbf{w}}(0) = 0, \boldsymbol{\Psi}(0) = d^{-1}\mathbf{I}$, $E_{\min}(0) = 0$, где $\mathbf{I}$ единичная диагональная матрица, δ – малая положительная константа. Такого рода инициализация несколько изменяет формы корреляционной матрица $\mathbf{R}(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} l^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^{H}(i) + dl^{n}\mathbf{I}$ и функции стоимости $E(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} l^{n-i}|e(i)|^{2} + dl^{n}\|\mathbf{w}(n)\|^{2}$. Второе слагаемое в функции стоимости можно рассматривать как компоненту, регулирующую стабильность решений.

Свойства алгоритма:

1. С увеличением n априорная ошибка $\xi(n)$ уменьшается, а апостериорная ошибка $\varepsilon(n)$ возрастает.

2. В алгоритме наименьших квадратов (LMS) веса корректирующая добавка имеет вид $m\,\mathbf{x}(n)e^{*}(n)$, в то время как в рекурсивном алгоритме (RLS) используется добавка $\mathbf{k}(n)x^{*}(n) = \boldsymbol{\Psi}(n)\mathbf{x}(n)x^{*}(n)$. Можно сказать, что в рекурсивном алгоритме роль коэффициента μ играет обратная корреляционная матрица $\boldsymbol{\Psi}(n) = \mathbf{R}^{-1}(n)$, что свидетельствует об обелении вектора $\mathbf{x}$.

3. В стационарном режиме рекурсивный алгоритм сходится за $2M$ итераций, значительно быстрее, чем алгоритм LMS. Сходимость рекурсивного алгоритма не зависит от разброса собственных значений корреляционной матрицы входного сигнала. Теоретически рекурсивный алгоритм имеет нулевой эксцесс среднеквадратичной ошибки регулировки при применении памяти бесконечного объема ($\lambda = 1$).

4.3. Фильтр Калмана

Фильтрация Калмана использует обработку сигнала на основе байесовского подхода, понятий пространства состояний, концепций управляемости, наблюдаемости и линейного квадратичного управления.

Фильтр Калмана является линейной системой. Система характеризуется своим «входом» и «выходом». Это функции времени. Если время дискретно, то оно указывается целочисленными индексами. Рассматривается рекуррентная задача, когда данные должны быть обработаны последовательно во времени по мере поступления выборочных значений.

Фильтр Калмана описывается моделью пространства состояний, динамика которого в момент времени n кодируется вектором состояния $\mathbf{x}_n$. Модель состояния определяется как выход линейной динамической системы, на вход которой поступает белый шум:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \xi_n,$$

где $\mathbf{A}$ – переходная матрица состояния размером $(M \times M)$, x_n – белый шум с нулевым средним значением и корреляционной матрицей $\mathbf{Q}$.

Состояние системы не наблюдается непосредственно, а через измерения, которые описываются уравнением

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n,$$

где $\mathbf{y}_n$ – наблюдаемый вектор, значение которого зависит от матрицы измерений $\mathbf{C}$, вектора состояний и $\mathbf{v}_n$ шума измерений, который представляет собой белый шум с нулевым средним значением и корреляционной матрицей $\mathbf{R}$.

Начальное состояние $\mathbf{x}_0$, шумы x и $\mathbf{v}$ предполагаются гауссовскими и взаимно некоррелированными.

Задача фильтра Калмана может быть сформулирована следующим образом. Заданы известные матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, функция распределения вероятности (ФРВ) начального состояния $p(\mathbf{x}_0)$, ряд наблюдений $\mathbf{y}_{1\ldots n}$. Требуется получить оптимальную (по критерию минимума среднего квадрата) оценку состояния $\mathbf{x}_n$.

Для решения задачи использованы функции распределения Гаусса и марковского процесса первого порядка:

$$p(\mathbf{x}_0) = \mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)\,|_{\mathbf{x}_0},\ p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{Q})\,|_{\mathbf{x}_n},$$

$$p(\mathbf{y}_n \,|\, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{C}\mathbf{x}_n, \mathbf{R})\,|_{\mathbf{y}_n},$$

где $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \dfrac{1}{(2p)^{D/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left[-\dfrac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right]$ – D-мерная функция распределения Гаусса с вектором средних значений m и матрицей ковариации S.

Напомним, что марковский процесс первого порядка определяется как процесс, в котором текущее состояние зависит только от предыдущего и текущее наблюдение зависит только от текущего состояния:

$$p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{x}_{0..n-1}, \mathbf{y}_{1...n-1}) = p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{x}_{n-1}), \; p(\mathbf{y}_n \,|\, \mathbf{x}_{0..n-1}, \mathbf{y}_{1...n-1}) = p(\mathbf{y}_n \,|\, \mathbf{x}_n).$$

Такое свойство позволяет получить рекурсивную зависимость для функции совместного распределения вероятностей:

$$p(\mathbf{x}_{0...n} \,|\, \mathbf{y}_{1...n}) = p(\mathbf{x}_0) \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{x}_i \,|\, \mathbf{x}_{i-1}) \prod_{j=1}^{n} p(\mathbf{y}_j \,|\, \mathbf{x}_j)$$

и реализовать операции предсказания, фильтрации и сглаживания.

Функция условного распределения вероятностей $p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1})$ может быть определена рекурсивно за два шага.

