

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерного проектирования

Кафедра инженерной и компьютерной графики

**Н. В. Вышинский**

## **ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ**

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики  
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия  
для специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника»,  
1-39 03 01 «Электронные системы безопасности»*

Минск БГУИР 2023

УДК 621.01:531.8(076.1)

ББК 30.12я73

В95

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра машиноведения учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет»  
(протокол № 5 от 22.03.2022);

декан факультета заочного и дистанционного обучения  
учреждения образования «Белорусская государственная академия связи»  
кандидат технических наук, доцент В. В. Боженков

**Вышинский, Н. В.**

В95      Техническая механика. Сборник задач : учеб.-метод. пособие /  
Н. В. Вышинский. – Минск : БГУИР, 2023. – 98 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-686-8.

Излагается теоретический материал и приводятся примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения по таким основным разделам дисциплины «Техническая механика», как статика твердого тела, деформации растяжения (сжатия), кручения, изгиба, кинематика зубчатых передач, точность механизмов, соединение деталей, упругие элементы приборов.

Сборник может быть использован студентами высших учебных заведений при изучении дисциплин «Техническая механика», «Прикладная механика» и других, близких по содержанию, курсов.

**УДК 621.01:531.8(076.1)**

**ББК 30.12я73**

**ISBN 978-985-543-686-8**

© Вышинский Н. В., 2023

© УО «Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники», 2023

## Содержание

Введение.....	4
1 Статика твердого тела.....	5
2 Деформация растяжения и сжатия .....	15
3 Сдвиг и кручение .....	25
4 Деформация изгиба .....	38
5 Геометрический и кинематический расчет зубчатых передач .....	50
5.1 Геометрический расчет зубчатых передач.....	50
5.2 Кинематический расчет зубчатых передач .....	55
6 Точность механизмов.....	68
6.1 Допуски и посадки.....	68
6.2 Точность зубчатых передач.....	73
7 Соединение деталей .....	77
7.1 Расчет резьбовых соединений.....	77
7.2 Расчет сварных соединений.....	80
8 Расчет винтовых цилиндрических пружин растяжения (сжатия) ....	89
Приложение А.....	95
Список использованных источников.....	97

## Введение

Техническая механика является одной из общеинженерных дисциплин, изучаемых студентами технических специальностей высших учебных заведений немашиностроительного профиля. В результате изучения дисциплины студенты приобретают объем знаний, позволяющих изучить и математически описать физику и механику материалов и процессов, сопровождающих работу различных видов механизмов. У них формируются также основы навыков по расчету и конструированию типовых деталей и узлов механических устройств.

Развитию у студентов умений применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач способствуют практические занятия. Для этой цели разработано настоящее пособие, в котором представлены задачи, относящиеся к таким разделам дисциплины, как основы расчетов на прочность и жесткость, кинематическое исследование механизмов, точность механизмов и др. В сборнике кроме задач по всем темам представлены индивидуальные задания, выполнение которых будет способствовать развитию у студентов навыков самостоятельной работы.

# 1 Статика твердого тела

## Определение реакций в опорах при действии на механическую систему плоской системы сил

Свободное твердое тело, т. е. тело, на которое не действуют другие тела, может совершать под действием сил произвольные движения в пространстве. Вступление твердого тела в контакт с другими телами приводит к ограничению его возможных движений. Тела, ограничивающие перемещения твердого тела, называют *связями*. Со стороны связей на твердое тело действуют силы, называемые *реакциями связей*. Величина и направление реакций связей зависят от задаваемых сил и характера ограничений. Тело, лишенное всяких возможностей перемещаться, становится неподвижным, т. е. находится в покое, а система сил, действующих на тело, называется *уравновешенной*. При этом в состав системы сил входят как заданные силы, так и заранее неизвестные реакции связей, определение которых является одной из задач механики.

Рассмотрим механическую систему в виде закрепленного на опорах стержня, на который действует плоская система заданных сил. Стержень, закрепленный на опорах и нагруженный плоской системой сил, называется *балкой*. Существует три типа опор и три типа балок. На рисунке 1.1 изображены следующие опоры:

- а) шарнирно-подвижная;
- б) шарнирно-неподвижная;
- в) жестко закрепленная.

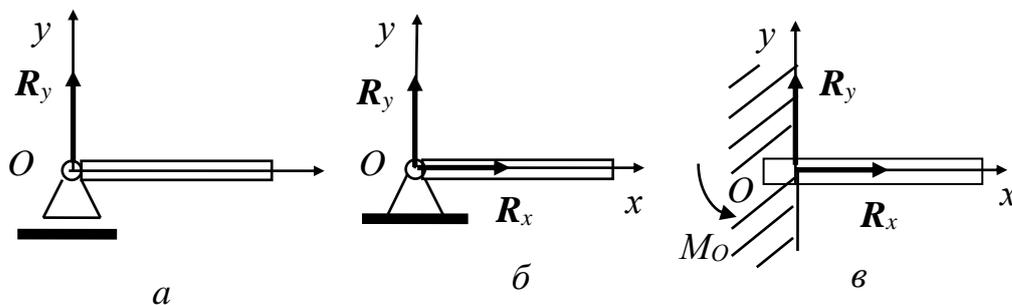


Рисунок 1.1

В зависимости от способа крепления стержня (условия опирания) различают три типа балок (рисунок 1.2):

- а) шарнирно закрепленная;
- б) шарнирно-консольная;
- в) консольная (консоль).

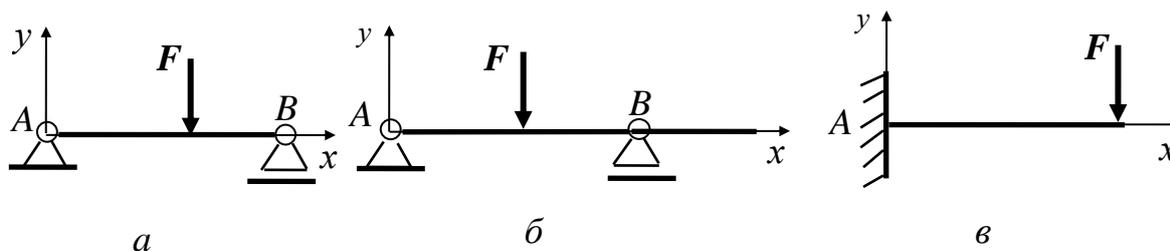


Рисунок 1.2

При действии на балку внешней нагрузки в опорах возникают реакции, по направлению совпадающие с направлением запрещенного данной опорой перемещения балки. Так шарнирно-подвижная опора (см. рисунок 1.1, а) исключает перемещение балки в направлении оси  $OY$ , что обуславливает появление реакции опоры  $R_y$ .

Для шарнирно-неподвижной опоры, исключаяющей перемещение балки в направлении осей  $OX$  и  $OY$  (см. рисунок 1.1, б), будут возникать реакции  $R_x$  и  $R_y$ . При жестко закрепленной опоре (см. рисунок 1.1, в), исключаяющей как перемещение, так и поворот сечения балки, наряду с реакциями  $R_x$  и  $R_y$  возникает и реактивный момент  $M_O$ .

Для нахождения реакций связей при действии плоской системы сил используют три уравнения равновесия:

- сумма проекций всех сил на ось  $X$  равна нулю:  $\sum F_{ix} = 0$ ;
- сумма проекций всех сил на ось  $Y$  равна нулю:  $\sum F_{iy} = 0$ ;
- сумма моментов всех сил относительно оси  $Z$  равна нулю:  $\sum m_z(F_i) = 0$ .

Учитывая, что начало осей координат можно совместить с любой точкой, то последнее уравнение возможно заменить уравнением моментов сил относительно произвольной точки.

**Пример 1.1.** Определить опорные реакции двухконсольной балки (рисунок 1.3), нагруженной сосредоточенной силой  $P = 8$  кН, направленной под углом  $\alpha = 60^\circ$  к оси балки, сосредоточенным моментом  $M = 16$  кНм и распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 2$  кН/м. Для определения длин участков балки принять  $a = 1$  м.

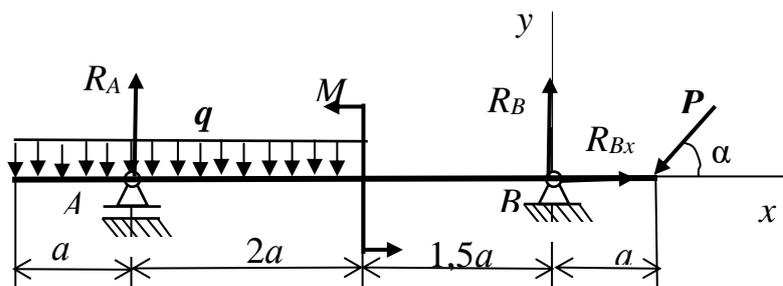


Рисунок 1.3

*Решение.* В шарнирно-подвижной опоре  $A$  балки реакция  $R_A$  будет направлена перпендикулярно оси балки. Выберем направление реакции  $R_A$  вверх – в положительном направлении оси  $y$ . Для шарнирно-неподвижной опоры  $B$  разложим реакцию  $R_B$  на две составляющие:  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$ , направив их в положительном направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Балка нагружена плоской системой сил, условия равновесия для которой записываются в виде  $\Sigma F_{ix} = 0$ ;  $\Sigma F_{iy} = 0$ ;  $\Sigma m_z(F_i) = 0$ . Запишем условие равновесия системы сил, действующих на балку, в проекциях этих сил на ось  $x$ . Отличные от нуля проекции на ось  $x$  имеют только сила  $P$  и реакция опоры  $R_B$ .  $\Sigma F_{ix} = R_{Bx} - P \cos \alpha = 0$ . Откуда

$$R_{Bx} = P \cos \alpha = 8 \cos 60^\circ = 4 \text{ (кН)}.$$

Для нахождения реакции  $R_A$  и вертикальной составляющей  $R_{By}$  реакции  $R_B$  будем использовать уравнение моментов сил. Записав уравнение относительно точки  $A$  (из уравнения исключается реакция  $R_A$ ), определим  $R_{By}$ , а из уравнения моментов сил относительно точки  $B$  (из уравнения исключается  $R_B$ ) определим  $R_A$ . Положительным примем момент силы, направленный против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке.

$$\Sigma m_A(F_i) = 0,5qa^2 - 2qa^2 + M + 3,5a R_{By} - 4,5a P \sin \alpha = 0;$$

$$R_{By} = (-0,5qa^2 + 2qa^2 - M + 4,5a P \sin \alpha) / 3,5a = 5,193 \text{ (кН)}.$$

$$\Sigma m_B(F_i) = 9 qa^2 + M - 3,5a R_A - a P \sin \alpha = 0;$$

$$R_A = (9 qa^2 + M - a P \sin \alpha) / 3,5a = 7,735 \text{ (кН)}.$$

Для проверки правильности определения значений  $R_A$  и  $R_{By}$  воспользуемся уравнением для суммы проекций всех сил на ось  $y$ . При правильном определении значений  $R_A$  и  $R_{By}$  эта сумма будет равна нулю. В нашем случае

$$\Sigma F_{iy} = R_A - 3aq + R_{By} - P \sin \alpha = 7,735 - 6 + 5,193 - 8 \cdot 0,866 = 0.$$

Опорная реакция  $R_A$  и составляющая  $R_{By}$  опорной реакции  $R_B$  определены верно.

$$\text{Ответ: } R_A = 7,735 \text{ кН; } R_B = (R_{Bx}^2 + R_{By}^2)^{1/2} = (4^2 + 5,193^2)^{1/2} = 6,555 \text{ (кН)}.$$

**Пример 1.2.** Определить реакции заделки  $A$  жестко закрепленной балки (рисунок 1.4), на которую действует сила  $P = 15$  кН, сосредоточенный

момент  $M = 12$  кНм и распределенная нагрузка интенсивностью  $q = 6$  кН/м. Для определения длин участков балки примем значение  $a = 1$  м.

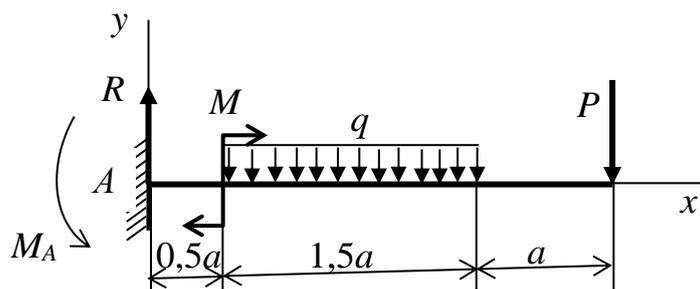


Рисунок 1.4

*Решение.* Жесткое закрепление балки исключает в точке  $A$  как линейное перемещение, так и поворот сечения. Следовательно, в точке  $A$  будет присутствовать реакция  $R_A$  и реактивный момент  $M_A$ . Реакция  $R_A$  будет перпендикулярна оси  $x$ , так как другие внешние силы, действующие на балку, не имеют отличные от нуля проекции на ось  $x$ .

Величину реакции  $R_A$  определим из условия  $\Sigma F_{iy} = 0$ .

$$\Sigma F_{iy} = R_A - 1,5aq - P = 0, \text{ откуда } R_A = 1,5aq + P = 1,5 \cdot 1 \cdot 6 + 15 = 24 \text{ (кН)}.$$

Для определения значения реактивного момента  $M_A$  запишем уравнение моментов сил относительно точки  $A$ :

$$\Sigma m_A(F_i) = M_A - M - 1,5aq \cdot 1,25a - 3aP = 0, \text{ откуда}$$

$$M_A = M + 1,5aq \cdot 1,25a + 3aP = 12 + 1,5 \cdot 6 \cdot 1,25 + 3 \cdot 15 = 68,25 \text{ (кНм)}.$$

Ответ:  $R_A = 24$  кН,  $M_A = 68,25$  кНм.

### Задачи

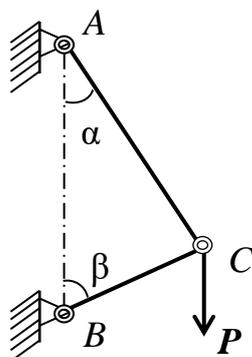


Рисунок 1.5

**1.1** Стержни  $AC$  и  $BC$  соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров (рисунок 1.5). На шарнирный болт  $C$  действует вертикальная сила  $P = 1000$  Н.

Определить реакции этих стержней на шарнирный болт  $C$ , если углы, составляемые стержнями со стеной, равны:  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ .

Ответ: 866 Н; 500 Н.

**1.2** Уличный фонарь подвешен в точке  $B$  к середине троса  $ABC$ , прикрепленного концами к крюкам  $A$  и  $C$ , находящимся на одной горизонтали (рисунок 1.6). Определить натяжения  $T_1$  и  $T_2$  в частях троса  $AB$  и  $BC$ , если вес фонаря равен  $150$  Н, длина всего троса  $ABC$  равна  $20$  м и отклонение точки его подвеса от горизонтали  $BD = 0,1$  м. Весом троса пренебречь.

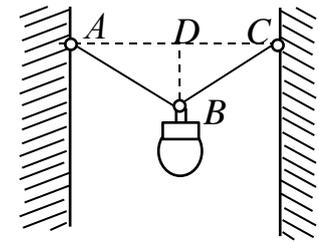


Рисунок 1.6

Ответ:  $T_1 = T_2 = 7,5$  кН.

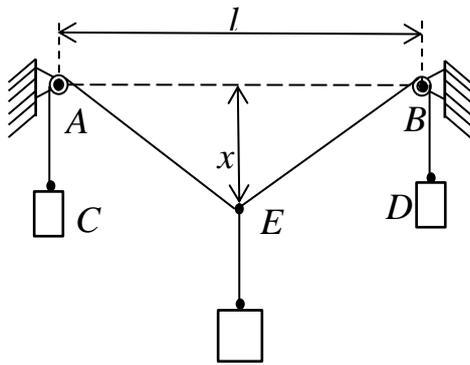


Рисунок 1.7

**1.3** Через два блока  $A$  и  $B$ , находящихся на одной горизонтальной прямой  $AB = l$ , перекинута веревка  $CAEBD$  (рисунок 1.7). К концам  $C$  и  $D$  веревки подвешены гири весом  $p$  каждая, а к точке  $E$  – гиря весом  $P$ . Определить, пренебрегая трением на блоках и их размерами, расстояние  $x$  от точки  $E$  до прямой  $AB$  в положении равновесия. Весом веревки пренебречь.

Ответ:  $\frac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$ .

**1.4** К веревке  $AB$ , один конец которой закреплен в точке  $A$ , привязаны в точке  $B$  груз  $P$  и веревка  $BCD$ , перекинутая через блок (рисунок 1.8); к концу ее  $D$  привязана гиря  $Q$  весом  $100$  Н. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение  $T$  веревки  $AB$  и величину груза  $P$ , если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью, равны:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

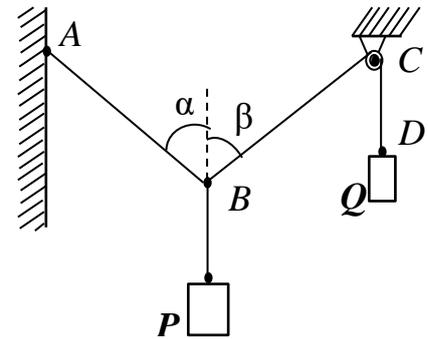


Рисунок 1.8

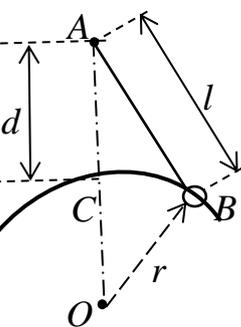


Рисунок 1.9

**1.5** Шарик  $B$  весом  $P$  подвешен к неподвижной точке  $A$  посредством нити  $AB$  и лежит на поверхности гладкой сферы радиусом  $r$ ; расстояние от точки  $A$  до поверхности сферы  $AC = d$ , длина нити  $AB = l$ , прямая  $AO$  вертикальна (рисунок 1.9). Определить натяжение  $T$  нити и реакцию  $Q$  сферы. Радиусом шарика пренебречь.

Ответ:  $T = P \frac{l}{d+r}$ ;  $Q = P \frac{r}{d+r}$ .

**1.6** Балка  $AB$  поддерживается в горизонтальном положении стержнем  $CD$  (рисунок 1.10); крепления в  $A$ ,  $C$  и  $D$  – шарнирные. Определить реакции опор  $A$  и  $D$ , если на конце балки действует вертикальная сила  $P = 50$  кН. Размеры указаны на чертеже. Весом пренебречь.