1. *Предсказание*: последнее состояние функции распределения вероятности $p(\mathbf{x}_{n-1} \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1})$ используется для проектирования следующего состояния:

$$p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{n-1}} p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{x}_{n-1}) p(\mathbf{x}_n - 1 \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1}) d\mathbf{x}_{n-1}.$$

2. *Коррекция*: полученное на первом шаге предсказание комбинируется с измерением $\mathbf{y}_n$ для получения следующего состояния функции распределения вероятностей:

$$p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{y}_{1...n}) = \frac{p(\mathbf{y}_n \,|\, \mathbf{x}_n) p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1})}{p(\mathbf{y}_n \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1})},$$

где общая вероятность следующего наблюдения равна

$$p(\mathbf{y}_n \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1}) = \int\limits_{\mathbf{x}_n} p(\mathbf{y}_n \,|\, \mathbf{x}_n) p(\mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{y}_{1...n-1}) d\mathbf{x}_n.$$

Правило Байеса играет ключевую роль в фильтре Калмана, связывая гауссовские переменные $\mathbf{y}_n$ линейной зависимостью с переменными **x:**

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = p(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})\,p(\mathbf{x}) = \mathrm{N}(\mathbf{Ax},\mathbf{Q})|_{\mathbf{y}}\ \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})|_{\mathbf{x}} =$$

$$= p(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y})\,p(\mathbf{y}) = \mathrm{N}(\mathbf{m},\mathbf{S})|_{\mathbf{x}}\ \mathrm{N}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu},\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{H}+\mathbf{Q})|_{\mathbf{y}},$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{S}\mathbf{A}^{H}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$; $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}^{H}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} + \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$.

Аргументами состояния ФРВ $p(\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{y}_{1\ldots n}) = \mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_n,\mathbf{P}_n)$ являются оценка состояния $\hat{\mathbf{x}}_n$ и рекурсивно изменяющаяся ковариационная матрица ошибок: $\mathbf{P}_n = M\{(\mathbf{x}_n-\hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n-\hat{\mathbf{x}}_n)^{H}\}$.

Шаг предсказания дает совместную ФРВ:

$$p(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_{n-1}\,|\,\mathbf{y}_{1\ldots n-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{Ax}_{n-1},\mathbf{Q})|_{\mathrm{x}_n}\ \mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1},\mathbf{P}_{n-1})|_{\mathrm{x}_{n-1}}$$

и после учета краевых значений $\mathbf{x}_{n-1}$ получаем

$$p(\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{y}_{1\ldots n-1}) = \mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_n^{-},\mathbf{P}_n^{-}) = \mathrm{N}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{n-1},\mathbf{A}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{A}^{H}+\mathbf{Q}).$$

Шаг коррекция также формирует совместную ФРВ:

$$p(\mathbf{y}_n,\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{y}_{1\ldots n-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{Cx}_n,\mathbf{R})|_{\mathrm{y}_n}\ \mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_n^{-},\mathbf{P}_n^{-})|_{\mathrm{x}_n},$$

после учета краевых значений $\mathbf{x}_n$ получаем

$$p(\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{y}_{1\ldots n}) = \mathrm{N}(\mathbf{S}\mathbf{C}^{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}_n + \mathbf{S}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{-})^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}^{-},\mathbf{S}),$$

где $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{C}^{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{P}_n^{-})^{-1}$ – новая ковариация.

Лемма инверсии матриц дает полезную формулу:

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A},$$

которая упрощает выражение обновления состояния ФРВ

$$p(\mathbf{x}_n\,|\,\mathbf{y}_{1\ldots n}) = \mathrm{N}(\mathbf{K}\mathbf{y}_n + [\mathbf{I}-\mathbf{KC}]\hat{\mathbf{x}}_n^{-},[\mathbf{I}-\mathbf{KC}]\mathbf{P}_n^{-}),$$

где матрица усиления Калмана размером (M $\times$ D) определяется как

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_n^{-}\mathbf{C}^{H}[\mathbf{C}\mathbf{P}_n^{-}\mathbf{C}^{H}+\mathbf{R}]^{-1}.$$

Структура уравнений Калмана.

Предсказание: $\mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1},\mathbf{P}_{n-1}) \Rightarrow \mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_n^{-},\mathbf{P}_n^{-})$

1. Проецирование оценки состояния вперед:

$$\hat{\mathbf{x}}_n^{-} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{n-1}.$$

2. Вычисление матрицы ковариации ошибки вперед (уравнение Риккати):

$$\mathbf{P}_n^{-} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{A}^{H} + \mathbf{Q}.$$

Переход к шагу коррекции

Коррекция: $\mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_n^-, \mathbf{P}_n^-) \Rightarrow \mathrm{N}(\hat{\mathbf{x}}_n, \mathbf{P}_n)$.

1. Вычисление матрицы усиления Калмана:

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^- \mathbf{C}^H [\mathbf{C}\mathbf{P}_n^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R}]^{-1}.$$

2. Обновление оценки состояния с учетом измерения:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^- + \mathbf{K}_n[\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_n^-].$$

3. Обновление матрицы ковариации ошибок:

$$\mathbf{P}_n = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{C}]\mathbf{P}_n^-.$$

Переход к следующему шагу предсказания

Уравнения Калмана также могут быть вычислены через принцип ортогональности на основе процесса инновации:

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_n^- = \mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_n^-,$$

где $\hat{\mathbf{y}}_n^-$ – наилучшая оценка $\mathbf{y}_n$, полученная по прошедшим наблюдениям $\mathbf{y}_{1\ldots n-1}$.

Инновация представляет собой новую информацию в наблюдаемых данных, которая не может быть линейно предсказана по последним значениям (ошибка предсказания). Существует однозначное соответствие между инновациями и наблюдениями ($\mathrm{a}_{1\ldots n} \Leftrightarrow \mathbf{y}_{1\ldots n}$).

Вектор-ошибка предсказания $\mathbf{e}_n^- = \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n^-$ ортогонален вектору-инновациям. Ошибке $\mathbf{e}_n^-$ соответствует корреляционная матрица $\mathbf{P}_n^-$, в то время как инновациям a_n – матрица $\mathbf{T}_n = M\{\boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{\alpha}_n^H\} = \mathbf{C}\mathbf{P}_n^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R}$.