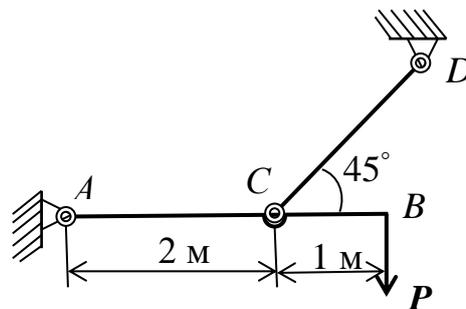


Рисунок 1.10

Ответ:  $R_A = 79$  кН;  $R_D = 106$  кН.

**1.7** Балка  $AB$  шарнирно закреплена на неподвижной опоре  $A$ , у конца  $B$  опора шарнирно-подвижная (рисунок 1.11). В середине балки, под углом  $45^\circ$  к ее оси, действует сила  $P = 20$  кН. Определить реакции опор для случаев  $a$  и  $b$ , взяв размеры с чертежей и пренебрегая весом балки.

Ответ:  $a)$   $R_A = 15,8$  кН;  $R_B = 7,1$  кН;  $b)$   $R_A = 22,4$  кН;  $R_B = 10$  кН.

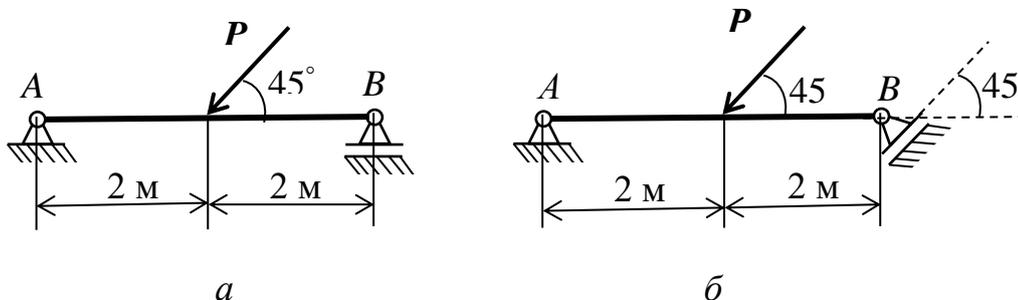


Рисунок 1.11

**1.8** Электрический провод  $ACB$  натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, стрела провисания которой  $CD = f = 1$  м (рисунок 1.12). Расстояние между столбами  $AB = l = 40$  м. Вес провода  $Q = 0,4$  кН. Определить натяжения провода:  $T_C$  в средней точке,  $T_A$  и  $T_B$  на концах.

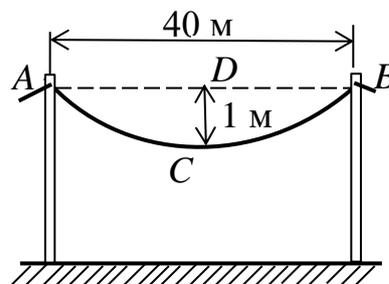


Рисунок 1.12

При решении задачи считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии  $l/4$  от ближайшего столба.

Ответ:  $T_C = Ql/(8f) = 2$  кН;  $T_A = T_B = 2,01$  кН.

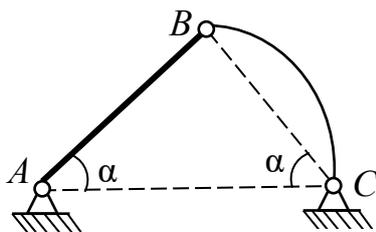


Рисунок 1.13

**1.9** Прямолинейный однородный брус  $AB$  весом  $P$  и невесомый стержень  $BC$  с криволинейной осью произвольного очертания соединены шарнирно в точке  $B$  и также соединены с опорами  $A$  и  $C$ , расположенными на одной горизонтали  $AC$  (рисунок 1.13). Прямые  $AB$  и  $BC$  образуют с прямой  $AC$  углы  $\alpha = 45^\circ$ . Определить реакции опор  $A$  и  $C$ .

Ответ:  $R_A = \frac{\sqrt{10}}{4} P$ ;  $R_C = \frac{\sqrt{2}}{4} P$ .

**1.10** Однородный стержень  $AB$ , длина которого 1 м, а вес 20 Н, подвешен горизонтально на двух параллельных веревках  $AC$  и  $BD$  (рисунок 1.14). К стержню в точке  $E$  на расстоянии  $AE = 0,25$  м подвешен груз  $P = 120$  Н. Определить натяжение веревок  $T_C$  и  $T_D$ .

Ответ:  $T_C = 100$  Н;  $T_D = 40$  Н.

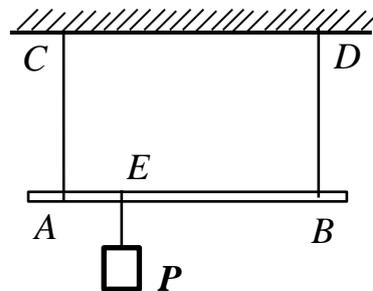


Рисунок 1.14

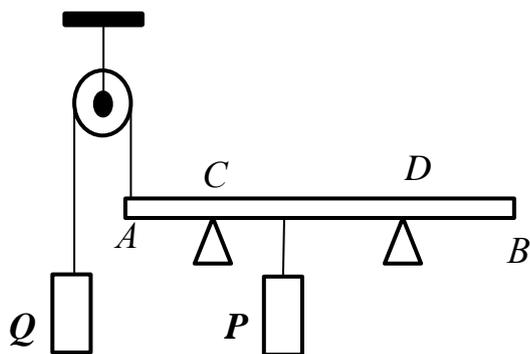


Рисунок 1.15

**1.11** Балка  $AB$  длиной 10 м и весом 2 кН лежит на двух опорах  $C$  и  $D$  (рисунок 1.15). Опора  $C$  отстоит от конца  $A$  на 2 м, опора  $D$  от конца  $B$  – на 3 м. Конец балки  $A$  оттягивается вертикально вверх посредством перекинутого через блок троса, на котором подвешен груз  $Q$  весом 3 кН. На расстоянии 3 м от конца  $A$  к балке подвешен груз  $P$  весом 8 кН. Определить реакции опор, пренебрегая трением на блоке.

Ответ:  $R_C = 3$  кН;  $R_D = 4$  кН.

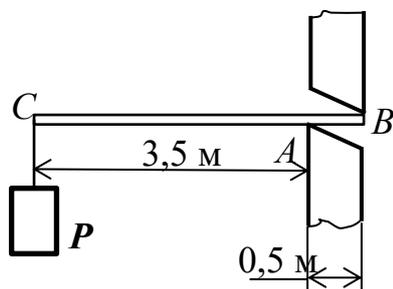


Рисунок 1.16

**1.12** Однородная горизонтальная балка длиной 4 м и весом 5 кН заложена в стену, толщина которой равна 0,5 м, так, что опирается на нее в точках  $A$  и  $B$  (рисунок 1.16). Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки  $C$  подвешен груз  $P$  весом 40 кН.

Ответ:  $R_A = 340$  кН;  $R_B = 295$  кН.

**1.13** Горизонтальная балка, поддерживающая балкон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q = 2$  кН/м (рисунок 1.17). На балку у свободного конца передается нагрузка от колонны  $P = 2$  кН. Расстояние оси колонны от стены  $l = 1,5$  м. Определить реакции заделки.

Ответ:  $R = 5$  кН;  $M = 5,25$  кНм.

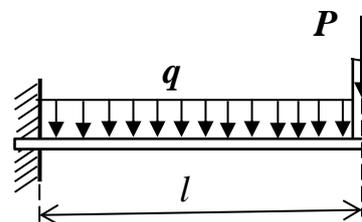


Рисунок 1.17

**1.14** На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил ( $P, P$ ), на левую консоль – равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , а в точке  $D$  правой консоли – вертикальная нагрузка  $Q$  (рисунок 1.18). Определить реакции опор, если  $P = 10$  кН,  $Q = 20$  кН,  $q = 20$  кН/м,  $a = 0,8$  м.

Ответ:  $R_A = 15,2$  кН;  $R_B = 21,2$  кН.

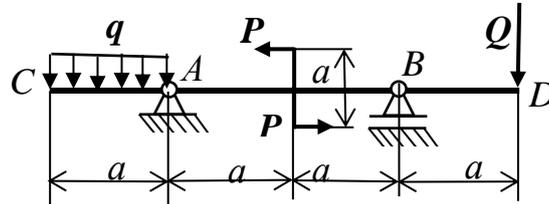


Рисунок 1.18

**1.15** Определить реакции опор  $A$  и  $B$  балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке 1.19.

Ответ:  $X_A = 20$  кН;  $Y_A = -43,2$  кН;  $Y_B = 77,8$  кН.

**1.16** Определить реакции опор  $A$  и  $B$  балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке 1.20.

Ответ:  $X_A = 26$  кН;  $Y_A = 42$  кН;  $X_B = 156$  кН.

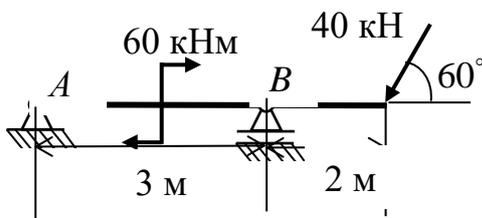


Рисунок 1.19

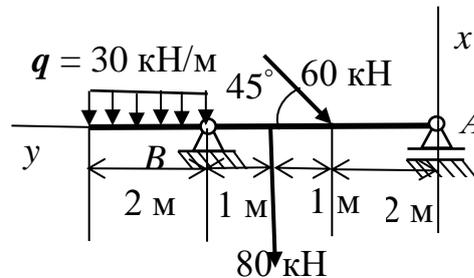


Рисунок 1.20

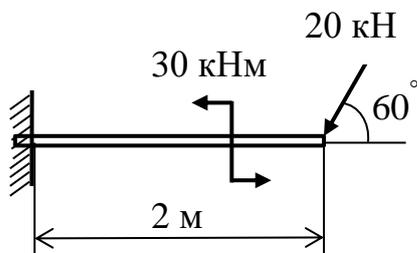


Рисунок 1.21

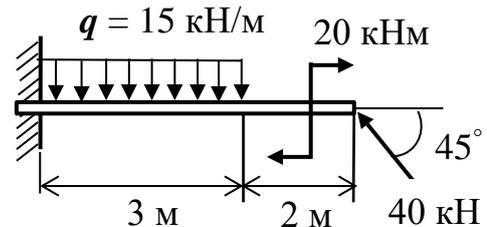


Рисунок 1.22

**1.17** Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке 1.21 и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

Ответ:  $X = 10$  кН;  $Y = 17,3$  кН;  $M = 4,7$  кНм.

**1.18** Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке 1.22 и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

Ответ:  $X = 28$  кН;  $Y = 17$  кН;  $M = -53,5$  кНм.

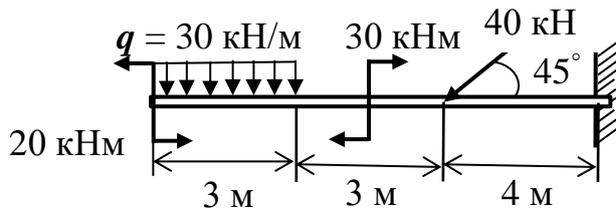


Рисунок 1.23

**1.19** Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке 1.23 и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

Ответ:  $X = 118$  кН;  $Y = -28$  кН;  $M = -868$  кНм.

**1.20** Определить реакции опор  $A$  и  $B$  горизонтальной балки  $AB$ , если на нее действует сосредоточенная сила  $P$ , пара сил с моментом  $m$  и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ . Схемы десяти типов балок даны на рисунке 1.24, а числовые данные для расчета приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные для расчета реакций в опорах

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P$ , кН	2	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$q$ , кН/м	8	7,5	7	6,5	6	5,5	5	4,5	4	3,5
$m$ , Н·м	8000	7500	7000	6500	6000	5500	5000	4500	4000	3500
$l$ , м	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4
$d_1$ , м	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2
$d_2$ , м	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
$\alpha$ , рад	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$

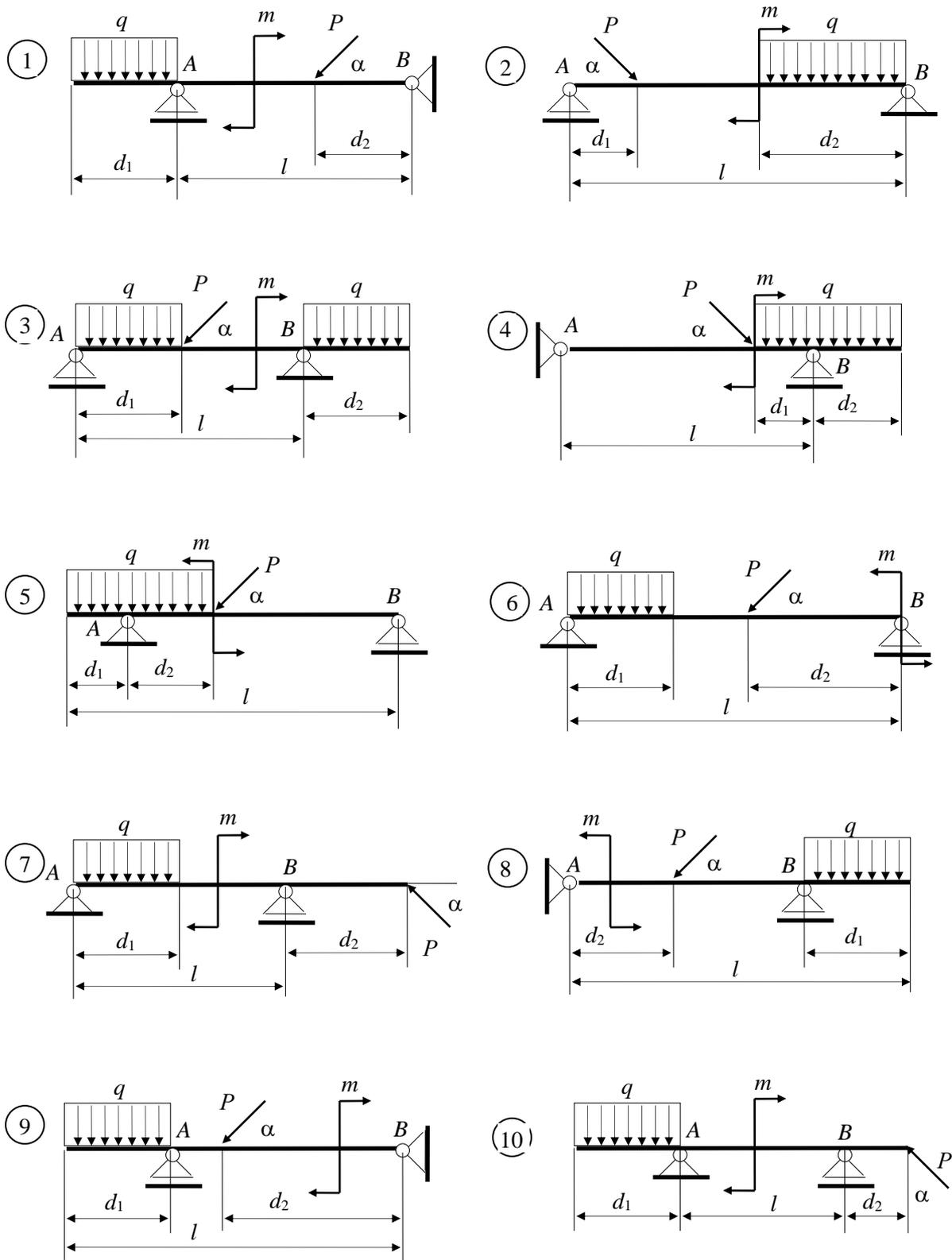


Рисунок 1.24

## 2 Деформация растяжения и сжатия

Внутренние силы упругости, возникающие в материале образца, подвергнутого деформации растяжения или сжатия, характеризуются одной из составляющих главного вектора внутренних сил упругости – нормальной силой. Нормальная сила направлена перпендикулярно поперечному сечению образца в направлении деформации.

Для нахождения внутренних сил используется метод сечений. В соответствии с этим методом нормальная сила  $N$ , действующая в данном сечении, будет равна сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к сечению. Это утверждение математически запишется в виде

$$N = \sum_1^n F_i + \sum_1^k \int q_i dx ,$$

где  $F_i$  – проекция на нормаль к сечению  $i$ -й силы из  $n$  внешних сосредоточенных сил;  $q_i$  – интенсивность  $i$ -й распределенной силы из  $k$  внешних распределенных сил.

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная сила интенсивностью  $q_i$ , а суммирование – по всем участкам.

Оценкой интенсивности внутренних сил упругости, действующих по некоторому сечению тела, является нормальное напряжение  $\sigma$ , определяемое как нормальная сила, действующая на единице площади и приложенная в данной точке сечения. При выполнении расчетов принимают, что нормальные напряжения как при растяжении, так и при сжатии тела равномерно распределяются по его сечению. Тогда нормальные напряжения определяются как отношение нормальной силы  $N$  к площади сечения  $S$ , т. е.

$$\sigma = \frac{N}{S} .$$

Деформация стержня характеризуется абсолютными и относительными деформациями. Если  $\Delta l = l_1 - l$  и  $\Delta d = d - d_1$  соответственно абсолютные продольная и поперечная деформации стержня при его растяжении, то  $\varepsilon = \Delta l / l$  и  $\mu = \Delta d / d$  будут соответственно относительной продольной и относительной поперечной деформациями. Здесь  $l$  и  $d$  – длина и поперечный размер стержня до деформации, а  $l_1$  и  $d_1$  – после деформации. Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной называется коэффициентом Пуассона  $\nu$ :  $\nu = \mu / \varepsilon$ . Коэффициент Пуассона характеризует упругие свойства материала и для большинства материалов (металлов) является величиной постоянной ( $0 \leq \nu \leq 0,5$ ).

В соответствии с законом Гука нормальные напряжения при деформации растяжения (сжатия) пропорциональны относительным деформациям,

т. е.  $\sigma = E\varepsilon$ . Коэффициент пропорциональности  $E$ , называемый модулем упругости 1-го рода, характеризует упругие свойства материала деформируемого тела.

Если учесть, что  $\sigma = N/S$ , а  $\varepsilon = \Delta l/l$ , то можно перейти от выражения закона Гука в относительных величинах к выражению в абсолютных величинах в виде

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}.$$

Произведение  $ES$  называется жесткостью стержня при растяжении (сжатии). Этот параметр учитывает влияние на деформацию стержня как свойств материала, так и его конструктивных особенностей (площади сечения). Чем больше жесткость – тем меньше деформация тела.

Для тел (стержней), состоящих из нескольких участков, в пределах которых значения  $E$ ,  $N$  и  $S$  постоянные, величина деформации всего тела будет определяться как сумма деформаций всех его участков, т. е.