Инновация упрощает процесс коррекции оценки состояния:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^- + \mathbf{K}_n \boldsymbol{\alpha}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^- + \mathbf{P}_n^- \mathbf{C}^H \mathbf{T}_n^{-1} \boldsymbol{\alpha}_n.$$

Рекурсивный алгоритм наименьших квадратов (RLS) можно рассматривать как частный случай фильтра Калмана с уравнениями процесса и измерениями:

$$\mathbf{x}_{n+1} = l^{-1/2}\mathbf{x}_n \quad \text{и} \quad y_n = \mathbf{u}_n^H \mathbf{x}_n + v_n,$$

которые приводят к рекурсивным оценкам состояния

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{k}_n x_n^*,$$

и ковариационной матрицы

$$\mathbf{P}_n = l^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{k}_n \mathbf{u}_n^H)\mathbf{P}_{n-1}.$$

Априорная ошибка ξ_n и вектор усиления $\mathbf{k}_n$ задаются как

$$x_n = s_n - \hat{\mathbf{x}}_n^H \mathbf{u}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{k}_n = \frac{\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{u}_n}{l + \mathbf{u}_n^H \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{u}_n}.$$

Шум наблюдения имеет единичную дисперсию.

Упражнения и контрольные задания

1. Задан нерекурсивный (трансверсальный) фильтр первого порядка. Требуется найти алгоритм наискорейшего спуска, построить график обучающей кривой, а также вектор импульсной характеристики фильтра.

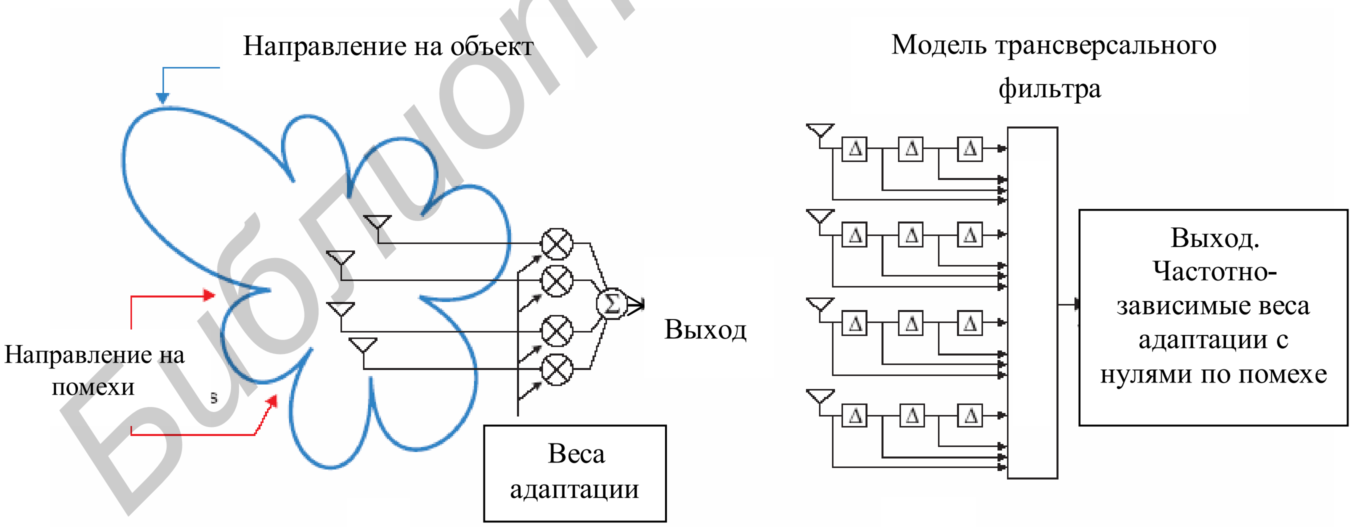
2. Пусть случайный процесс определяется авторегрессионным процессом второго порядка. Синтезируйте адаптивный фильтр-предикатор вперед.

3. Пусть модель наблюдения имеет вид $\mathbf{x}_n = \mathbf{H}\mathrm{l}_n + \mathbf{v}_n$; $\mathbf{s}_n = \mathbf{H}\mathrm{l}_n$, где l_n и $\mathbf{v}_n$ – случайные некоррелированные процессы, имеющие нулевые средние значения, причем корреляционные функции R_l $(n–m)$ сообщения и R_n $(n–m)$ имеют вид $R_l\,(n-m) = D_l\,e^{-a\,(n-m)T}$, $R_v(n-m) = D_v d_{nm}$, где δ – символ Кронекера. Найти уравнение сообщения, уравнение цифрового фильтра Калмана, системную функцию и частотные характеристики в стационарном режиме.

5. АДАПТИВНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ПОМЕХ

5.1. Адаптивные антенны

Адаптивные антенны используют методы пространственной фильтрации для подавления помехи (рис. 5.1).



а б

Рис. 5.1. Архитектура возможных антенных систем для подавления помех

Пространственная обработка имеет нули диаграммы направленности (ДН), которые располагаются по направлениям на источники помех, в то время как главный лепесток направляется на полезный сигнал (рис. 5.1, а).

Пространственно-временная адаптивная обработка использует частотно-зависимое управление диаграммой направленности (рис. 5.1, б)

В процессе обработки сигналов оптимизируется стоимостная функция (функционал качества). Техника адаптивных антенн используется для подавления как узкополосных, так и широкополосных помех. Однако в случае использования нескольких пространственно разнесенных постановщиков помех эффективность применения адаптивных антенн может снизиться. Адаптивная антенна должна состоять не менее чем из двух элементов, чтобы исключить влияние одной помехи. Адаптивная антенна не может противостоять большему количеству постановщиков помех, чем у нее есть элементов антенн.

Различают два подхода применения адаптивных антенн: управление нулями и управление лучом диаграммы направленности (ДН).