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i l_i}{E_i S_i}.$$

Понятия «деформация» и «перемещение» не всегда обозначают одно и то же. Возможно, что некоторая часть тела может не деформироваться, но перемещаться за счет деформации других частей тела.

Расчеты на прочность при деформации растяжения (сжатия) заключаются в определении нормальных напряжений, действующих в сечениях, и сравнении их значений со значениями предельно допустимых напряжений для материала данного тела, т. е.

$$\sigma = N/S \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  – предельно допустимое напряжение для материала деформируемого тела.

Из последнего выражения можно найти предельное значение нормальной силы  $[N] \leq S[\sigma]$ , или минимально допустимое значение площади сечения  $S \geq N/[\sigma]$ .

**Пример 2.1.** Определить напряжения в сечениях 1–1 и 2–2 и полное удлинение стального стержня, нагруженного силами  $P_1 = 20$  кН,  $P_2 = P_3 = 10$  кН, как показано на рисунке 2.1, если площадь его поперечного сечения равна  $S = 400$  мм<sup>2</sup>. Принять модуль упругости стали равным  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

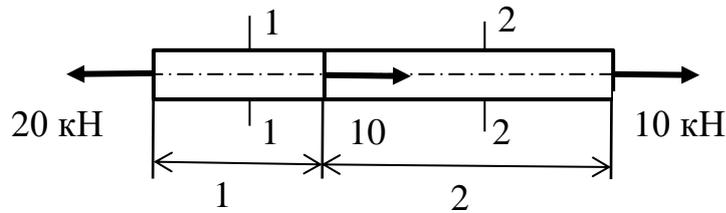


Рисунок 2.1

*Решение.* Мысленно рассекаем стержень сечением 1–1 и отбрасываем, например, его правую часть. Для того чтобы уравновесить внешнюю силу  $P_1$ , приложенную к оставшейся левой части, равнодействующая внутренних сил в сечении 1–1 должна по модулю равняться силе  $P_1$  и быть направленной вправо, в наружную сторону от оставшейся части. Таким образом, в сечении 1–1 усилие растягивающее и равно  $N_1 = P_1 = 20$  кН. Путем подобных рассуждений устанавливаем, что в сечении 2–2 усилие тоже растягивающее и равно  $N_2 = 10$  кН.

Теперь определим напряжения. В сечении 1–1 оно равно

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S} = \frac{2 \cdot 10^4}{400} = 50 \frac{H}{\text{мм}^2} = 50 \text{ МПа},$$

а в сечении 2–2

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S} = \frac{1 \cdot 10^4}{400} = 25 \frac{H}{\text{мм}^2} = 25 \text{ МПа}.$$

Так как усилие в левом участке (длиной 1 м) не равно усилию в правом участке (длиной 2 м), то деформации каждого участка надо определить отдельно. Полная деформация стержня получится путем суммирования (алгебраического, если они разных знаков) деформаций отдельных участков. В нашем случае

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{ES} + \frac{N_2 l_2}{ES} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 0,5 \text{ мм}.$$

Ответ:  $\sigma_{1-1} = 50$  МПа,  $\sigma_{2-2} = 25$  МПа,  $\Delta l = 0,5$  мм.

**Пример 2.2.** Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием 100 кН. Относительное удлинение не должно превышать  $1/2000$ , а напряжение не должно быть больше 120 МПа. Найти наименьший диаметр стержня, удовлетворяющий этим требованиям.

*Решение.* Выразим относительную деформацию через нагрузку  $P$ , площадь поперечного сечения  $\pi d^2/4$  и модуль упругости  $E$  и приравняем ее заданной допускаемой относительной деформации  $[\varepsilon]$ :

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\varepsilon].$$

Отсюда найдем необходимый диаметр, удовлетворяющий данному условию:

$$d = 2 \sqrt{\frac{P}{\pi E [\varepsilon]}} = 2 \sqrt{\frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^5}} = 35,7 \text{ мм.}$$

Теперь независимо от предыдущего решения напишем условие прочности через  $P$ ,  $\pi d^2/4$  и  $[\sigma]$ :

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\sigma].$$

Откуда

$$d = 2 \sqrt{\frac{P}{\pi [\sigma]}} = 2 \sqrt{\frac{10^5}{3,14 \cdot 120}} = 32,5 \text{ мм.}$$

Из двух найденных диаметров необходимо взять больший, т. е. 35,7 мм, так как меньший диаметр не будет удовлетворять условию жесткости.

Ответ:  $d = 35,7$  мм.

**Пример 2.3.** Между неподвижными точками  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно 2 м (рисунок 2.2), горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 мм. Какую необходимо приложить силу  $P$  в точке  $C$  по середине длины проволоки и какое в этом случае возникает напряжение в ней, если смещение точки  $C$  по направлению силы  $P$  достигнет 45 мм? Собственным весом проволоки пренебречь.

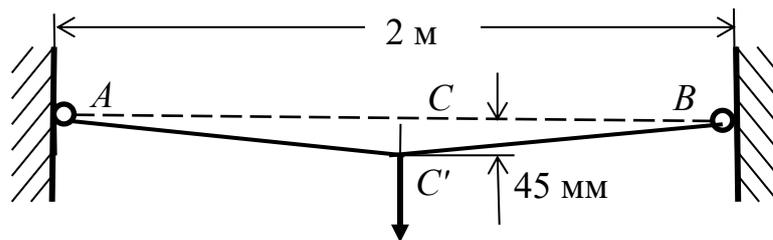


Рисунок 2.2

*Решение.* Абсолютное удлинение одной половины проволоки после приложения силы  $P$  будет равно разности длин  $CB$  и  $C'B$ :

$$\Delta l = \sqrt{1000^2 + 45^2} - 1000 = 1 \text{ мм.}$$

Ее относительное удлинение составит

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Тогда напряжение в проволоке мы можем получить, используя закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,001 = 200 \text{ МПа.}$$

Зная напряжение, определяем усилие в проволоке:

$$N = \sigma S = 200 \cdot 3,14 \cdot 1^2/4 = 157 \text{ Н.}$$

Точка  $C'$  будет находиться в равновесии под действием силы  $P$  и двух усилий  $N$ . Из подобия треугольника сил и треугольника  $C'SB$  находим, что

$$\frac{\frac{P}{2}}{45} = \frac{N}{1001},$$

откуда

$$P = 2 \cdot 45 \frac{N}{1001} = \frac{9 \cdot 157}{1001} = 14,1 \text{ Н.}$$

Ответ:  $P = 14,1 \text{ Н.}$

### Задачи

**2.1** Определить напряжения во всех участках изображенного на рисунке 2.3 стального стержня и полную его деформацию, если площадь поперечного сечения равна  $S = 10^3 \text{ мм}^2$ , а приложенные силы равны по модулю  $P_1 = 40 \text{ кН}$ ,  $P_2 = P_3 = 20 \text{ кН}$ . Модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Ответ: в левом участке  $\sigma = 40 \text{ МПа}$ ; в среднем –  $\sigma = 0$ ; в правом участке  $\sigma = -20 \text{ МПа}$ ;  $\Delta l = 0$ .

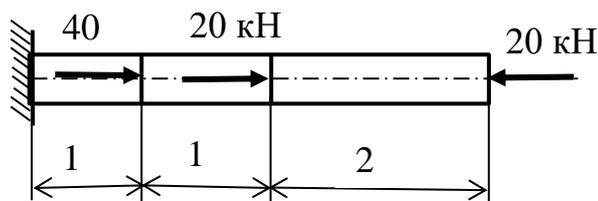


Рисунок 2.3

**2.2** Определить напряжения в обеих частях изображенного на рисунке 2.4 стержня, а также полное его удлинение при действии растягивающей силы  $P = 40$  кН. Материал стержня – сталь ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа), сечение – круглое.

Ответ: в левой части  $\sigma = 127,6$  МПа; в правой –  $\sigma = 31,9$  МПа;  $\Delta l = 0,575$  мм.

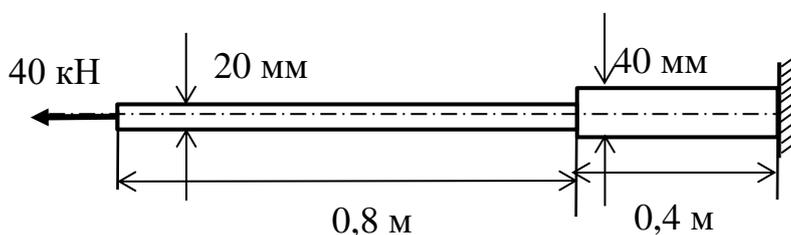


Рисунок 2.4

**2.3** Во время испытания проволоки диаметром 1,2 мм и длиной 0,1 м под нагрузкой 100 Н было измерено удлинение 0,044 мм. Чему равен модуль упругости материала проволоки?

Ответ:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**2.4** Изображенный на рисунке 2.5 стальной стержень имеет в правой части сплошное круглое, а в левой части – кольцевое сечение. Определить напряжения в обеих частях стержня и полное его удлинение, если  $d = 2$  мм,  $D = 4$  мм,  $l_1 = 0,02$  м,  $l_2 = 0,04$  м,  $P = 1$  кН.

Ответ: в левом участке  $\sigma = 106,16$  МПа, в правом –  $\sigma = 79,62$  МПа,  $\Delta l = 0,0266$  мм.

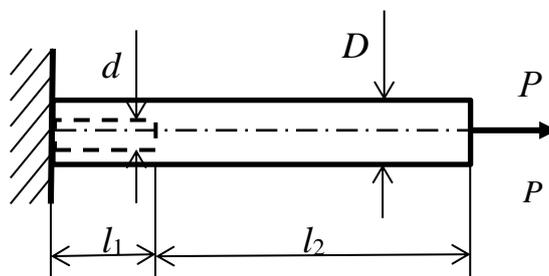


Рисунок 2.5

**2.5** Под действием приложенной нагрузки составной стержень квадратного сечения (рисунок 2.6) удлиняется на 0,2 мм. Модуль упругости алюминия принять равным  $0,75 \cdot 10^5$  МПа, а бронзы –  $1,1 \cdot 10^5$  МПа. Определить величину нагрузки  $P$ , если стороны квадратов  $a = 20$  мм,  $b = 50$  мм,  $l = 0,1$  м.

Ответ:  $P = 37,3$  кН.

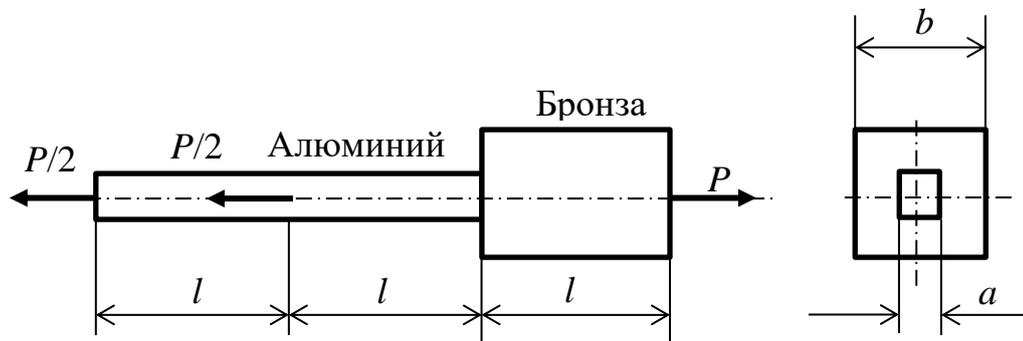


Рисунок 2.6

**2.6** Определить величину изменения диаметра  $D$  тонкого кольца с поперечным сечением  $S$ , выполненного из материала с модулем  $E$ , под влиянием равномерно распределенного внутреннего давления интенсивностью  $q$ .

Ответ:  $\Delta D = \frac{qD^2}{2ES}$ .

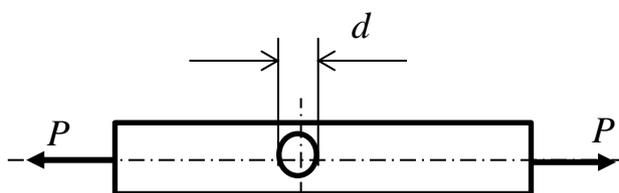


Рисунок 2.7

**2.7** Стержень квадратного поперечного сечения (рисунок 2.7) растягивается силами  $P = 1,5$  кН. Он ослаблен сквозным отверстием диаметром  $d = 2$  мм. Чему должна равняться сторона сечения  $a$  при допустимом напряжении для материала стержня, равном  $1 \cdot 10^2$  МПа?

Ответ:  $a = 5$  мм.

**2.8** Тонкая, бесконечно длинная упругая лента, площадь поперечного сечения которой  $S$  и погонный вес  $q$ , свободно лежит на шероховатой поверхности. Определить силу  $P$ , необходимую для смещения конца ленты на  $\delta$ . Коэффициент трения ленты по поверхности  $\mu$ , модуль упругости материала ленты  $E$ .

Ответ:  $P = \sqrt{2\delta ESq\mu}$ .

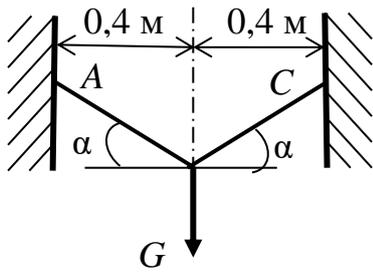


Рисунок 2.8

**2.9** К двум стержням одинакового поперечного сечения площадью  $S = 10 \text{ мм}^2$ , наклоненным к горизонту под углом  $\alpha = 30^\circ$ , подвешен груз  $G$ . Определить безопасную величину этого груза, если допустимое напряжение для материала стержней равно  $[\sigma] = 0,6 \cdot 10^2 \text{ МПа}$ , а модуль упругости  $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Ответ:  $G = 0,6 \cdot 10^2 \text{ Н}$ .

**2.10** Определить в задаче 2.9 перемещение  $\delta$  точки  $B$  подвеса груза  $G$ .

Ответ:  $\delta = 2,8 \text{ мм}$ .

**2.11** Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений для стержней, схемы которых приведены на рисунке 2.9. Площадь поперечных сечений участков стержней  $S$  и  $2S$ .

**2.12** Груз подвешен к стальной проволоке, размеры которой до деформации были следующими:  $l = 3 \text{ м}$  и  $d = 1,6 \text{ мм}$ . Удлинение проволоки оказалось равным  $1,5 \text{ мм}$ . Затем тот же груз был подвешен к медной проволоке длиной  $l_1 = 1,8 \text{ м}$  и диаметром  $d_1 = 3,2 \text{ мм}$ . Ее удлинение получилось равным  $0,39 \text{ мм}$ . Определить модуль упругости медной проволоки, если модуль стальной  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Ответ:  $E_1 = 1,15 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

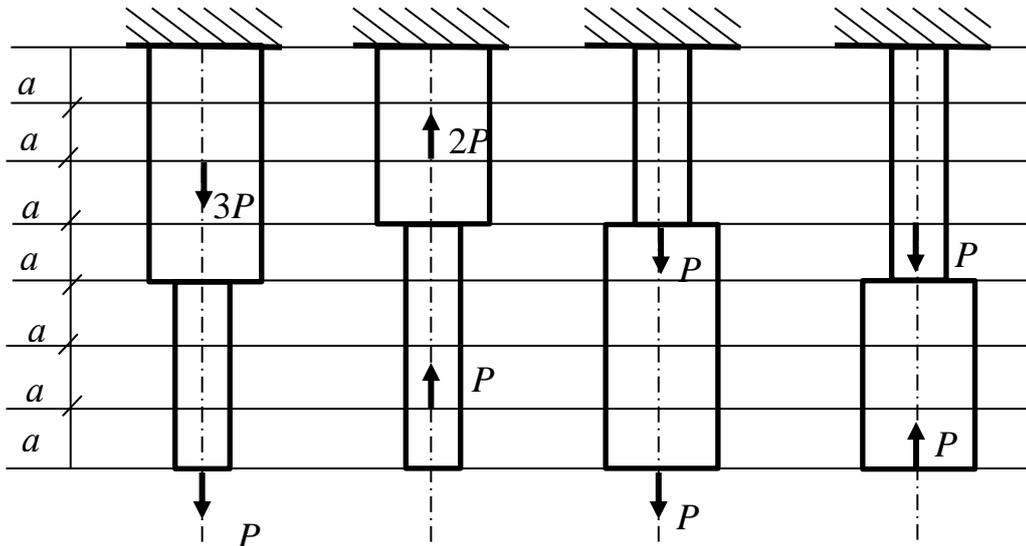


Рисунок 2.9

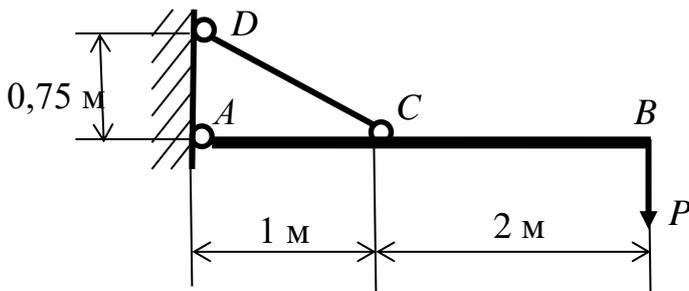


Рисунок 2.10

Ответ:  $P = 1,2 \cdot 10^4$  Н,  $\delta_B = 4,17$  мм.

**2.13** Жесткий стержень  $AB$  нагружен силой  $P$  и поддерживается стальной тягой  $DC$  круглого поперечного сечения диаметром 20 мм (рисунок 2.10). Определить наибольшую допустимую нагрузку  $P$  и опускание точки  $B$ . Допустимое напряжение для материала стержня  $CD$  равно 160 МПа.

**2.14** В изображенной на рисунке 2.11 конструкции все стержни стальные, одинакового поперечного сечения, площадью  $3 \cdot 10^4$  мм<sup>2</sup>. Сила  $P = 10$  кН. Определить напряжения в стержнях.

Ответ:  $\sigma_{AB} = 25$  МПа,  $\sigma_{AC} = 33,3$  МПа,  $\sigma_{BC} = -41,7$  МПа,  $\sigma_{CD} = -25$  МПа.

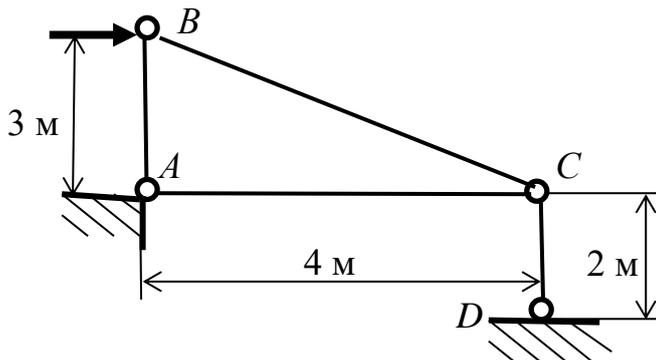


Рисунок 2.11

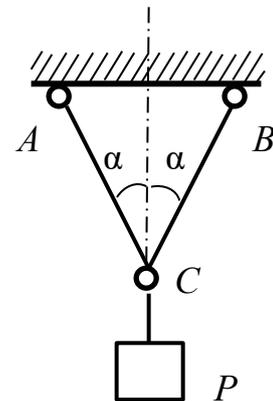


Рисунок 2.12

**2.15** Груз  $P$  подвешен на двух стержнях, как изображено на рисунке 2.12. Угол  $\alpha = 30^\circ$ . Стержень  $AC$  – стальной, круглого поперечного сечения, диаметром 30 мм, с допустимым напряжением для материала  $[\sigma] = 10$  МПа, стержень  $CB$  – алюминиевый, диаметром 40 мм и с  $[\sigma] = 60$  МПа. Какой наибольший груз  $P$  можно подвесить на этих стержнях?

Ответ:  $P = 130$  кН.

**2.16** Стальной стержень круглого поперечного сечения ( $d = 32$  мм и  $l = 0,35$  м) был растянут на испытательной машине усилием 135 кН. Было замерено уменьшение диаметра, равное 0,0062 мм, и на длине 0,05 м удлинение, равное 0,04 мм. Определить модуль упругости и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Ответ:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,242$ .

**2.17** Стальной стержень длиной 6 м растянут силой 200 кН, модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)  $\nu = 0,25$ . Определить увеличение объема стержня.

Ответ:  $\Delta V = 3 \cdot 10^3$  мм<sup>3</sup>.

**2.18** Между неподвижными точками  $A$  и  $B$  горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 мм (рисунок 2.13). К точке  $C$  по середине длины проволоки подвешивается постепенно увеличивающаяся нагрузка  $P$ . Когда удлинение проволоки достигло 0,5 %, она порвалась. Чему в этот момент равен груз  $P$ , какова величина опускания точки  $C$  и какой величины напряжение в проволоке в момент разрыва? Собственным весом проволоки пренебречь. Считать, что проволока наклепана и до момента разрыва она имеет лишь упругие деформации.

Ответ:  $P = 157$  Н,  $CC' = 100$  мм,  $\sigma = 10^3$  МПа.

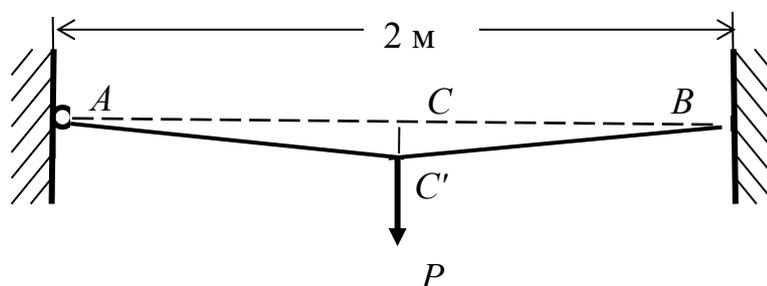


Рисунок 2.13

**2.19** Груз  $G = 1,6$  кН подвешивается на двух стальных проволоках  $AB$  и  $AC$  одинаковой длины; расстояние  $l$  составляет  $5h$  (рисунок 2.14). Определить необходимый диаметр проволок при допустимом напряжении 100 МПа и величину опускания точки  $A$  после приложения нагрузки. Определить этот диаметр также в предположении, что  $l_1 = 10h$ . Собственным весом проволок пренебречь в обоих случаях.

Ответ:  $d = 5,25$  мм,  $d_1 = 7,21$  мм,  $\Delta h = 0,0007l$ .

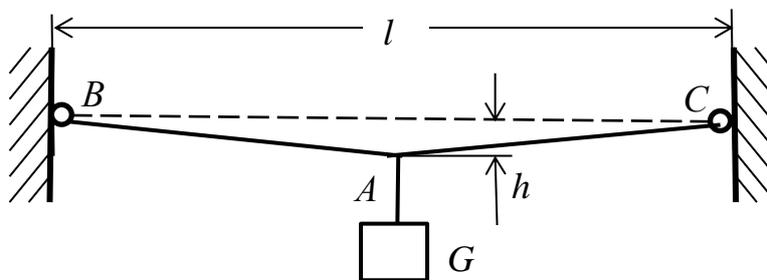


Рисунок 2.14

### 3 Сдвиг и кручение

**Срез и смятие.** Если внутренние нормальные силы вызывают деформацию растяжения (сжатия), то лежащие в плоскости сечения поперечные силы сдвигают одну часть тела относительно другой, вызывая деформацию сдвига. Деформация сдвига проявляется в искажении первоначально прямого угла между двумя условными взаимно перпендикулярными волокнами, взятыми в сечении деформируемого тела. Величина искажения определяется углом сдвига  $\gamma$ .

Характеристикой интенсивности поперечных сил  $Q$  при сдвиге являются касательные напряжения  $\tau$ , определяемые как величина поперечной силы, действующей на единице площади сечения тела. Считая, что поперечная сила  $Q$  равна внешней силе  $F$ , при равномерном распределении касательных напряжений по сечению площадью  $S$ , их величина определяется выражением

$$\tau = \frac{F}{S}. \quad (3.1)$$

Между касательным напряжением  $\tau$  и углом сдвига  $\gamma$  существует пропорциональная зависимость, называемая законом Гука для деформации сдвига:

$$\tau = G \gamma, \quad (3.2)$$

$G$  – модуль упругости 2-го рода (модуль сдвига). Его величина связана с модулем упругости 1-го рода  $E$  выражением

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.3)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

При сдвиге разрушение детали называется срезом. Условие прочности при сдвиге запишется в виде

$$\tau = \frac{F}{S} \geq [\tau], \quad (3.4)$$

где  $[\tau]$  – предельно допустимые напряжения для материала деформируемого тела при сдвиге, принимаемые чаще всего как часть предельно допустимых напряжений при растяжении:  $[\tau] = (0,5 - 0,6) [\sigma]$ .

При большой нагрузке и небольшой толщине соединяемых деталей в зоне их контакта с соединительной деталью возникают большие давления, которые могут вызвать смятие контактирующих поверхностей соединяемых деталей. Давление, возникающее между контактирующими поверхностями соединительной и соединяемых деталей, характеризуется *напряжением смятия*  $\sigma_{см}$ .

Обычно все расчеты на срез сопровождаются проверочными расчетами на смятие. При этом полагают, что напряжения смятия равномерно распределены по контактной поверхности соединяемых деталей площадью  $S_{см}$ . Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma_{см} = \frac{F}{S_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (3.5)$$

где  $[\sigma_{см}]$  – допустимое напряжение смятия.

**Кручение.** При деформации кручения круглых цилиндрических стержней диаметром  $d$  в их поперечных сечениях действуют касательные напряжения, линейно распределенные по сечению в соответствии с зависимостью

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_\rho}, \quad (3.6)$$

где  $T$  – крутящий момент, действующий в поперечном сечении стержня;  $\rho$  – текущее значение радиуса сечения ( $0 \leq \rho \leq d/2$ );  $I_\rho = \pi d^4/32 \approx 0,1d^4$  – полярный момент инерции сечения.

Максимальные касательные напряжения при кручении цилиндрического стержня возникают на его поверхности, т. е. при  $\rho = d/2$ , и определяются выражением

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot d}{2I_\rho} = \frac{T}{W_\rho}, \quad (3.7)$$

где  $W_\rho$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения стержня (для круглого сечения  $W_\rho = \pi d^3/16 \approx 0,2d^3$ ).

Расчеты на прочность при кручении ведут из условия

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (3.8)$$

При закручивании цилиндрического стержня диаметром  $d$  и длиной  $l$  двумя внешними моментами  $T$ , приложенными в его торцевых сечениях, эти сечения повернутся одно относительно другого на угол  $\varphi$ , определяемый выражением

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_\rho}. \quad (3.9)$$

Произведение  $GI_\rho$  называется жесткостью стержня (поперечного сечения стержня) при кручении. Чем больше жесткость, тем меньше угол, на который повернутся сечения одно относительно другого.

Если  $T$ ,  $G$  и  $I_p$  в выражении для угла поворота сечения изменяются по длине стержня, то угол поворота крайних сечений стержня  $\varphi$  определяется как сумма углов  $\varphi_i$  поворота крайних сечений его  $i$ -х участков, где значения  $T$ ,  $G$  и  $I_p$  будут постоянны, т. е.

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{T_i l_i}{G_i I_{p_i}}. \quad (3.10)$$

Угол поворота сечений стержня, расстояние между которыми равно единице длины, называется относительным углом поворота  $\theta$ . Относительный угол определяет жесткость стержня при кручении и определяется выражением

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p}. \quad (3.11)$$

Если необходимо ограничить значение относительного угла поворота предельно допустимым значением  $[\theta]$ , то расчет размеров деформируемого стержня (вала) производят исходя из условия жесткости:

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (3.12)$$

*Вращающийся цилиндрический стержень, предназначенный для крепления вращающихся деталей и испытывающий деформацию кручения, называется валом.* Мощность  $N$ , передаваемая валом, связана с крутящим моментом  $T$  и скоростью вращения вала  $n$  (обороты/мин) выражением

$$N = \pi n / 30. \quad (3.13)$$

**Пример 3.1.** Установленный в круглых захватах разрывной машины стальной образец (рисунок 3.1) был испытан на растяжение. Определить наибольшие напряжения сдвига и смятия, которые возникнут в головке образца при испытании и сравнить с предельно допустимыми, если предел прочности при растяжении образца  $\sigma_b = 500$  МПа.

*Решение.* Находим нагрузку  $P_B$ , соответствующую пределу прочности при растяжении:

$$P_B = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_b = \frac{\pi (6 \cdot 10^{-3})^2}{4} 500 \cdot 10^6 = 14200(\text{Н}) = 14,2 (\text{кН}).$$

Под действием силы  $P_B$  возникает напряжение сдвига по цилиндрической поверхности, которое при достижении предела прочности на срез может срезать головку, и напряжение смятия по опорному кольцу головки.

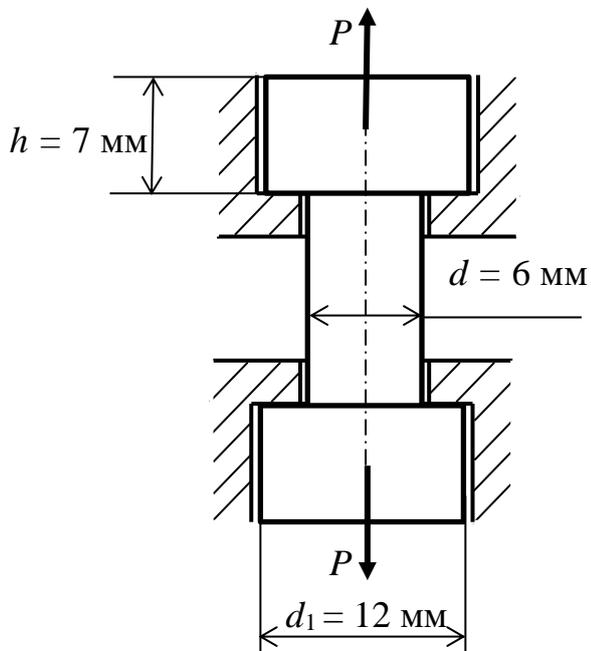


Рисунок 3.1

опорному кольцу образца

Площадь сдвига (среза)

$$S_{\text{ср}} = \pi dh = 3,14 \cdot 6 \cdot 7 = 132 \text{ (мм}^2\text{)};$$

ПЛОЩАДЬ СМЯТИЯ

$$S_{\text{см}} = \frac{\pi(d_1^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14(12^2 - 6^2)}{4} = 85 \text{ (мм}^2\text{)}.$$

Напряжение сдвига (среза) в головке образца

$$\tau = \frac{P_B}{S_{\text{ср}}} = \frac{14200}{132} = 107 \text{ (МПа)}.$$

Напряжения смятия по

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P_B}{I_{\text{см}}} = \frac{14200}{85} = 167 \text{ (МПа)}.$$

Ответ:  $\tau = 107$  МПа,  $\sigma_{\text{см}} = 167$  МПа.

**Пример 3.2.** Определить необходимое количество  $n$  заклепок диаметром  $d = 20$  мм для соединения внахлестку двух листов толщиной  $t_1 = 8$  мм и  $t_2 = 10$  мм. Сила  $P$ , растягивающая соединение, равна 200 кН. Допустимые напряжения: на срез  $[\tau] = 140$  МПа, на смятие  $[\sigma_{\text{см}}] = 320$  МПа.

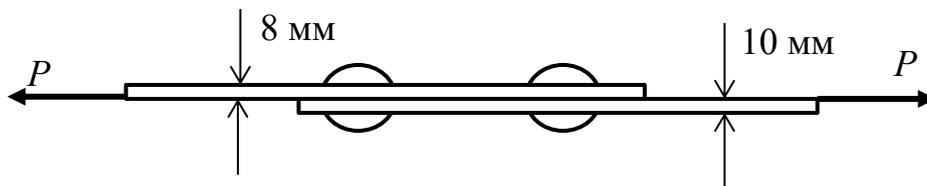


Рисунок 3.2

*Решение.* Из уравнения прочности на срез необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]} = \frac{2 \cdot 10^5}{\pi \frac{20^2}{4} 140} = 4,53 \approx 5.$$

Из уравнения прочности на смятие необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{P}{t_1 d [\sigma_{\text{см}}]} = \frac{2 \cdot 10^5}{8 \cdot 20 \cdot 320} = 3,9 \approx 4.$$

Ответ: 5 заклепок.

**Пример 3.3.** Полый стальной вал имеет наружный диаметр  $d_1 = 100$  мм, а внутренний  $d_2 = 50$  мм. Какую мощность передает этот вал при вращении со скоростью  $n = 80$  об/мин, если при этом он закручивается на угол  $1,8^\circ$  на длине  $2,7$  м? Каково наибольшее касательное напряжение в стержне?

*Решение.* Крутящий момент  $T$ , воспринимаемый валом, можно определить из формулы  $\varphi = \frac{Tl}{J_\rho G}$ :

$$T = \frac{\varphi J_\rho G}{l}. \quad (3.14)$$

Мощность  $N$  связана с крутящим моментом  $T$  и скоростью вращения  $n$  в об/мин выражением

$$N = T \frac{\pi n}{30}.$$

После подстановки вместо  $T$  его значения из (3.14), получим

$$N = \frac{\varphi J_\rho G \pi n}{30l}.$$

Угол  $\varphi$  выражаем в радианах:

$$\varphi = 1,8^\circ = 1,8\pi/180 = \pi/100.$$

Полярный момент инерции кольцевого сечения вала для нашего случая, когда  $d_1/d_2 = 2$ , равен

$$J_\rho = \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4) = \frac{15}{512} \pi d_1^4.$$

Тогда, приняв значение модуля сдвига для стали равным  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа, получим значение мощности, передаваемой валом,

$$N = \frac{\pi \cdot 15 \cdot \pi \cdot 0,1^4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 80}{100 \cdot 512 \cdot 30 \cdot 2,7} = 71,67 \text{ кВт}.$$

Наибольшее касательное напряжение выражается формулой

$$\tau_{\max} = \frac{Tr_1}{J_\rho},$$

где  $r_1 = d_1/2$ .

Подставляя вместо  $T$  его значение, выраженное через мощность  $N$  и заданное число оборотов, получаем

$$\tau_{\max} = \frac{30Nr_1}{\pi n J_\rho} = \frac{30 \cdot 71,67 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 512}{3,14 \cdot 80 \cdot 15 \cdot 3,14 \cdot 0,1^4} = 46,5 \text{ МПа}.$$

Ответ:  $N = 71,67 \text{ кВт}$ ,  $\tau_{\max} = 46,5 \text{ МПа}$ .

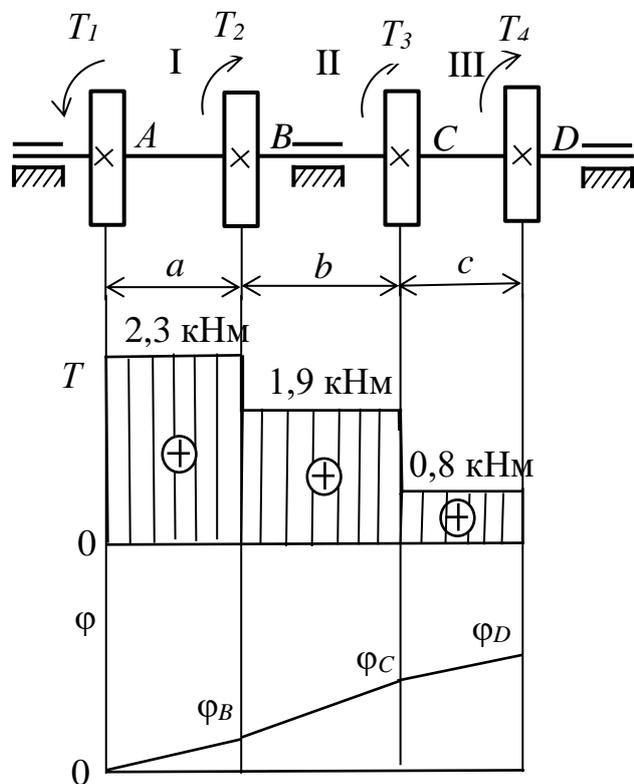


Рисунок 3.3

**Пример 3.4.** На ступенчатом валу (рисунок 3.3) жестко закреплены четыре зубчатых колеса. Ведущее колесо сообщает валу вращающий момент  $T_1 = 2,3 \text{ кНм}$ . Другие зубчатые колеса передают на валы, параллельные первому, вращающие моменты:  $T_2 = 0,4 \text{ кНм}$ ,  $T_3 = 1,1 \text{ кНм}$ ,  $T_4 = 0,8 \text{ кНм}$ . Требуется определить крутящие моменты, действующие на участках I, II, III вала, построить эпюру крутящих моментов, определить диаметры ступеней вала и построить эпюру углов поворота поперечных сечений вала. Примем допустимое касательное напряжение  $[\tau] = 30 \text{ МПа}$ , модуль упругости 2-го рода  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  и длины участков вала  $a = 120 \text{ мм}$ ,  $b = 180 \text{ мм}$ ,  $c = 100 \text{ мм}$ .