Управление нулями ДН. Для адаптивной антенны подбирают такие весовые коэффициенты, чтобы нули ДН были направлены на источники помех. Используется критерий минимизации уровня принимаемой энергии. Целью настройки антенны является противодействие помехам. Однако данный метод понижает уровень полезного сигнала. Техника управления нулями относится к классу до корреляционной обработки и не требует знания параметров полезного сигнала.

Управление (формирование) лучом ДН. ДН антенны формируется таким образом, чтобы максимизировать отношение сигнал/шум. Цель управления: расположить луч антенны в направлении источника полезного сигнала. Если направление на объект известно, то метод управления лучом может быть эффективным и позволит максимизировать (улучшить) отношение сигнал/шум в канале обработки. Однако если направление на источники полезного сигнала и помехи совпадают, метод становится неэффективным. Техника управления лучом ДН относится к классу послекорреляционной обработки, так как принимаемый сигнал предварительно подвергается корреляционной обработке для определения отношения сигнал/шум. Требуется знание направления на источник сигнала и предварительное позиционирование антенны.

Дискретную модель сигнала можно представить в виде вектора

$$\mathbf{Y}^T = [y(t), y(t - t_з), \ldots, y(t - Lt_з)],$$

где $t_з$ – интервал времени задержки многоотводной линии задержки.

Помехи от точечных источников по отношению к ширине спектра полезного сигнала ΔF_S разделим на узкополосные и широкополосные. Для узкополосных помех выполняется условие $\Delta F_{УП} << \Delta F_S$, а для широкополосных – $\Delta F_{ШП} \approx \Delta F_S$.

В простейшем случае узкополосную помеху можно представить как гармонический сигнал со случайной начальной фазой:

$$u_{УП}(t) = A\exp\left[j(w_{УП}t + f_0\right],$$

где A – амплитуда УП; f_0 – случайная начальная фаза; $f_{УП} = w_{УП}/2\pi$ – частота помехи.

Дискретную модель узкополосной помехи в предположении, что огибающая не изменяется за интервал времени $Lt_з$, можно представить как

$$\mathbf{u}_{УП}(t) = u_{УП}(t)\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-jw_{УП}t_з} \\ \vdots \\ e^{-jw_{УП}Lt_з} \end{bmatrix} = u_{УП}(t)\mathbf{C},$$

где $\mathbf{C}$ – вектор, характеризующий набег фаз УП.

Для широкополосных помех в дискретной модели необходимо учитывать и временной сдвиг огибающей:

$$\mathbf{u}_{ШП}(t) = \begin{bmatrix} u_{ШП}(t) \\ u_{ШП}(t - t_з)e^{-jw_{ШП}t_з} \\ \vdots \\ u_{ШП}(t - Lt_з)e^{-jw_{ШП}Lt_з} \end{bmatrix}.$$

Все сигналы помех можно разделить на помехи от внешних источников, внешний и внутренний шумы.

За основную модель внутреннего шума примем белый гауссовский шум с постоянной на всех частотах спектральной плотностью. Мощность шума в полосе приемника

$$s_ш^2 = 2\Delta F_S \frac{N_0}{2},$$

где $N_0/2$ – спектральная плотность шума.

Математическое ожидание белого шума равно нулю, а корреляционная функция определяется в виде δ-функции:

$$M\{n(t)\} = 0\,,\ R(t\,) = M\{n(t)n^*(t - t\,)\} = \frac{N_0}{2} d\,(t\,)\,.$$

Корреляционные и взаимно корреляционные функции и матрицы, соответствующие различным типам сигналов, можно представить следующим образом.

Корреляционная матрица помех от точечных источников

$$\mathbf{R}_{uu} = \overline{\mathbf{U}\mathbf{U}^H} =$$

$$= \begin{bmatrix} R(0) & R(\Delta t_1 - \Delta t_2) & \cdots & R(\Delta t_1 - \Delta t_{N_a}) b_1 b_{N_a}^* \\ R(\Delta t_2 - \Delta t_1) b_2 b_1^* & R(0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R(\Delta t_{N_a} - \Delta t_1) b_{N_a} b_1^* & \cdots & \cdots & R(0) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{UU}^H$ – операция внешнего произведения, H – знак сопряжения по Эрмиту; $R(0) = P_s$ – мощность сигнала; $b_i = \exp(-j \frac{2pd}{l} \sin q\,(N_a - i), i = 1,2,..., N_a$. Здесь верхняя черта над функцией означает операцию усреднения (взятие математического ожидания).

Для пространственно узкополосных сигналов выражение для корреляционной функции может быть упрощено:

$$\mathbf{R}_{uu} = \overline{\mathbf{U}\mathbf{U}^H} = P\mathbf{b}\mathbf{b}^H\,,$$

где $\mathbf{b}^T = \left[b_1, b_2, ..., b_{N_a}\right]$.

Корреляционная матрица внутренних шумов приемных элементов, исходя из свойства дельта-коррелированности, записывается как скалярная матрица

$$\mathbf{R}_{nn} = s_n^2 I\,,$$

где s_n^2 – мощность (дисперсия) внутреннего шума; I – единичная диагональная матрица.

С учетом предположения, что составляющие суммарного сигнала являются взаимно некоррелированными, корреляционная матрица суммарного сигнала запишется в виде

$$\mathbf{R}_{XX} = \overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^H} = P_s \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s^H + \sum_{i=1}^{L_J} P_{n,i} \mathbf{b}_{n,i} \mathbf{b}_{n,i}^H + \sigma_n^2 I,$$

где L_J – количество точечных источников помех.

При рассмотрении корреляционных матриц на выходах элементарных задержек временной компоненты важным является деление на широкополосные и узкополосные помехи.