*Решение.* Для определения внутренних крутящих моментов воспользуемся методом сечений.

Выполним на некотором участке сечение вала плоскостью, перпендикулярной его оси. Отбросим правую часть вала, а действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренним крутящим моментом, действующим в сечении вала. Внутренний крутящий момент будет равен сумме всех внешних крутящих моментов, расположенных слева от сечения. Будем считать внешний крутящий момент положительным, если он направлен против хода часовой стрелки, и отрицательным – если по ходу.

Знак внутреннего крутящего момента будет соответствовать знаку равнодействующего момента, равного сумме всех внешних крутящих моментов, расположенных слева от сечения.

Выполнив сечение на участке I, мы получим для внутреннего крутящего момента значение  $T_I = T_1 = 2,3$  кНм. На участке II будет действовать крутящий момент  $T_{II} = T_1 - T_2 = 1,9$  кНм, а на III –  $T_{III} = T_1 - T_2 - T_3 = 0,8$  кНм.

Эпюра крутящих моментов показана на рисунке 3.3.

Диаметры ступеней вала будем определять из условия прочности:

$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau]$ , где  $W_\rho = \pi d^3/16$  – полярный момент сопротивления сечения

вала. Тогда диаметр вала определится из выражения  $d \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{T}{[\tau]}}$ .

Для крутящего момента необходимо брать абсолютное значение.

Определяем диаметр вала на I участке:

$$d_I \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{2,3 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 7,31 \cdot 10^{-2}(\text{м}); \text{ принимаем } d_I = 75 \text{ мм};$$

на втором участке:

$$d_{II} \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{1,9 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 6,62 \cdot 10^{-2}(\text{м}); \text{ принимаем } d_{II} = 70 \text{ мм};$$

на третьем участке:

$$d_{III} \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{0,8 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 5,12 \cdot 10^{-2}(\text{м}); \text{ принимаем } d_{III} = 55 \text{ мм}.$$

Углы закручивания I, II и III участков вала будем определять по формуле  $\varphi = Tl/GI_\rho$ . Предварительно вычислим значения полярных моментов инерции поперечных сечений каждого участка вала.

$$I_{\rho I} = \pi(d_I)^4/32 = 3,14 \cdot 75^4/32 = 310,5 \cdot 10^4 (\text{мм}^4);$$

$$I_{\rho II} = \pi(d_{II})^4/32 = 3,14 \cdot 70^4/32 = 235,6 \cdot 10^4 (\text{мм}^4);$$

$$I_{\rho III} = \pi(d_{III})^4/32 = 3,14 \cdot 55^4/32 = 89,8 \cdot 10^4 (\text{мм}^4).$$

Вычислим для каждого участка вала углы поворота правых крайних сечений по отношению к левым крайним:  $\varphi_{BA}$ ,  $\varphi_{CB}$  и  $\varphi_{DC}$ .

$$\varphi_{BA} = \frac{T_I a}{GI_{\rho I}} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 120}{8 \cdot 10^4 \cdot 310,5 \cdot 10^4} = 0,1 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,057^\circ;$$

$$\varphi_{BA} = \frac{T_{II} a}{GI_{\rho II}} = \frac{1,9 \cdot 10^6 \cdot 180}{8 \cdot 10^4 \cdot 235,6 \cdot 10^4} = 0,18 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,1^\circ;$$

$$\varphi_{DC} = \frac{T_{III} c}{GI_{\rho III}} = \frac{0,8 \cdot 10^6 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 89,8 \cdot 10^4} = 0,11 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,063^\circ.$$

При построении эпюры углов закручивания примем за нуль угол поворота сечения вала, содержащего точку  $A$ . На рисунке 3.3 представлена эпюра углов закручивания вала.

Полный угол закручивания вала

$$\varphi = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = 0,057^\circ + 0,1^\circ + 0,063^\circ = 0,22^\circ.$$

### Задачи

**3.1** Определить величину силы  $P$ , требуемой для продавливания пуансоном штампа в упругом контакте толщиной 0,22 мм, выполненном из бериллиевой бронзы, отверстия диаметром 4,2 мм, если предел прочности на срез для бериллиевой бронзы составляет 600 МПа.

Ответ:  $P = 1,74$  кН.

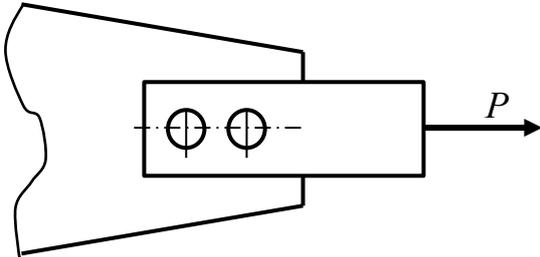


Рисунок 3.4

**3.2** Выбрать диаметр и определить необходимое число  $n$  заклепок, прикрепляющих стальную полосу к косынке. Проверить прочность полосы с учетом ослабления ее заклепочными отверстиями, если  $P = 6$  кН, ширина полосы  $b = 30$  мм, а ее толщина меньше толщины косынки и составляет  $t = 2$  мм. Допустимые

напряжения: для материала полосы  $[\sigma] = 160$  МПа, для материала заклепок  $[\tau] = 100$  МПа (на срез) и  $[\sigma_{см}] = 260$  МПа (на смятие).

Ответ:  $d = 7$  мм,  $n = 2$ .

**3.3** Проверить прочность зубьев храпового колеса на срез и смятие, если нормальное давление на зуб в момент торможения равно  $P = 2$  кН и распределено по рабочей поверхности зуба, размеры которой следующие: ширина  $t = 4$  мм, высота  $h = 5$  мм, окружная длина зуба в основании  $a = 8$  мм. Допустимые напряжения на срез  $[\tau] = 70$  МПа и на смятие  $[\sigma_{см}] = 120$  МПа.

Ответ:  $\tau = 62,5$  МПа,  $\sigma_{см} = 100$  МПа.

**3.4** Определить максимальную толщину  $t$  листа из электротехнической стали (предел прочности на срез составляет 300 МПа), из которого можно выштамповать трансформаторную пластину заданной формы (рисунок 3.5), если усилие, действующее на пуансон штампа, равно 360 кН.

Ответ:  $t = 2$  мм.

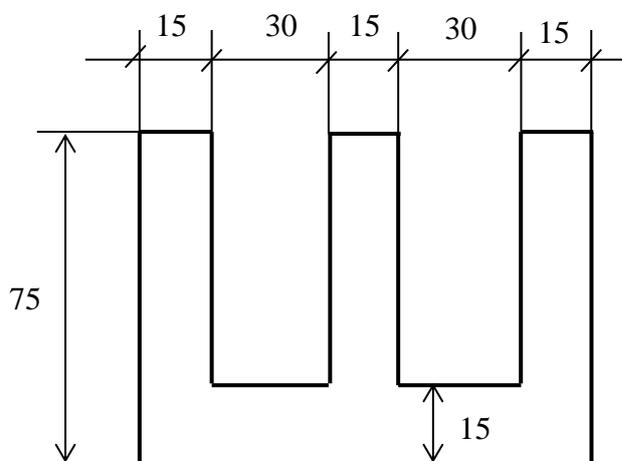


Рисунок 3.4

**3.5** Для соединения зубчатого колеса с валом применено склеивание клеем, для которого допустимое напряжение среза  $[\tau] = 20$  МПа. Определить величину максимального момента  $T$ , передаваемого валом, если диаметр вала в месте склеивания  $d = 12$  мм, а ширина поверхности колеса, контактирующей со склеиваемой поверхностью вала,  $b = 10$  мм.

Ответ:  $T = 45,2$  Нм.

**3.6** Определить необходимую длину  $l$  фланговых швов для соединения внахлестку двух листов разной ширины. Усилие, испытываемое соединением,  $P = 150$  кН. Допустимое напряжение на срез для сварки равно 110 МПа. Толщина узкого листа 10 мм, а широкого – 8 мм.

Ответ:  $l \approx 100$  мм.

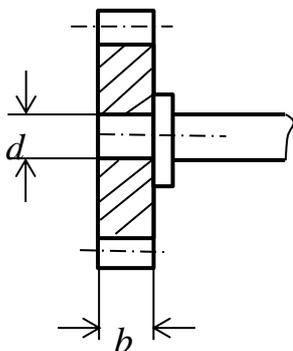


Рисунок 3.5

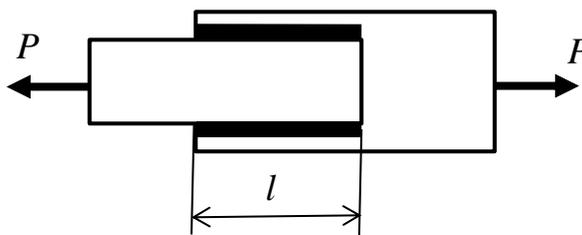


Рисунок 3.6

**3.7** Определить минимальную длину  $x$ , необходимую для приварки листа в соединении, изображенном на рисунке 3.7, если растягивающее напряжение в листе равно 140 МПа, а допустимое напряжение на срез для сварки  $[\tau_s] = 80$  МПа.

Ответ:  $x = 75$  мм.

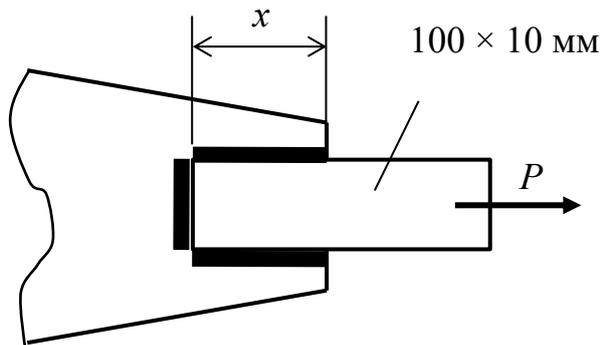


Рисунок 3.7

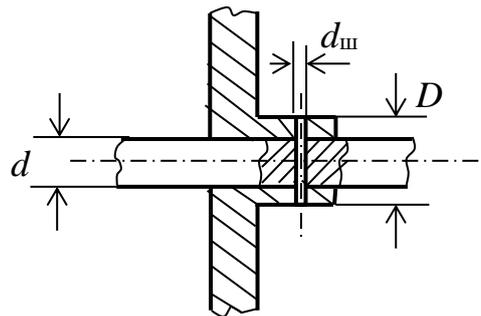


Рисунок 3.8

**3.8** Вал передает крутящий момент  $T = 0,35$  Нм. Определить напряжения среза и смятия для штифта и сравнить с допустимыми, если  $d_{ш} = 1,5$  мм,  $d = 10$  мм,  $D = 13$  мм (рисунок 3.8). Допустимые напряжения: на срез  $[\tau] = 70$  МПа, на смятие  $[\sigma_{см}] = 120$  МПа.

Ответ:  $\tau = 20$  МПа,  $\sigma_{см} = 15,5$  МПа.

**3.9** Напряжения у поверхности вала, испытующего деформацию кручения, равны 80 МПа. Чему равны касательные напряжения в том же поперечном сечении на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала?

Ответ:  $\tau = 60$  МПа.

**3.10** Определить диаметр сплошного вала круглого сечения, передающего крутящий момент  $T = 16$  Нм, если допустимое напряжение для материала вала на срез  $[\tau] = 80$  МПа, а допустимый относительный угол закручивания вала  $[\theta] = 0,15$ . Модуль сдвига принять равным  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

Ответ:  $d = 10$  мм.

**3.11** К стержню круглого поперечного сечения, защемленному правым концом, приложены два одинаковых крутящих момента  $T$ . Диаметр левого участка стержня  $d_1 = 8$  мм, диаметр правого участка  $d_2 = 12$  мм (рисунок 3.9). Наибольшее касательное напряжение в стержне на правом участке составляет  $\tau_{2_{max}} = 80$  МПа. Чему равно наибольшее касательное напряжение на левом участке стержня?

Ответ:  $\tau_{1_{max}} = 135$  МПа.

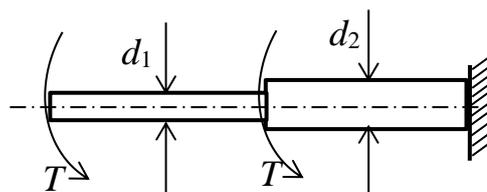


Рисунок 3.9

**3.12** Сравнить вес сплошных валов одинаковой длины, стального и алюминиевого сплава, спроектированных с одинаковым углом закручивания при одинаковых крутящих моментах. Модуль упругости при сдвиге алюминиевого сплава равен  $2,7 \cdot 10^4$  МПа, стали –  $8 \cdot 10^4$  МПа, а объемные веса соответственно  $2,6 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup> и  $7,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>.

Ответ: стальной вал на 75 % тяжелее вала из алюминиевого сплава.

**3.13** Определить наименьший диаметр стального вала, передающего 13,23 кВт при 120 об/мин, если допустимый угол закручивания равен  $1^\circ$  на длине, равной 15 диаметрам вала. Как велики при этом будут наибольшие касательные напряжения? Модуль сдвига для стали принять равным  $8 \cdot 10^4$  МПа.

Ответ:  $d_{\min} = 49$  мм,  $\tau_{\max} = 46,6$  МПа.

**3.14** Определить диаметр сплошного вала, передающего 330,75 кВт при 300 об/мин. Угол закручивания не должен превышать  $1^\circ$  на 2 м длины вала, а наибольшее касательное напряжение – 40 МПа. Модуль сдвига для стали принять равным  $8 \cdot 10^4$  МПа.

Ответ:  $d = 112$  мм.

**3.15** Сплошной вал диаметром 100 мм и длиной 6 м закручен на угол  $4^\circ$ . Чему равно наибольшее касательное напряжение, если  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа?

Ответ:  $\tau_{\max} = 46,6$  МПа.

**3.16** Сплошной вал диаметром 90 мм при скорости вращения 150 об/мин передает 36,75 кВт. Длина вала между шкивами составляет 4 м. Модуль  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Определить наибольшее касательное напряжение в вале и угол, на который один шкив повернется относительно другого.

Ответ:  $\tau_{\max} = 16,7$  МПа,  $\varphi = 1^\circ 4'$ .

**3.17** Стержень из мягкой стали диаметром 25 мм удлиняется на 0,113 мм на длине 0,2 м при растяжении его силой 6 кН. Этот же стержень закручивается на угол  $0,55^\circ$  на длине 0,15 м при нагружении его крутящим моментом, равным 200 Нм. Определить величину модулей упругости  $E$ ,  $G$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Ответ:  $E = 2,16 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 8,16 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0,32$ .

**3.18** Определить наружный диаметр полого стального вала, передающего 7,056 МВт при 110 об/мин, если допустимое касательное напряжение равно 56 МПа, а внутренний диаметр составляет 0,6 от внешнего.

Ответ:  $d = 402$  мм.

**3.19** Полый стальной вал длиной 1,8 м нагружен крутящим моментом 6 кНм. Определить наружный и внутренний диаметры вала, если угол закручивания не должен превосходить  $2^\circ$ , а касательное напряжение – 70 МПа.

Ответ:  $d_1 = 90,4$  мм,  $d_2 = 72,4$  мм.

**3.20** К стальному ступенчатому валу (рисунок 3.10), имеющему сплошное поперечное сечение, приложены четыре момента. Левый конец вала жестко закреплен в опоре, а правый конец – свободен и его торец имеет угловые перемещения относительно левого конца. Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов по длине вала;
- 2) при заданном значении допустимого напряжения на кручение определить диаметры  $d_1$  и  $d_2$  вала из расчета на прочность, полученные значения округлить;
- 3) построить эпюру максимальных напряжений кручения по длине вала;
- 4) построить эпюру углов закручивания, приняв  $G \approx 0,4E$ . Для стали модуль упругости первого рода считать равным  $E = 2 \cdot 10^5$  МН/м<sup>2</sup>.

Числовые данные для расчетов приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные для расчета ступенчатого вала для задачи 3.20

Вариант	Расстояния, м			Моменты, кН·м				[τ], МПа
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	
1	1,0	1,0	1,0	5,1	2,1	1,1	0,1	30
2	1,1	1,1	1,1	5,2	2,2	1,2	0,2	30
3	1,2	1,2	1,2	5,3	2,3	1,3	0,3	35
4	1,3	1,3	1,3	5,4	2,4	1,4	0,4	35
5	1,4	1,4	1,4	5,5	2,5	1,5	0,5	40
6	1,5	1,5	1,5	5,6	2,6	1,6	0,6	40
7	1,6	1,6	1,6	5,7	2,7	1,7	0,7	45
8	1,7	1,7	1,7	5,8	2,8	1,8	0,8	45
9	1,8	1,8	1,8	5,9	2,9	1,9	0,9	50
10	1,9	1,9	1,9	6,0	3,0	2,0	1,0	50

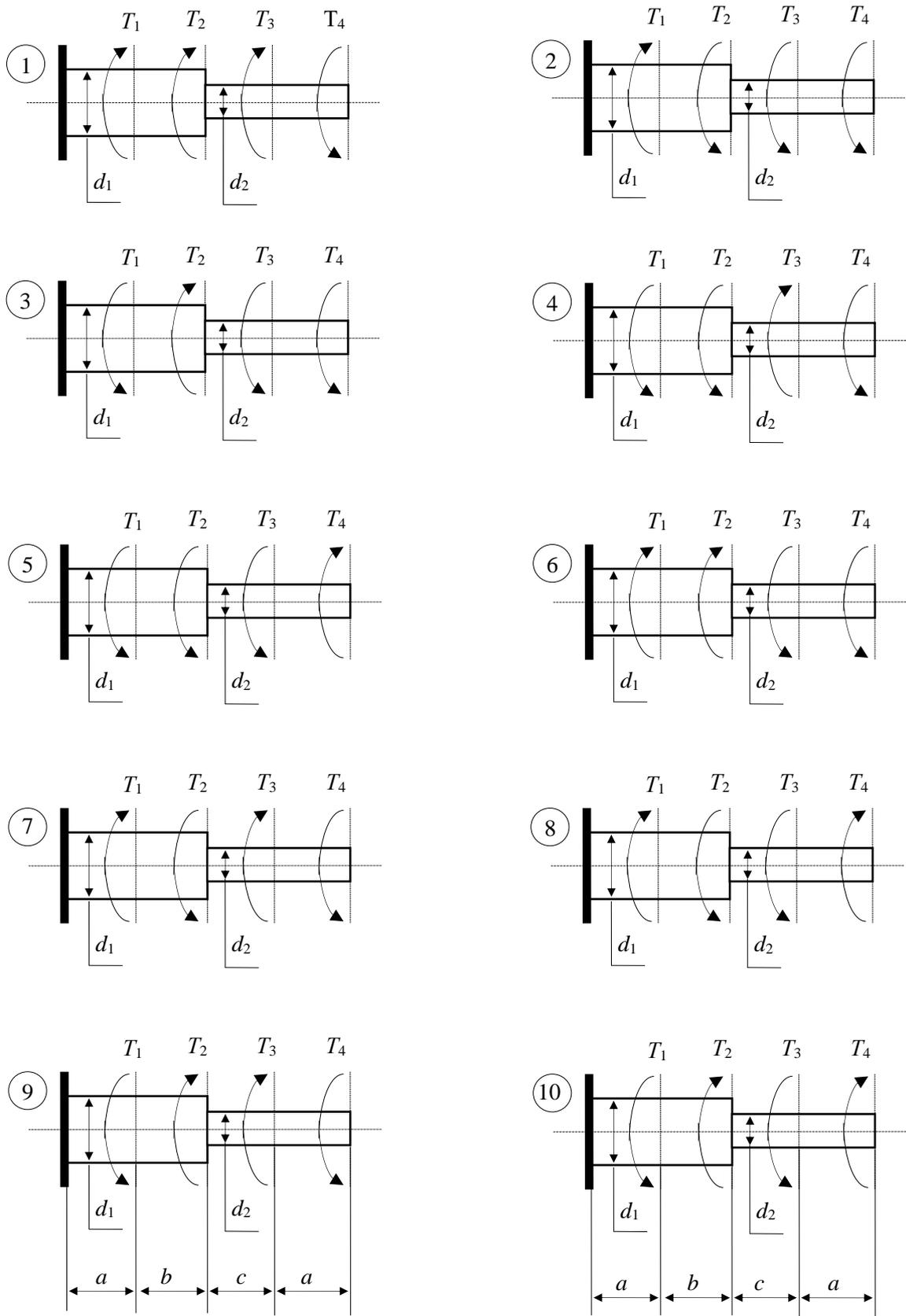


Рисунок 3.10

## 4 Деформация изгиба

*Деформацией изгиба* называется искривление продольной оси стержня, возникающее в результате действия внешних силовых нагрузок.