В общем случае корреляционная матрица задержанных откликов может быть записана в виде

$$\mathbf{R}_{YY} = \begin{bmatrix} R(0) & R(\tau)e^{-j\omega\tau} & \cdots & R(\tau)e^{-j\omega L\tau} \\ & & \ddots & \\ R(\tau)e^{-j\omega L\tau} & \cdots & \cdots & R(0) \end{bmatrix}.$$

Для узкополосного гармонического сигнала $\mathbf{R}_{УП}(\tau) = P_c e^{-j\omega\tau}$, где P_c – мощность сигнала, поэтому

$$\mathbf{R}_{УП} = P_{УП} \mathbf{c}\mathbf{c}^H,$$

где вектор $\mathbf{c} = [1, e^{-j\tau_з}, e^{-j2\tau_з}, \ldots, e^{-jL\tau_з}]^T$, $\tau_з$ – длительность элементарной задержки регистра задержки.

Для широкополосных сигналов с постоянной спектральной плотностью в полосе $2\Delta F$

$$\mathbf{R}_{ШП}(\tau) = P_c \frac{\sin 2\pi\Delta F\tau}{2\pi\Delta F\tau} e^{-j\omega\tau}.$$

Важными для обработки являются матрицы взаимно корреляционной зависимости между отдельными компонентами сигнала. Взаимно корреляционные матрицы во временной компоненте и в пространственной (поляризационной) зависят от типа сигнала.

Пример. Рассмотрим пространственно-временную защиту от помех (STAP) навигационного приемника GPS (рис. 5.2). Антенна представляет собой 7-элементную решетку гексагональной конфигурации. Каждый элемент антенны моделируется как адаптивный трансверсальный КИХ фильтр, построенный на линии задержки с несколькими отводами.

Подавление помехи осуществляется путем управления нулями диаграммы направленности антенной системы по отношению к помеховым сигналам. В процессе подавления семиэлементная антенная решетка (CRPA) управляется по принимаемому образу. Канал АР представляет собой 5-элементную ФАР. Поступающие на входы АР сигналы усиливаются, оцифровываются и преобразуются в квадратурный (I и Q составляющие) поток данных. Пространственно-временной адаптивный процессор (STAP) вычисляет коэффициенты для адаптивной обработки сигналов решая две задачи: одновременного формирования 4 лучей для навигационного приемника и уменьшения влияния многолучевого эффекта распространения сигналов на точность навигационных вычислений.

Решение. Обозначим частотную характеристику передаточной функции канала (антенна–тюнер–приемник) как $G_k(f)$, предполагая, что в качестве помехи используется широкополосный источник сигнала, расположенный в случайной азимутальной точке относительно горизонта. Весовые коэффициенты (ВК) адаптивных фильтров известны. Тогда взаимно корреляционная функция для GPS сигнала и помехи может быть определена как

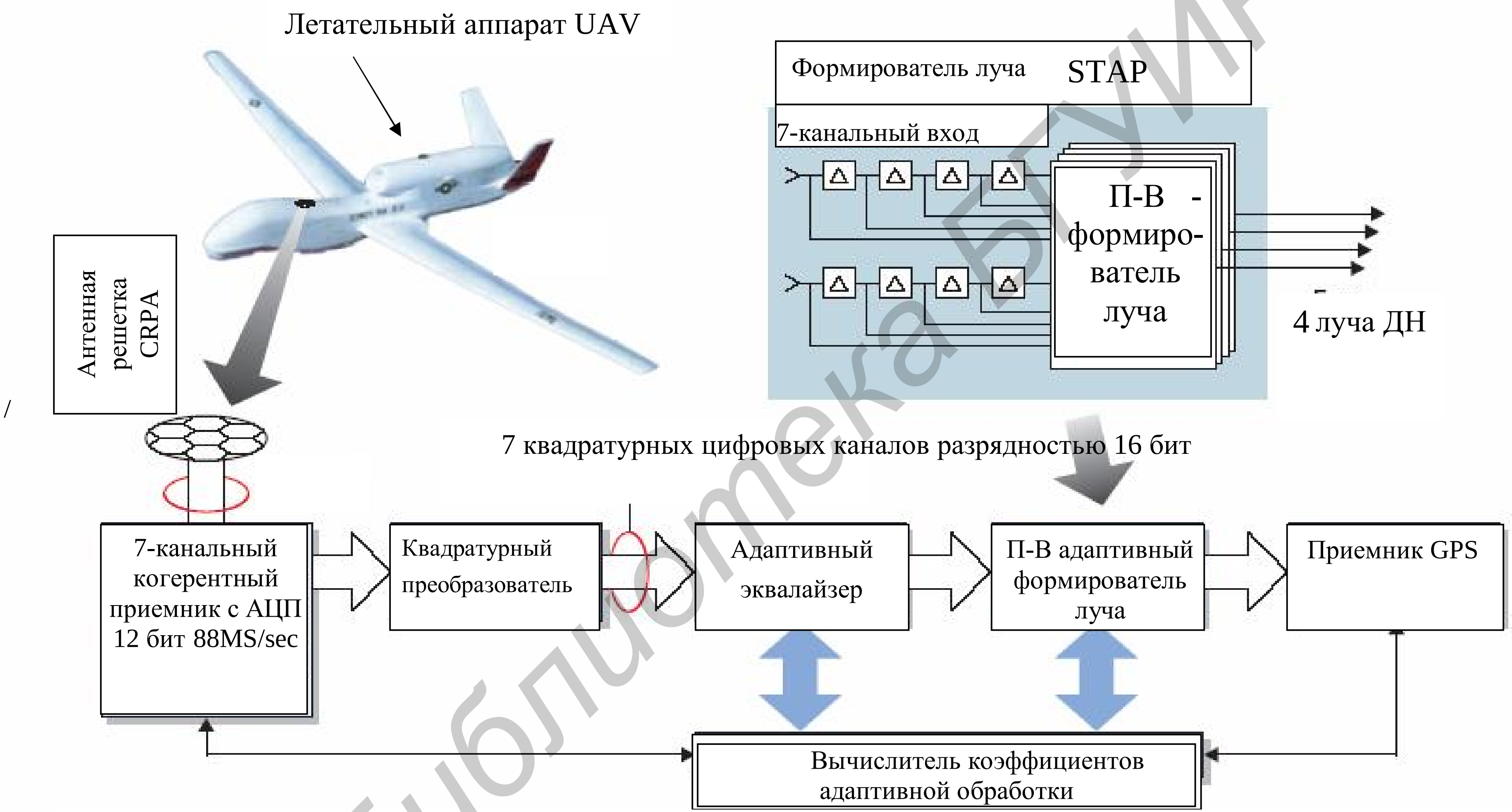


Рис. 5.2. Многоканальная антенная решетка (АР) с многолучевой диаграммой направленности, управляемая по принимаемому образу и устанавливаемая на беспилотном летающем аппарате (UAV)

$$B(t,q,j) = \sum_{k=1}^{K} \int_{-\infty}^{\infty} df P(f) G_k(f) H_k(f,q,j) \exp(j2pft),$$

где f, τ – частота и задержка сигнала, K – количество элементов антенной системы, $P(f)$ – спектральная плотность мощности приходящего GPS сигнала; $G_k(f)$ – частотная характеристика передаточной функции k-го канала (антенна–тюнер–приемник); $H_k(f,\theta,\varphi)$ – частотная характеристика передаточной функции адаптивного КИХ фильтра в k-м канале для сигнала, направление прихода которого задается углами (θ,φ).

5.2. Подавление помехи на основе векторной авторегрессионной (АР) модели

Модель сигнала. Сложный фазоманипулированный сигнал может быть записан как

$$s(t) = \mathrm{Re}\{\sqrt{2P_s}\, d(t) PN(t) \exp(j2p\, f_c t)\},$$

где P_s – мощность передаваемого сигнала, $d(t) \in \{-1, 1\}$ – информационная последовательность, манипулирующая бинарный фазоманипулированный сигнал, f_c – частота несущего колебания. Псевдослучайный код $PN(t)$ может быть записан в виде

$$PN(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{L_p - 1} c_k p_{T_c}(t - kT_c - mT_p),$$

где L_p – длина кода; T_p – период повторения псевдослучайного кода; $T_c = T_p/L_p$ – длительность элементарного символа псевдослучайного кода; $c_k \in \{-1, 1\}$ – символы кодовой последовательности.

Единичная импульсная функция p_{T_c} равна $p_{T_c}(t) = 1$, если $t \in [0, T_c)$, в противном случае импульсная функция равна нулю.

Предполагается, что сигнал проходит через федингующий канал, описывающийся достаточно плоской математической функцией. В канале присутствуют K источников помех. Прием сигнала осуществляется антенной решеткой.

После гетеродинирования на видеочастоту, дискретизации и низкочастотной фильтрации принятый сигнал в векторном виде может быть представлен как

$$\mathbf{r}(n) = a'(n)\mathbf{a}_S(n)d(nT_S - t(n))PN_{lp}(nT_S - t(n)) + \sum_{k=1}^{K}\mathbf{a}_{J_k}(n)J_k(n) + \mathbf{n}(n),$$

где $t(n)$ – время задержки сигнала; $J_k(n)$ – k-й помеховый сигнал мощности P_{J_k}; $\mathbf{n}(n)$ – вектор аддитивного, белого гауссовского шума с ковариацией $s_n^2\mathbf{I}$.

Дискретизация сигнала осуществляется частотой $T_S = T_C/4$, соответствующей полосе псевдослучайного кода, равной $2/T_C$. Коэффициенты $a`(n)$ учитывают изменение канала во времени, имеют среднюю мощность P и в процессе моделирования должны учитывать закон распределения Релея с множителем Райса K_0, а также доплеровскую частоту f_d. Вектор $\mathbf{a}_S(n)$ учитывает направление на желаемый объект связи. Вектор $\mathbf{a}_{J_k}$ учитывает направление на k-й помеховый сигнал. Функция $PN_{lp}(t)$ учитывает изменение формы псевдослучайного кода после прохождения низкочастотного фильтра с полосой пропускания, равной $2/T_C$.

Отношение сигнал–шум после когерентной обработки может быть записано как $q = 10\lg\dfrac{2P}{s_n^2}$. Отношение помеха–сигнал определяется как $J/S = 10\lg\dfrac{P_{J_k}}{P}$.

Обеливающий временной фильтр. В том случае, если помеха представляет собой узкополосный процесс, для ее подавления может быть использован обеливающий фильтр вида

$$H(z^{-1}) = \mathbf{I} - \sum_{l=1}^{L}\mathbf{H}_l z^{-l}.$$

В рамках АР-модели элементы матрицы $\mathbf{H}_l$ могут быть найдены следующим образом. Предположим, что каждая отдельная помеха представляется моделью авторегрессионного процесса порядка меньшим или равным L, а количество помех K меньше или равно количеству элементов M антенной решетки. Каждая помеха в этом случае представляется в виде

$$J_k(n) = \sum_{l=1}^{L} J_{k,l} J_k(n-l) + e_k(n), k = 1, 2, ..., K,$$

где $J_{k,l}$ – коэффициенты АР-модели; $e_k(n)$ – дискретный белый шум.

Тогда вектор помехи определится как

$$\mathbf{J}(n) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{a}_{J_k} J_k(n)$$

с направляющим $(M \times 1)$ вектором $\mathbf{a}_{J_k}$. Вектор $\mathbf{J}(n)$ может быть точно обелен в случае, если $M \geq K$ и векторы $\mathbf{a}_{J_k}$ линейно независимы.