Деформация стержня под действием сил и моментов сил, расположенных в одной плоскости, причем линии действия сил перпендикулярны первоначальному положению оси стержня, называется *плоским изгибом*.

Стержень, закрепленный на опорах и испытывающий деформацию изгиба, называется *балкой*.

Деформация стержня, при которой в его поперечных сечениях присутствуют только изгибающие моменты  $M$ , называется *чистым изгибом*. При *поперечном изгибе* в поперечных сечениях стержня присутствуют как изгибающие моменты  $M$ , так и поперечные силы  $Q$ .

Изгибающий момент  $M$ , действующий в произвольном поперечном сечении балки, равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, взятых относительно центра сечения. Знак изгибающего момента определяется по направлению изгиба балки: если под действием момента внешних сил и изгибающего момента участок балки изгибается выпуклостью вниз, то изгибающий момент положителен, если вверх, то отрицателен.

Поперечная сила  $Q$  в произвольном сечении изогнутой балки равна алгебраической сумме (равнодействующей) всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения. Знак поперечной силы будет соответствовать знаку равнодействующей внешних сил.

Графики, представляющие распределение по длине балки поперечных сил и изгибающих моментов, называются *эпюрами* соответственно поперечных сил и изгибающих моментов. Процесс построения эпюр можно разбить на следующие этапы:

1. Определение реакций в опорах.
2. Разбивка балки на участки с постоянной (неизменяющейся) либо с монотонно изменяющейся нагрузкой.
3. Составление уравнений поперечных сил  $Q(x)$  и изгибающих моментов  $M(x)$  для каждого участка балки.
4. Построение по полученным для каждого участка балки уравнениям  $Q(x)$  и  $M(x)$  эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
5. Проверка правильности построения эпюр.

Для определения реакций в опорах используют уравнения равновесия плоской системы сил.

При составлении уравнений  $Q(x)$  и  $M(x)$  необходимо исходить из определений, данных для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ , как алгебраических сумм соответственно всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, и моментов этих сил.

При построении эпюр необходимо определить значения поперечных сил и изгибающих моментов в начале и в конце каждого участка, на которые разбита балка.

При проверке правильности построения эпюр необходимо помнить, что эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. Если в некоторой точке балки приложена сосредоточенная сила  $F$ , то на эпюре поперечных сил в сечении, проходящем через эту точку, должен быть скачок на величину силы  $F$ . Наличие на схеме нагружения балки внешнего сосредоточенного момента  $m$  приведет к скачку на эпюре изгибающих моментов на величину этого момента. Кроме этого, при изгибе должны выполняться соотношения между распределенной нагрузкой  $q(x)$ , поперечной силой  $Q(x)$  и изгибающим моментом  $M(x)$ , определяемые следующими дифференциальными зависимостями:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad q(x) = \frac{dQ}{dx}, \quad q(x) = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

В соответствии с приведенными дифференциальными зависимостями при переходе для некоторого сечения балки эпюры поперечных сил через нуль эпюра изгибающих моментов в этом сечении будет иметь экстремальное значение. Возможны два случая перехода через нуль эпюры поперечных сил: скачком, если в этом сечении приложена внешняя сосредоточенная сила, и плавный (линейный) переход, если на данном участке балки действует распределенная нагрузка. В первом случае на эпюре изгибающих моментов будет излом, во втором – экстремум параболы. Эпюра изгибающих моментов будет иметь в этом сечении максимум, если на эпюре поперечных сил меняется знак силы с «+» на «-», и минимум, если знак силы меняется с «-» на «+». Если исходить из дифференциальной зависимости между распределенной нагрузкой и изгибающим моментом, действующими на данном участке балки, то эпюра изгибающего момента будет иметь максимум при отрицательной распределенной нагрузке и минимум – при положительной.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов позволяет определить те сечения балки, где значения поперечных сил и изгибающих моментов имеют максимальные по модулю значения. Такие сечения называются *опасными сечениями*. Для опасных сечений определяются значения касательных и нормальных напряжений, которые не должны превышать предельно допустимых значений соответственно касательных  $[\tau]$  и нормальных  $[\sigma]$  напряжений для материала балки. Для балок простых сечений, например, прямоугольного или круглого, действующие в сечениях касательные напряжения много меньше нормальных и поэтому расчет балок простых поперечных сечений можно вести только по нормальным напряжениям.

Если представить балку как состоящую из продольных волокон, то при ее изгибе волокна, находящиеся со стороны выпуклости, будут испытывать растяжение (удлинение), а со стороны вогнутости – сжатие (укорочение). По-

сколькo одни волокна удлинятся, а другие укорачиваются, то между ними в средней части балки будут находиться волокна, длина которых при изгибе не изменяется. Слой, содержащий волокна, длина которых при изгибе не изменяется, называется *нейтральным слоем*. Чем дальше расположено волокно от нейтрального слоя, тем больше изменяется его длина, тем больше нормальные напряжения, действующие в этой точке поперечного сечения балки. Для волокна, удаленного от нейтрального слоя на расстоянии  $y$ , нормальное напряжение определяется выражением

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z},$$

где  $M$  – изгибающий момент;  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси  $z$ , лежащей в нейтральном слое (нейтральной оси).

Максимальные напряжения будут испытывать волокна, наиболее удаленные от нейтрального слоя. Эти напряжения определяются из уравнения

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z},$$

где  $W_z$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной оси ( $W_z = I_z/y_{\max}$ ).

Условие прочности при изгибе запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Осевой момент сопротивления сечения балки круглого сечения диаметром  $d$  определяется выражением

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32},$$

а для балки с прямоугольным сечением шириной  $b$  и высотой  $h$  – выражением

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

**Пример 4.1.** Шарнирно-опертая балка длиной  $l = 5a$  загружена на длине  $4a$  равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $q$  и парой сил с моментом  $M_0 = qa^2$ , приложенной на расстоянии  $a$  от левой опоры (рисунок 4.1). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подсчитать их наибольшие по абсолютному значению величины.

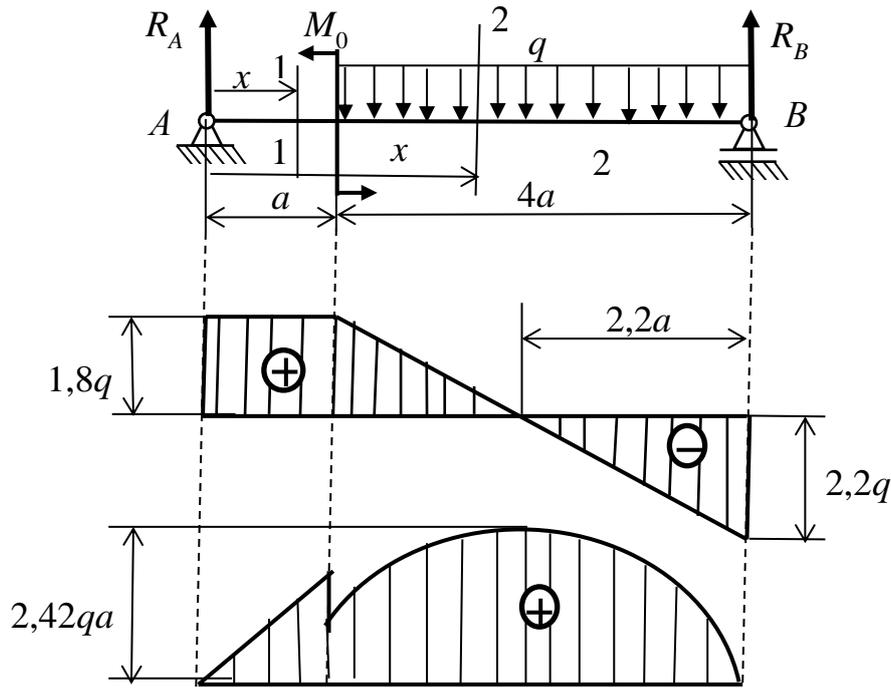


Рисунок 4.1

*Решение.* 1. *Определение опорных реакций.* Изобразим на рисунке реакции опор  $R_A$  и  $R_B$ , направив их вверх. Горизонтальная реакция в шарнирно-подвижной опоре  $A$  равна нулю, так как рассматривается плоский изгиб, при котором все силы перпендикулярны первоначальному положению оси балки. Для нахождения реакций в опорах составим уравнения равновесия в форме моментов сил относительно точек  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; R_A 5a - M_0 - q 4a 2a = 0; R_A &= \frac{1}{5a} (8qa^2 + M_0) = 1,8qa; \\ \sum M_A = 0; -R_B 5a + q 4a(2a + a) - M_0 &= 0; \\ R_B &= -\frac{1}{5a} (12qa^2 - M_0) = 2,2qa. \end{aligned}$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B - q 4a = 0; 1,8qa + 2,2qa - 4qa = 0.$$

Реакции определены правильно.

2. *Составление выражений  $Q(x)$  и  $M(x)$ .* На схеме балки можно выделить два участка: 1-й участок балки от точки  $A$  до точки  $C$ , на котором внеш-

ная нагрузка не изменяется, и 2-й участок от точки  $C$  до точки  $B$ , на котором действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ . Для составления уравнений, выражающих законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов, рассмотрим два сечения: 1–1 на 1-м участке и 2–2 на 2-м участке балки.

Выражения для  $Q(x)$  и  $M(x)$ , действующих в сечениях балки, будем составлять, рассматривая силы, расположенные слева от сечений. Положение сечений будет определяться координатой  $x$ , отсчитываемой от точки  $A$ , принятой за начало координат.

Выражения  $Q(x)$  и  $M(x)$ :

- для первого участка ( $0 \leq x \leq a$ ):

$$Q_1 = R_A = 1,8qa, \quad M_1 = R_Ax = 1,8qax;$$

- для второго участка ( $a \leq x \leq 5a$ ):

$$Q_2 = R_A - q(x - a), \quad M_2 = R_Ax - M_0 - q(x - a)(x - a)/2.$$

Полученные зависимости показывают, что на первом участке обе эпюры являются линейными уравнениями; на втором участке эпюра  $M$  описывается нелинейным уравнением (параболой).

3. *Построение эпюр  $Q$  и  $M$ .* При построении линейных зависимостей достаточно дать переменной  $x$  два значения, например, в начале и в конце участка. В случае нелинейной зависимости следует дать переменной  $x$  не менее трех значений.

*Построение эпюры  $Q$ .*

1-й участок ( $0 \leq x \leq a$ ):

$$x = 0, Q_1(0) = R_A = 1,8qa; \quad x = a, Q_1(a) = R_A = 1,8qa.$$

2-й участок ( $a \leq x \leq 5a$ ):

$$x = a, Q_2(a) = R_A = 1,8qa; \quad x = 5a, Q_2(5a) = R_A - q(5a - a) = -2,2qa.$$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил. Максимальное по модулю значение поперечная сила будет принимать на конце второго участка, т. е.  $Q_{\max} = |Q_2(5a)| = 2,2qa$ .

Для нахождения координаты  $x_1$  точки пересечения эпюрой оси абсцисс приравняем выражение для поперечной силы второго участка нулю:

$$Q_2(x_1) = R_A - q(x_1 - a) = 0, \quad \text{откуда } x_1 = (R_A + qa)/q = 2,8a.$$

*Построение эпюры  $M$ .*

1-й участок ( $0 \leq x \leq a$ ):

$$x = 0, M_1(0) = 0; \quad x = a, M_1(a) = R_Aa = 1,8qa^2.$$

2-й участок ( $a \leq x \leq 5a$ ):

$$x = a, M_2(a) = R_Aa - M_0 = 1,8qa^2 - qa^2 = 0,8qa^2;$$

$$x = 5a, M_2(5a) = R_A5a - M_0 - q(5a - a)(5a - a)/2 = 0.$$

В качестве третьей точки возьмем точку с координатой  $x = x_1$ . Учитывая, что  $Q = dM/dx$ , то при  $Q = 0$  изгибающий момент будет иметь экстремальное значение (в нашем случае максимальное), т. е.

$$M_2(x_1) = M_{\max} = M_2(2,8a) = R_A 2,8a - M_0 - q(2,8a - a)(2,8a - a)/2 = 2,42 qa^2.$$

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов.

#### 4. Проверка правильности построения эпюр.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. В нашем случае эпюра поперечных сил начинается с нуля скачком на величину реакции в опоре  $A$  и возвращается в нуль реакцией в опоре  $B$ .

Эпюра изгибающих моментов также начинается с нуля и возвращается в нуль. В точке, где поперечная сила принимает нулевое значение, эпюра изгибающих моментов принимает экстремальное (максимальное) значение, т. е. выполняются дифференциальные зависимости при изгибе.

**Пример 4.2.** Жестко закрепленная (консольная) балка длиной  $l = 2,5$  м загружена моментом  $M = 5$  кНм, сосредоточенной силой  $P = 15$  кН, приложенной на расстоянии  $a = 1$  м от левого конца балки, и равномерно распределенной на длине  $b = 1$  м нагрузкой интенсивностью  $q = 10$  кН/м (рисунок 4.2). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

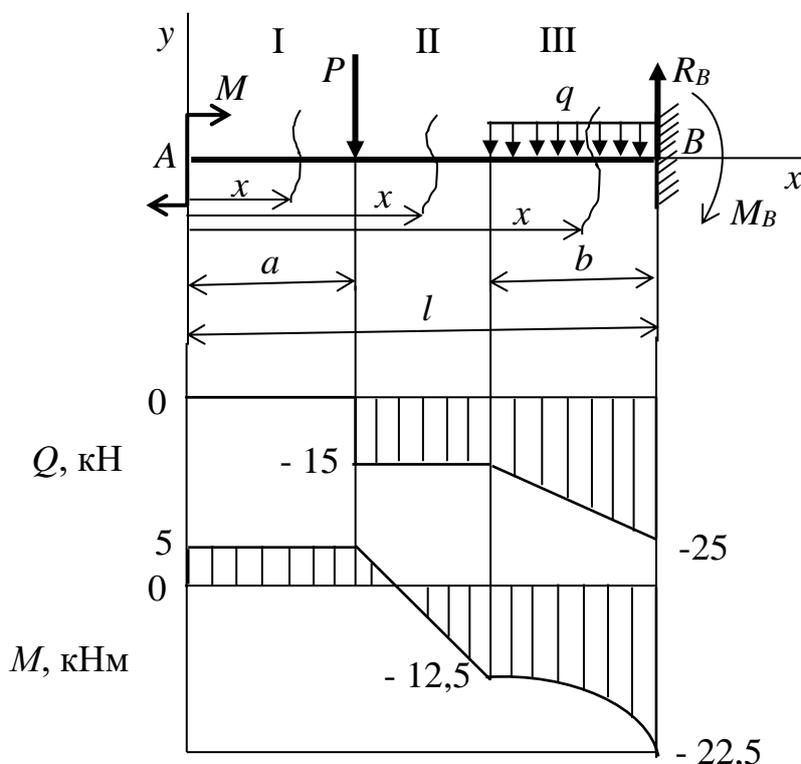


Рисунок 4.2

*Решение.* 1. *Определение опорных реакций.* При составлении уравнений для поперечных сил и изгибающих моментов будем идти от свободного конца балки (точка  $A$ ) к заделке (точка  $B$ ). В этом случае опорные реакции можно не определять. Значение реакции  $R_B$  и реактивного момента  $M_B$  определим из уравнений поперечных сил и изгибающего момента для последнего участка балки.

2. *Разбивка балки на участки с постоянной либо монотонно изменяющейся нагрузкой.* Для заданной схемы балки выделим три участка: I – от точки приложения момента  $M$  до точки приложения сосредоточенной силы  $P$ ; II – от точки приложения сосредоточенной силы  $P$  до начала участка с распределенной нагрузкой; III – участок, где распределена нагрузка интенсивностью  $q$ . На первом и втором участках внешняя нагрузка не меняется (постоянная), а на третьем участке нагрузка меняется монотонно: с увеличением длины участка нагрузка линейно растет.

3. *Составление уравнений  $Q(x)$  и  $M(x)$ .* Уравнения для поперечных сил  $Q(x)$  и изгибающих моментов  $M(x)$ , действующих в поперечных сечениях балки на каждом из трех ее участков, будем составлять, рассматривая силы, расположенные слева от сечения. Положение сечения будет определяться координатой  $x$ , отсчитываемой от точки  $A$ , принятой за начало координат.