Представим вектор помехи $J(n)$ в виде

$$\mathbf{J}(n) = \mathbf{A} \sum_{i=1}^{L} diag(J_{1,i},...,J_{K,i}) \tilde{\mathbf{J}}(n-l) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}(n),$$

где $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{J_1}(n), \mathbf{a}_{J_2}(n),..., \mathbf{a}_{J_K}(n)]$; $\tilde{\mathbf{J}}(n) = [J_1(n), J_2(n),..., J_K(n)]^T$;
$\tilde{\mathbf{e}}(n) = [e_1(n), e_2(n),..., e_K(n)]^T$.

Учитывая, что справедливо соотношение

$$(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{A} = 1,$$

выражение для вектора модели помехи $J(n)$ можно переписать в виде

$$\mathbf{J}(n) = \mathbf{A} \sum_{i=1}^{L} diag(J_{1,i},...,J_{K,i})(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{A} \tilde{\mathbf{J}}(n-l) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}(n).$$

Поскольку $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{J}}(n) = \mathbf{J}(n)$, то получаем

$$\mathbf{J}(n) = \sum_{i=1}^{L} \mathbf{H}_l \mathbf{J}(n-l) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}(n),$$

где $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}}(n)$ описывает во времени процесс белого шума, а матрица передаточной функции фильтра определяется как

$$\mathbf{H}_l = \mathbf{A} diag(J_{1,l}, J_{2,l},..., J_{K,l})(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H.$$

АР-коэффициенты матрицы $\mathbf{H}_l$ могут быть оценены по методу наименьших квадратов, и для вычислений применен алгоритм RLS. При этом необходимо оценить LM^2 параметров, что требует больших вычислительных затрат и может привести к искажению желаемого сигнала.

С целью уменьшения вычислительной сложности предполагают, что каждая помеха $J_k(n)$ может быть описана с помощью модели стационарного в широком смысле случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и помехи не коррелируют друг с другом.

Пусть помеховый сигнал $J(n)=\sum_{k=1}^{K} J_k(n)$ может быть представлен как авторегрессионный АР-порядка L, т.е.

$$J(n)=\sum_{l=1}^{L} \phi_l J(n-l)+e(n),$$

где $e(n)$ – случайный процесс в виде белого шума с дисперсией σ_e^2.
Тогда каждый скалярный элемент вектора помехи $\mathbf{J}(n)$ может быть точно обелен с помощью обеляющего фильтра, причем векторы матрицы $\mathbf{H}_l$ задаются как $\phi_l\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица.

Определим корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}_e(n,m)=M\{\mathbf{e}(n)\mathbf{e}(n)^H\},$$

где вектор $\mathbf{e}(n)$ – процесс на выходе обеляющего фильтра.

Вектор $\mathbf{e}(n)$ в общем случае не является процессом типа белого шума, и элементы корреляционной матрицы, расположенные вне главной диагонали, $(m \neq n)$ отличны от нуля. Однако если аппроксимировать $\mathbf{e}(n)$ белым шумом, то это позволит значительно упростить алгоритм обработки, поскольку в этом случае требуется оценивать только L параметров.

Совместная оценка параметров сигнала. Коэффициенты АР-модели помехи $\{\phi_l\}$ могут быть оценены совместно с другими параметрами сигнала, такими, как время задержки и другими, используя алгоритмы Калмана.

В качестве исходного выбирается асимптотическая модель суммы помеховых сигналов и аддитивного белого гауссовского шума:

$$\mathbf{J}(n)+\mathbf{n}(n)=\sum_{l=1}^{L} \phi_l[\mathbf{J}(n-l)+\mathbf{n}(n-l)]+\mathbf{e}(n),$$

где $e(n)$ – случайный во времени процесс типа белого шума.

Расширенный фильтр Калмана. Рассмотрим алгоритм слежения за параметрами сигнала на основе расширенного фильтра Калмана.

Предположим, что время задержки $\tau(n)$ является случайным процессом с ненулевым математическим ожиданием и в качестве модели такого процесса можно использовать сумму марковских процессов с нулевыми средними и некий постоянный процесс:

$$\tau(n) = \tau_m(n) + \tau_c(n),$$

$$\tau_m(n) = f_t\, \tau_m(n-1) + v_\tau(n-1),$$

$$\tau_c(n) = \tau_c(n-1),$$

где $v_\tau(n)$ – белый гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией s_t^2; f_t – множество зависящих от времени (джиттер) процессов $\tau_m(n)$.

Параметры зависят от многих факторов, таких, как качество генераторов тактовых импульсов, относительные перемещения приемника, и, как правило, определяются эмпирически. Постоянный процесс $\tau_c(n)$ может рассматриваться как узкополосный АР-процесс.

Параметр $a(n)$ фединга сигнала по модели Райса в предположении, что информационная модуляция отсутствует $d(nT_s) = 1$, может представлен в виде декомпозиции

$$a(n) = a_m(n) + a_c(n),$$

$$a_m(n) = f_a\, a_m(n-1) + v_a(n-1),$$

$$a_c(n) = a_c(n-1),$$

где f_a и дисперсия s_a^2 порождаются белым гаусовским процессом с нулевыми математическими ожиданиями $v_a(n)$ и определяются таким образом, чтобы наиболее адекватно моделировать реальный канал, параметры которого подвержены федингу (модель Райса) и доплеровскому смещению.

Параметры узкополосной помехи могут быть представлены в виде модели АР-процесса первого порядка с нулевым средним значением:

$$f_l(n) = f_f\, f_l(n-1) + v_{f_l}(n-1),\ l = 1,\ldots, L,$$

где f_f и s_f^2 зависят от случайного процесса $v_{f_l}(n)$ типа белого гауссовского шума.