Выражения для  $Q(x)$  и  $M(x)$ :

- для первого участка ( $0 \leq x \leq a$ ):

$$Q_I = 0; M_I = M;$$

- для второго участка ( $a \leq x \leq (l - b)$ ):

$$Q_{II} = -P; M_{II} = M - P(x - a);$$

- для третьего участка ( $(l - b) \leq x \leq l$ ):

$$Q_{III} = -P - q(x - l + b); M_{III} = M - P(x - a) - 0,5(x - l + b)^2.$$

4. *Построение эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .*

Построение эпюры поперечных сил:

- участок I:  $Q_I = 0$ ;

- участок II:  $Q_{II} = -P = -15$  кН;

- участок III: На данном участке поперечная сила линейно зависит от координаты  $x$ . Для построения линейной зависимости найдем значение поперечной силы  $Q_{III}$  в двух точках: в начале ( $x = l - b$ ) и в конце ( $x = l$ ) участка:  $Q_{III}(l - b) = -P = -15$  кН;  $Q_{III}(l) = -P - qb = -25$  кН.

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил (рисунок 4.2).

Построение эпюры изгибающих моментов:

- участок I:  $M_I = M = 5$  кНм;

- участок II: для построения линейной зависимости найдем значения изгибающего момента в начале и в конце второго участка:

$$M_{II}(a) = M = 5 \text{ кНм}; \quad M_{II}(l - b) = M - P(l - b - a) = -12,5 \text{ кНм};$$

- участок III: на этом участке мы имеем нелинейную зависимость изгибающего момента от координаты  $x$  (параболу). Для построения кривой найдем значения изгибающего момента в начале и в конце участка. Кривая на третьем участке будет иметь выпуклость, так как вторая производная от изгибающего момента по координате отрицательная:  $d^2M/dx^2 = q < 0$ .

5. Проверка правильности построения эпюр. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. В нашем случае обе эпюры начинаются с нуля. Эпюру поперечных сил вернет в нуль реакция  $R_B$  опоры. Следовательно, реакция опоры будет равна  $R_B = 25 \text{ кН}$  и направлена вверх. Эпюру изгибающих моментов вернет в нуль положительный реактивный момент, равный  $M_B = 22,5 \text{ кНм}$ .

### Задачи

4.1 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, жестко закрепленных одним концом и нагруженных, как показано на рисунке 4.3.

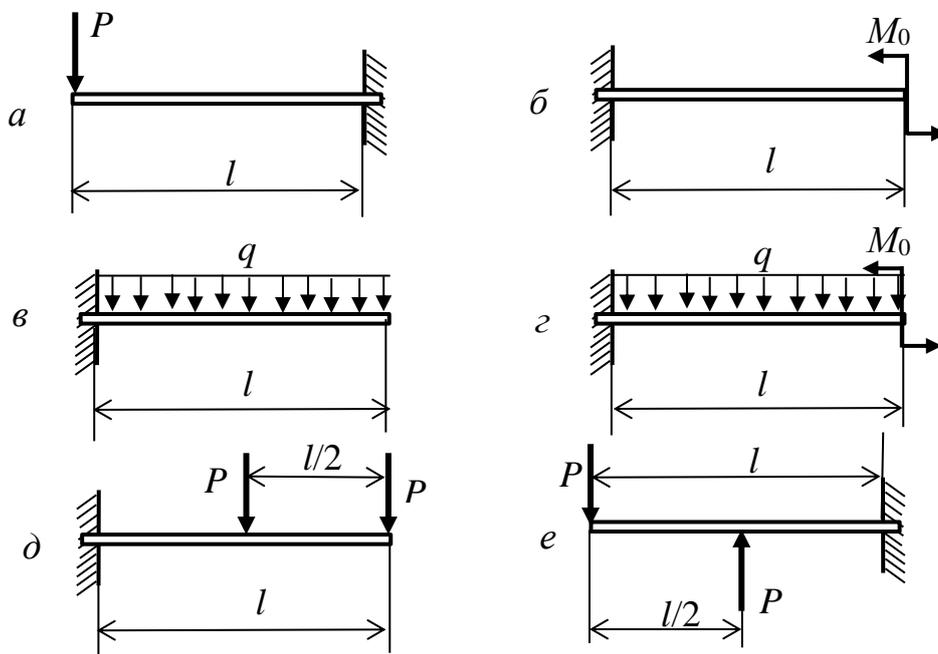


Рисунок 4.3

Подсчитать наибольшие по абсолютному значению величины поперечных сил и изгибающих моментов (рисунок 4.3), если  $P = 20$  кН,  $q = 20$  кН/м,  $M_0 = 40$  кНм и  $l = 2$  м.

Ответ: а)  $Q = 20$  кН,  $M = 40$  кНм; б)  $Q = 0$ ,  $M = 40$  кНм; в)  $Q = 40$  кН,  $M = 40$  кНм; г)  $Q = 40$  кН,  $M = 20$  кНм; д)  $Q = 40$  кН,  $M = 60$  кНм; е)  $Q = 20$  кН,  $M = 20$  кНм.

**4.2** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольных балок (рисунок 4.4), приняв  $P = 3$  кН,  $P_1 = 2$  кН,  $q = 2$  кН/м,  $M_0 = 1$  кНм,  $l = 2$  м,  $a = 1$  м. Определить абсолютные значения опорных реакций.

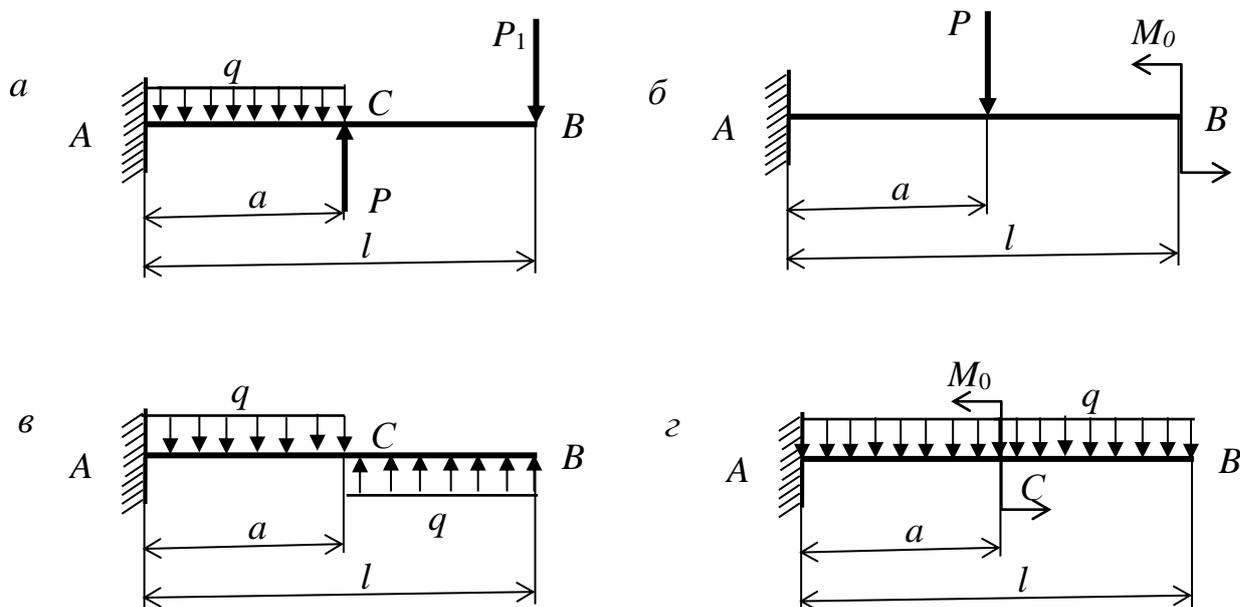


Рисунок 4.4

Ответ: а)  $M_A = 2$  кНм;  $R_A = 1$  кН;

б)  $M_A = 2$  кНм;  $R_A = 3$  кН;

в)  $M_A = 2$  кНм;  $R_A = 0$ ;

г)  $M_A = 3$  кНм;  $R_A = 4$  кН.

**4.3** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для шарнирно-закрепленных балок, нагруженных, как показано на рисунке 4.5.

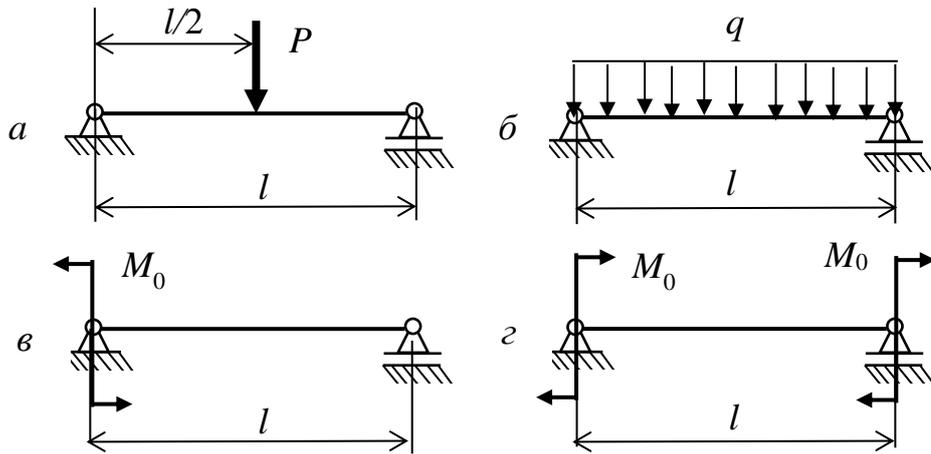


Рисунок 4.5

Найти максимальные по модулю значения  $Q$  и  $M$  при следующих данных:  $P = 60$  кН,  $q = 20$  кН/м,  $M_0 = 60$  кНм,  $l = 3$  м.

Ответ: а)  $Q = 30$  кН,  $M = 45$  кНм; б)  $Q = 30$  кН,  $M = 22,5$  кНм; в)  $Q = 20$  кН,  $M = 60$  кНм; з)  $Q = 40$  кН,  $M = 60$  кНм.

**4.4** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для шарнирно закрепленных балок (рисунок 4.6). Найти для каждой балки выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ , действующих в поперечных сечениях, проходящих через точки  $A$  и  $C$  соответственно.

Ответ: а)  $Q_A = qa$ ;  $M_C = qa^2/2$ ;  
 б)  $Q_A = q(l - 2a)/2$ ;  $M_C = q(l^2 - 4a^2)/8$ ;  
 в)  $Q_A = 0$ ;  $M_C = ql^2/16$ ;  
 з)  $Q_A = ql/4$ ;  $M_C = 0$ .

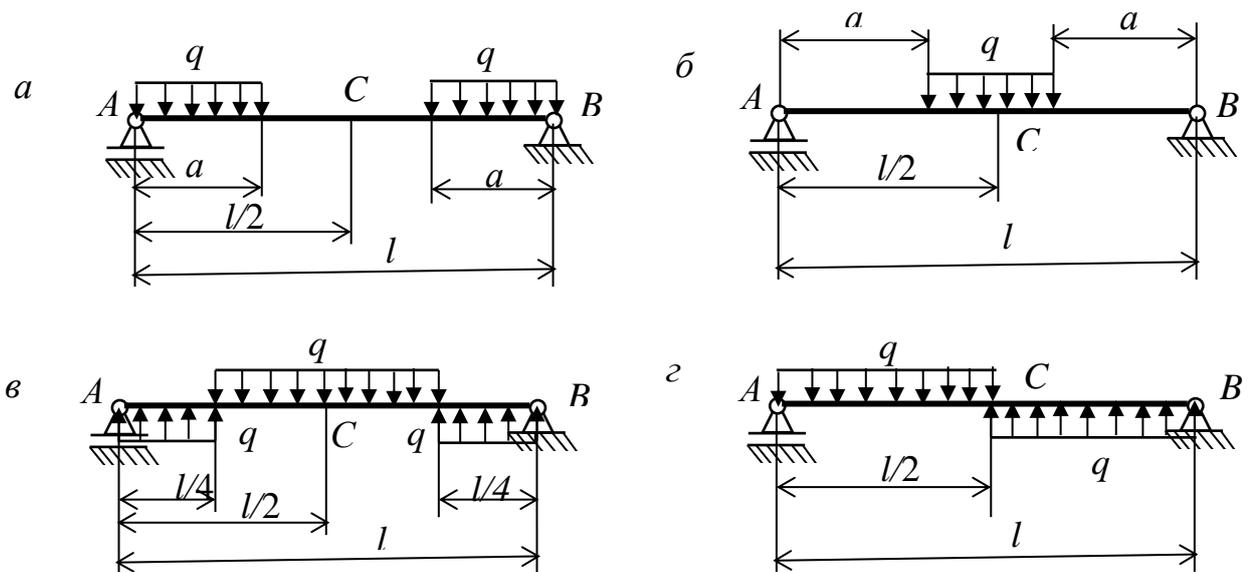


Рисунок 4.6

**4.5** Для заданной схемы балки (рисунок 4.7) требуется написать в общем виде выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ , действующих в поперечных сечениях каждого участка балки, построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти  $M_{\max}$  и подобрать по таблице А.1 приложения А стальную балку двутаврового поперечного сечения при  $[\sigma] = 160$  МПа. Данные взять из таблицы 4.1.

Таблица 4.1 – Исходные данные для расчета балки

Вариант	Данные величин						
	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$l$ , м	$F$ , кН	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м
1	2,0	3,2	1,8	10	20	7	22
2	2,2	3,4	1,9	10	19	7	21
3	2,4	3,6	2,0	11	18	8	20
4	2,6	3,8	2,1	11	16	8	19
5	2,8	4,0	2,2	12	15	9	18
6	3,0	4,2	2,3	12	14	9	17
7	3,2	4,4	2,4	13	13	10	16
8	3,4	4,6	2,5	13	12	10	15
9	3,6	4,8	2,6	14	11	11	14
10	3,8	5,0	2,7	14	10	11	13

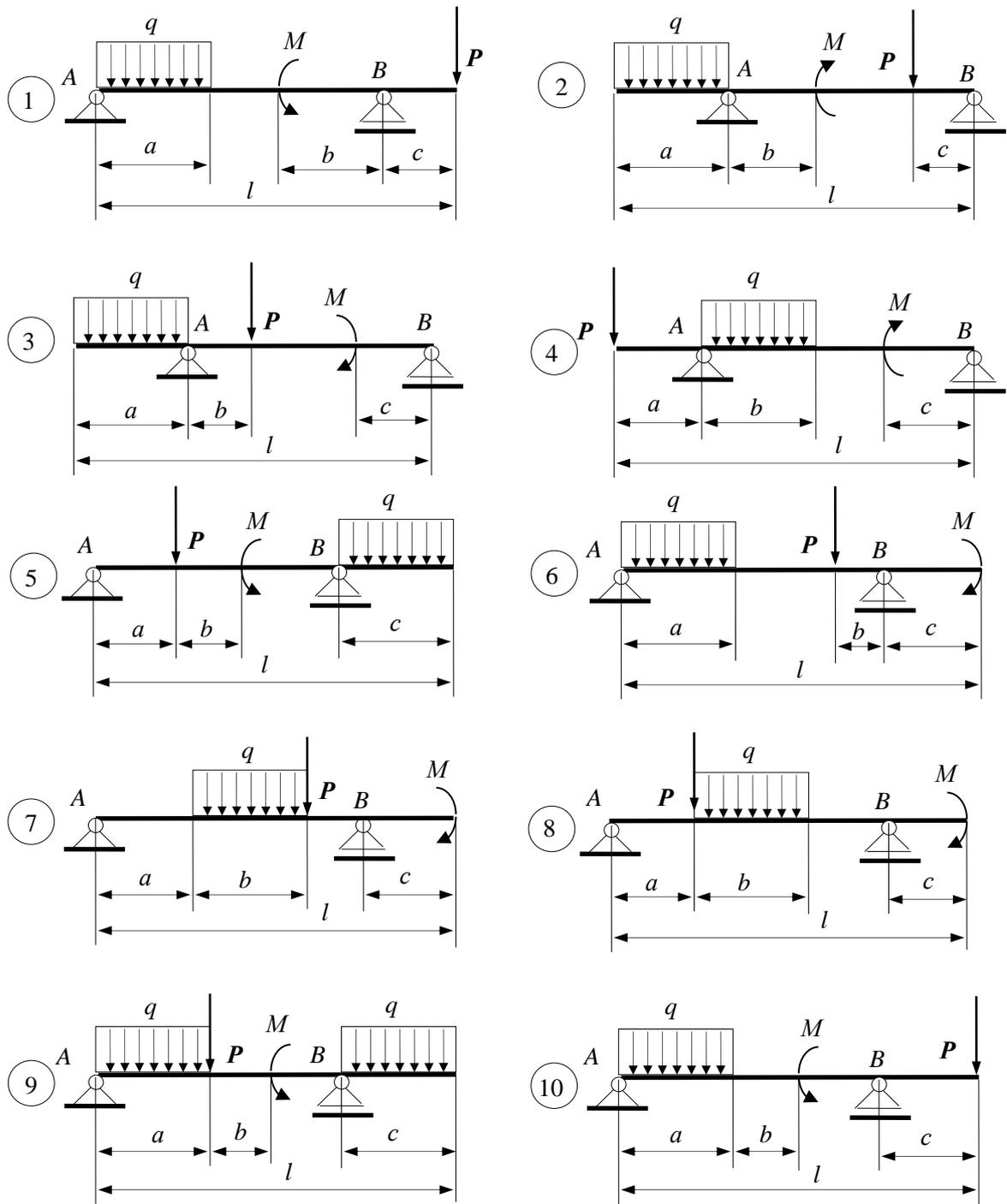


Рисунок 4.7

## 5 Геометрический и кинематический расчет зубчатых передач

### 5.1 Геометрический расчет зубчатых передач

Передача движения в зубчатых передачах осуществляется за счет зацепления зубьев, которыми оснащены колеса. Та часть зубчатого колеса, где располагаются зубья, называется *венцом* (рисунок 5.1). Венец представляет собой чередование зубьев и расположенных между ними впадин. Зубья колеса располагаются между окружностью диаметром  $d_a$ , очерчивающей вершины зубьев (*окружность вершин*), и окружностью диаметром  $d_f$ , ограничивающей основания впадин (*окружность впадин*). Если окружность вершин находится снаружи окружности впадин, то мы имеем зубчатое колесо с *внешними зубьями*. У зубчатого колеса с *внутренними зубьями* окружность вершин находится внутри окружности впадин. Между окружностями вершин и впадин располагается окружность диаметром  $d$  (*делительная окружность*), которая делит зуб на две части: часть зуба высотой  $h_a$ , расположенная между делительной окружностью и окружностью вершин, называется *головкой зуба*, а часть зуба высотой  $h_f$ , заключенная между делительной окружностью и окружностью впадин, называется *ножкой зуба*. Полная высота зуба  $h$  определится выражением  $h = h_a + h_f$ .