Оценка вектора направления на полезный сигнал $a_s(n)$ может быть получена из внешних источников. Альтернативный метод предполагает непосредственную оценку по принятому сигналу. В последнем случае может быть использована модель

$$a_s^i(n) = f_{a_s} a_s^i(n-1) + v_{a_s}(n-1),\ i = 2,\ldots,M,$$

где $a_s^i(n)$ – i-я компонента вектора $\mathbf{a}_s(n)$; $v_{a_s}(n)$ – случайный процесс с дисперсией $s_{a_s}^2$. Первая компонента $\mathbf{a}_s(n)$ не оценивается, поскольку предполагается, что она соответствует направлению антенны и принимается равной 1.

Введенные модели позволяют составить следующее уравнение в пространстве состояний:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{F}(n-1)\,\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{v}(n-1),$$

где вектор состояния $\mathbf{x}(n) \in C^{4+L+M-1}$ определяется как

$$\mathbf{x}(n) = [\tau_m(n), \tau_c(n), a_m(n), a_c(n), \phi_1(n), \phi_2(n), \ldots, \phi_L(n), a_s^2(n), a_s^3(n), \ldots, a_s^M(n)]^{\mathrm{T}}.$$

Переходная матрица $\mathbf{F}(n)$ задается как

$$\mathbf{F} = diag\{f_t, 1, f_a, \underbrace{f_f, \ldots, f_f}_{L}, \underbrace{f_{a_s}, \ldots, f_{a_s}}_{M-1}\},$$

а ковариационная матрица вектора белого гауссовского шума $\mathrm{v}(n)$ определяется как

$$\mathbf{Q}(n) = diag\{s_t^2, 0, s_a^2, 0, \underbrace{s_f^2, \ldots, s_f^2}_{L}, \underbrace{s_{a_s}^2, \ldots, s_{a_s}^2}_{M-1}\}.$$

Модель измерений может быть представлена в виде

$$\mathbf{r}(n) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(n)\mathbf{r}^T) + \mathbf{e}(n) = a(n)\mathbf{a}_s(n)PN_{lp}(nT_s - t(n)) + \sum_{l=1}^{L} f_l(n)[\mathbf{r}(n-l) - a(n)\mathbf{a}_s \times$$

$$\times PN_{lp}((n-l)T_s - \boldsymbol{\tau}(n)] + \mathbf{e}(n),$$

где $\mathbf{r} = [\mathrm{r}(n\text{-}1), \mathrm{r}(n\text{-}2), \ldots, \mathrm{r}(n\text{-}L)]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{e}(n)$ – предполагается гауссовским белым шумом с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R_e(n)$; вектор $\mathbf{a}_s(n)$ предполагается неизменным в течение LT_s секунд.

Процесс измерения функции $h(\cdot)$ в общем случае является нелинейным, что не позволяет получить частные решения для рекурсивного байесовского оценивателя. Наиболее известные решения этой задачи получены в классе расширенного фильтра Калмана или гауссовского суммирующего фильтра. При этом предполагается, что ошибка оценки задержки находится в пределах аппроксимации процесса линейной моделью.

Упражнения и контрольные задания

1. Адаптивная решетка с двумя элементами, разнесенными на 0,8 длины волны, имеет на входе мощный сигнал, приходящий под углом $\vartheta = 0°$, и еще один сигнал, приходящий под углом $\vartheta = 90°$, с мощностью, составляющей 25 % мощности первого сигнала. Синтезируйте структуру адаптивного фильтра.

2. Адаптация весовых коэффициентов по модели с передаточной функцией $H(z) = 1/(1 - 0{,}25z^{-1})$. Найдите алгоритм адаптации, минимизирующий средний квадрат ошибки.

Литература

1. Уидроу, Б. Адаптивная обработка сигналов / Б. Уидроу, С. Стирз : пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989.

2. Григорьев, В. А. Комбинированная обработка сигналов в системах радиосвязи / В. А. Григорьев. – М. : Эко-Трендз, 2002.

3. Адаптивные радиотехнические системы с антенными решетками / А. К. Журавлев [и др.]. – Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1991.

4. Защита радиолокационных систем от помех. Состояние и тенденции развития / под ред. А. И. Канащекова и В. И. Меркулова. – М. : Радиотехника, 2003.

5. Адаптивная компенсация помех в каналах связи / под ред. И. Ю. Лосева. – М. : Радио и связь, 1988.

6. Адаптивные фильтры : пер. с англ. / под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. – М. : Мир, 1988.

7. Курицын, С. А. Методы адаптивной обработки сигналов передачи данных / С. А. Курицын. – М. : Радио и связь, 1988.

8. Шахтарин, Б.И. Случайные процессы в радиотехнике. Т. 1 : Линейные преобразования / Б. И. Шахтарин. – М. : Гелиос АРВ, 2006.

9. Обнаружение радиосигналов / П. С. Акимов, [и др.]; под ред. А. А. Колосова. – М. : Радио и связь, 1989.

10. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория: справочник / под ред. Я. Д. Ширмана. – М. : Радиотехника, 2007.

11. Schwardt L. DSP813 Lecture. – University of Stellenbosch, May, 2004.

12. Farina A., Timmoneri L. Real-time STAP techniques. Electron. Comm. Eng. J. V.11.No.1.P.13-22.

СОДЕРЖАНИЕ

Св. план 2007, поз. 84

Учебное издание

Саломатин Сергей Борисович
Ходыко Дмитрий Леонидович

ЦИФРОВЫЕ АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ЗАЩИТЫ ОТ ПОМЕХ

Учебно-методическое пособие
по курсам

**ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ,
МЕТОДЫ И СРЕДСТВА РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ ЗАЩИТЫ**

для студентов специальностей «Радиоэлектронные системы»,
«Радиоэлектронная защита информации»
дневной формы обучения

Редактор Н. В. Гриневич
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка Е. Г. Реут

Подписано в печать 19.11.2007.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 5,0.
Уч.-изд. л. 4,7.	Тираж 150 экз.	Заказ 269.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6