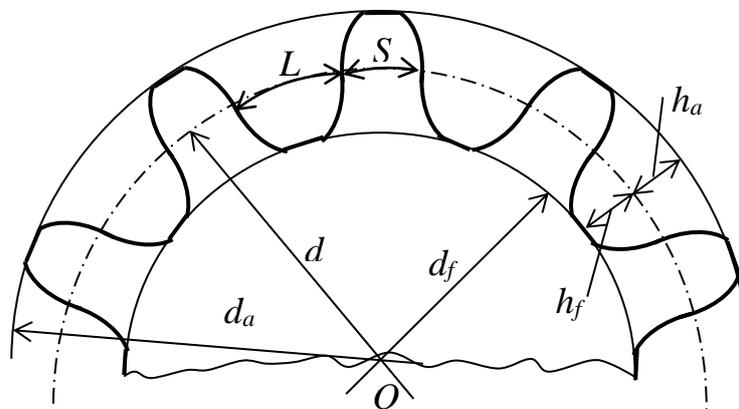


Рисунок 5.1

Диаметры окружностей вершин и впадин связаны с делительной окружностью следующими выражениями:

$$d_a = d \pm 2h_a; \quad d_f = d \mp 2h_f, \quad (5.1)$$

где верхний знак относится к зубчатому колесу с внешними зубьями, а нижний – к колесу с внутренними зубьями.

Расстояние  $c$  между окружностью вершин одного зубчатого колеса и окружностью впадин другого называется *радиальным зазором* зубчатой передачи. Этот зазор необходим для исключения заклинивания зубчатой передачи вследствие температурных изменений размеров, ошибок ее изготовления и сборки. Радиальный зазор в зубчатой передаче обеспечивается за счет разницы в высотах ножки и головки зуба, равной величине радиального зазора:

$$c = h_f - h_a .$$

Расстояние  $p$  между одноименными профилями двух соседних зубьев, измеренное по дуге делительной окружности, называют *окружным шагом* зубьев. Для обеспечения передачи движения от одного зубчатого колеса к другому окружной шаг этих колес должен быть одинаков, т. е.  $p_1 = p_2 = p$ . Зубчатые колеса, имеющие одинаковый окружной шаг, называются *сопряженными*, или *парными* колесами.

При взаимодействии сопряженных колес для каждого из них можно выделить условные окружности, перекатываемые одна относительно другой без скольжения. Такие окружности называются *начальными*.

При проектировании зубчатых колес принимают, что делительные окружности совпадают с начальными. Такие совпадения возможны при условии отсутствия погрешностей в изготовлении и сборке зубчатых передач. Необходимо также отметить, что понятие начальных окружностей имеет смысл при рассмотрении кинематики двух контактирующих звеньев, а понятие делительной окружности относится к каждому отдельно взятому зубчатому колесу и связано с его геометрией: делительная окружность делит зуб на головку и ножку.

Если число зубьев двух сопряженных колес равно  $z_1$  и  $z_2$ , а окружной шаг  $p$ , то для этих колес будут справедливы следующие равенства:

$$\pi d_1 = z_1 p \text{ и } \pi d_2 = z_2 p . \quad (5.2)$$

Разделив второе равенство на первое, получим следующее соотношение:

$$d_2/d_1 = z_2/z_1, \quad (5.3)$$

в соответствии с которым отношение диаметров начальных окружностей сопряженных зубчатых колес равно отношению числа зубьев этих колес.

Следствием перекатывания без скольжения начальных окружностей, совпадающих с делительными окружностями сопряженных колес, является равенство линейных скоростей точек контакта этих окружностей, т. е.  $V_1 = V_2$ .

Так как  $V_1 = \omega_1 d_1/2$  и  $V_2 = \omega_2 d_2/2$ , для передаточного отношения с учетом (5.3) получим выражение в виде

$$i_{1-2} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1. \quad (5.4)$$

В соответствии с (5.2) диаметр делительной окружности зубчатого колеса можно выразить через окружной шаг  $p$  и число зубьев  $z$ :  $d = (p/\pi)z$ . Для получения определенности в вычислении диаметра  $d$  ( $\pi$  неопределимое число) вводится параметр  $m = p/\pi$ , названный *окружным модулем*, или просто *модулем*. Тогда диаметр делительной окружности определится выражением

$$d = mz. \quad (5.5)$$

Значения модуля выбираются из стандартного ряда значений модулей. Зубчатые колеса со значением модуля  $m < 1$  мм принято называть мелко-модульными. В механизмах приборных устройств используются мелко-модульные зубчатые передачи.

Расчет геометрических размеров зубчатых передач производят по формулам, в которых используются относительные величины, и параметры зацепления выражаются через модуль  $m$ . Относительными величинами являются коэффициенты головки зуба  $h_a^*$  и радиального зазора  $c^*$ . В частности, высота делительной головки зуба  $h_a$ , т. е. расстояние между окружностью вершин и делительной окружностью, и радиальный зазор зубчатой передачи выражаются через модуль по следующим формулам:

$$h_a = h_a^* m; \quad c = c^* m. \quad (5.6)$$

Тогда расстояние между делительной окружностью и окружностью впадин, являющееся высотой делительной ножки зуба, найдется из выражения

$$h_f = h_a + c = (h_a^* + c^*) m, \quad (5.7)$$

а высота зуба  $h$  – из выражения

$$h = h_a + h_f = (2h_a^* + c^*) m. \quad (5.8)$$

Выражения для определения диаметров окружностей вершин зубьев ( $d_a$ ) и впадин ( $d_f$ ), а также межосевого расстояния  $a$  (диаметры делительных окружностей приняты равными диаметрам начальных окружностей) запишутся через модуль и относительные коэффициенты в следующем виде:

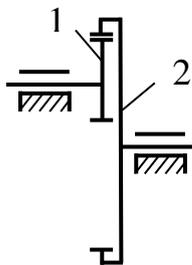
$$d_a = d \pm 2h_a = m(z \pm 2h_a^*); \quad (5.9)$$

$$d_f = d \mp 2h_f = m(z \mp 2(h_a^* + c^*)); \quad (5.10)$$

$$a = (d_1 \pm d_2)/2 = m(z_1 \pm z_2)/2, \quad (5.11)$$

где  $z_1, z_2$  – число зубьев сопряженных зубчатых колес;  $d, d_1, d_2$  – диаметры делительных окружностей; верхний знак в выражениях (5.9), (5.10) для колес с внешними зубьями, нижний – для колес с внутренними зубьями; в выражении (5.11) верхний знак для внешнего зацепления зубчатых колес, нижний – для внутреннего зацепления.

**Пример 5.1.** В зубчатой передаче с внутренним зацеплением, состоящей из двух цилиндрических колес 1 и 2 (рисунок 5.2), числа зубьев которых равны  $z_1 = 17, z_2 = 51$ , а модуль зацепления равен  $m = 0,5$  мм, определить диаметры делительной окружности  $d$ , окружности вершин зубьев  $d_a$ , окружности впадин  $d_f$  для каждого колеса, а также межосевое расстояние  $a$ . Принять значения коэффициента головки зуба равным  $h_a^* = 1$ , а коэффициента радиального зазора –  $c^* = 0,5$ .



*Решение.* Определим диаметры делительной окружности  $d_1$ , окружностей вершин зубьев  $d_{a1}$  и впадин  $d_{f1}$  колеса 1 с внешними зубьями:

$$d_1 = mz_1 = 0,5 \cdot 17 = 8,5 \text{ (мм)};$$

$$d_{a1} = m(z_1 + 2h_a^*) = 0,5(17 + 2) = 9,5 \text{ (мм)};$$

Рисунок 5.2  $d_{f1} = m(z_1 - 2(h_a^* + c^*)) = 0,5(17 - 2(1 + 0,5)) = 7 \text{ (мм)}.$

Найдем значения диаметров делительной окружности  $d_2$ , окружностей вершин зубьев  $d_{a2}$  и впадин  $d_{f2}$  колеса 2 с внутренними зубьями:

$$d_2 = mz_2 = 0,5 \cdot 51 = 25,5 \text{ (мм)};$$

$$d_{a2} = m(z_2 - 2h_a^*) = 0,5(51 - 2) = 24,5 \text{ (мм)};$$

$$d_{f2} = m(z_2 + 2(h_a^* + c^*)) = 0,5(51 + 2(1 + 0,5)) = 27 \text{ (мм)}.$$

Вычислим межосевое расстояние  $a$ :

$$a = 0,5m(z_2 - z_1) = 0,5 \cdot 0,5(51 - 17) = 8,5 \text{ (мм)}.$$

### Задачи

**5.1** В зубчатой передаче с внешним зацеплением, состоящей из двух колес с числом зубьев  $z_1 = 20$  и  $z_2 = 80$ , определить диаметры делительных окружностей  $d_1, d_2$ , окружностей вершин зубьев  $d_{a1}, d_{a2}$ , окружности впадин второго колеса  $d_{f2}$  и межосевое расстояние  $a$ , если известно значение диамет-

ра окружности впадин первого колеса  $d_{f1} = 7$  мм. Принять значения коэффициентов головки зуба и радиального зазора равными  $h_a^* = 1$ ,  $c^* = 0,25$ .

**5.2** Для колеса с внешними зубьями, имеющего число зубьев  $z = 35$  и диаметр окружности вершин зубьев  $d_a = 18,5$  мм, определить значение модуля  $m$ , диаметр делительной окружности  $d$  и диаметр окружности впадин  $d_f$ . Принять значения коэффициентов головки зуба и радиального зазора равными  $h_a^* = 1$ ,  $c^* = 0,25$ .

**5.3** Известен диаметр окружности вершин зубьев колеса с внутренними зубьями  $d_a = 30,4$  мм и число зубьев  $z = 78$ . Определить модуль зацепления  $m$ , диаметр делительной окружности  $d$  и диаметр окружности впадин  $d_f$ , если коэффициент головки зуба равен  $h_a^* = 1$ , а коэффициентов радиального зазора –  $c^* = 0,25$ .

**5.4** Для колеса с внешними зубьями модуль  $m = 0,5$  мм, диаметр окружности вершин зубьев  $d_a = 30$  мм. Приняв значения коэффициентов головки зуба и радиального зазора равными соответственно  $h_a^* = 1$ ,  $c^* = 0,25$ , определить число зубьев  $z$  колеса, делительный диаметр  $d$  и диаметр окружности впадин  $d_f$ .

**5.5** Цилиндрическая шестерня имеет число зубьев  $z = 21$  и диаметр окружности впадин  $d_f = 7,32$  мм. Для коэффициентов головки зуба и радиального зазора, равных соответственно  $h_a^* = 1$ ,  $c^* = 0,35$ , определить модуль  $m$  зубчатого колеса, диаметры делительной окружности  $d$  и окружности вершин зубьев  $d_a$ .

**5.6** Передаточное отношение для пары зубчатых колес равно  $i_{1-2} = 3,8$ , а модуль зацепления  $m = 0,6$  мм. Определить межосевое расстояние  $a$  и число зубьев  $z_1, z_2$  колес, если делительный диаметр шестерни равен  $d_1 = 15$  мм.

**5.7** Определить модуль  $m$  зубчатой передачи, состоящей из двух колес, и число зубьев  $z_1, z_2$  этих колес, если межосевое расстояние  $a = 42,5$  мм, а диаметры окружностей вершин зубьев равны  $d_{a1} = 23$  мм,  $d_{a2} = 66$  мм. Коэффициент высоты головки зуба принять равным  $h_a^* = 1$ .

**5.8** Для зубчатого колеса, диаметр делительной окружности которого равен  $d = 36,8$  мм и высота зуба равна  $h = 1,88$  мм, определить модуль  $m$  и число зубьев  $z$ . Значения коэффициентов головки зуба и радиального зазора принять равными соответственно  $h_a^* = 1$ ,  $c^* = 0,35$ .

## 5.2 Кинематический расчет зубчатых передач

Кинематическое исследование зубчатых передач заключается в определении передаточного отношения. Передаточное отношение  $i$  – это отношение угловой скорости на входе  $\omega_{\text{ВХ}}$  к угловой скорости на выходе  $\omega_{\text{ВЫХ}}$  передачи:

$$i = \omega_{\text{ВХ}} / \omega_{\text{ВЫХ}}.$$

Для зубчатых передач отношение угловых скоростей может быть выражено через соответствующее отношение числа зубьев зубчатых колес передачи. Так для пары зубчатых колес с числом зубьев  $z_1$  и  $z_2$  передаточное отношение определится выражением

$$i = \omega_{\text{ВХ}} / \omega_{\text{ВЫХ}} = \pm z_2 / z_1,$$

где знак « $\rightarrow$ » берется при внешнем зацеплении зубчатых колес, а знак « $+$ » – при внутреннем зацеплении.

Для  $n$ -ступенчатой зубчатой передачи общее передаточное отношение определяется как произведение передаточных отношений отдельных ступеней:

$$i = i_1 i_2 \dots i_n.$$

Если  $n$ -ступенчатая зубчатая передача состоит из  $2n$  зубчатых колес с числом зубьев  $z_1, z_2, \dots, z_{2n}$ , закрепленных на валах, вращающихся в неподвижных опорах, то передаточное отношение определится выражением

$$i = \omega_{\text{ВХ}} / \omega_{\text{ВЫХ}} = (-1)^k \frac{z_2 z_4 \dots z_{2n}}{z_1 z_3 \dots z_{2n-1}},$$

где  $k$  – число внешних зацеплений зубчатых колес в передаче.

Для планетарных передач, у которых хотя бы одно колесо имеет подвижную ось, передаточное отношение определяется по формуле Виллиса:

$$i_{k-H}^l = 1 - i_{k-l}^H,$$

где  $i_{k-H}^l$  – искомое передаточное отношение от  $k$ -го звена к звену  $H$  (водилу) при неподвижном звене  $l$ ;  $i_{k-l}^H$  – передаточное отношение от  $k$ -го звена к звену  $l$  при неподвижном водиле  $H$ .

Если входным звеном планетарной передачи является водило  $H$ , то передаточное отношение от водила к  $k$ -му звену определится как обратное отношение:

$$i_{H-k}^l = 1 / i_{k-H}^l.$$

Для червячного механизма передаточное отношение  $i$  определяется как отношение числа зубьев червячного колеса  $z_k$  к числу заходов червяка  $z_ч$ :

$$i = \omega_ч / \omega_k = z_k / z_ч .$$

**Пример 5.2.** Для редуктора, представленного на рисунке 5.3, определить передаточное отношение  $i_{1-7}$ , если  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 80$ ,  $z_3 = 17$ ,  $z_4 = 51$ ,  $z_5 = 20$ ,  $z_6 = 48$ .

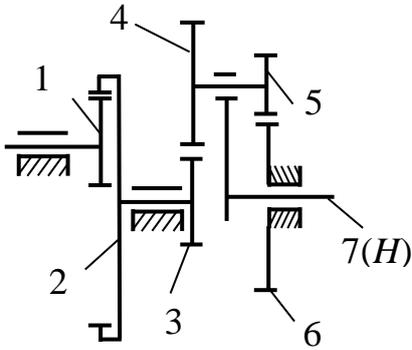


Рисунок 5.3

*Решение.* Данный редуктор состоит из двух ступеней: рядовой цилиндрической передачи, состоящей из колес 1 и 2, и планетарной передачи, содержащей зубчатые колеса 3 – 6 и водило 7(H). Передаточное отношение редуктора будет равно произведению передаточных отношений ступеней, т. е.  $i_{1-7} = i_{1-2} \cdot i_{3-7}$ . Для первой ступени  $i_{1-2} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1 = 80 / 20 = 4$ . Передаточное отношение для первой ступени положительное, так как мы имеем внутреннее зацепление зубчатых колес (колесо 2 с внутренними зубьями).

Для определения передаточного отношения планетарной ступени воспользуемся формулой Виллиса:  $i_{k-H}^l = 1 - i_{k-l}^H$ . В нашем случае  $k = 3$ ,  $H = 7$ ,  $l = 6$ . Неподвижным является колесо 6.

Тогда передаточное отношение планетарной передачи определится как

$$i_{3-7}^6 = \omega_3 / \omega_7 = 1 - i_{3-6}^7 = 1 - ((-z_4 / z_3)(-z_6 / z_5)) = 1 - 51 \cdot 48 / 17 \cdot 20 = -6,2.$$

Передаточное отношение редуктора будет равно

$$i_{1-7} = \omega_1 / \omega_7 = i_{1-2} \cdot i_{3-7} = 4 \cdot (-6,2) = -24,8.$$

Ответ:  $i_{1-7} = -24,8$ .

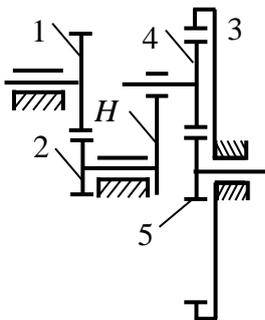


Рисунок 5.4

**Пример 5.3.** Для представленного на рисунке 5.4 редуктора подсчитать передаточное отношение  $i_{1-5}$ , если  $z_1 = z_4 = 30$ ,  $z_2 = z_5 = 20$ ,  $z_3 = 80$ .

*Решение.* Устанавливаем, что редуктор двухступенчатый: первая ступень (рядовая передача) – от колеса 1 к колесу 2; вторая (планетарная передача) – от водила H к колесу 5.

Подсчитываем передаточные отношения отдельных ступеней. Для первой ступени имеем

$$i_{1-2} = \omega_1 / \omega_2 = -z_2 / z_1 = -20 / 30 = -2/3;$$

для второй ступени имеем

$$i_{H-5} = \frac{\omega_H}{\omega_5} = \frac{1}{i_{5-H}} = \frac{1}{1-i_{5-3}^H} = \frac{1}{1+\frac{z_3}{z_5}} = \frac{1}{5}.$$

Передаточное отношение редуктора

$$i_{1-5} = i_{1-2}i_{H-5} = -\frac{2}{3} \frac{1}{5} = -\frac{1}{7,5}.$$

Ответ:  $i_{1-5} = -1/7,5 \approx -0,143$ .

**Пример 5.4.** Рассчитать одноступенчатый зубчатый механизм с цилиндрическими колесами, если заданы момент на выходном валу механизма (момент сопротивления)  $T_{\text{вых}} = 0,4$  Н, частота вращения выходного вала механизма  $n_{\text{вых}} = 310$  мин<sup>-1</sup> и передаточное отношение  $i = 4,13$ . Принять коэффициент полезного действия механизма, учитывающий потери в зубчатом зацеплении, подшипниках и муфте, соединяющей вал электродвигателя с входным валом механизма, равным  $\eta = 0,84$ .

Необходимо рассчитать геометрические параметры ( $d, d_a, d_f, h, h_a, h_f$ ) шестерни 1 и ведомого колеса 2, определить мощность  $N_{\text{дв}}$  и частоту вращения  $n_{\text{дв}}$  электродвигателя.

*Решение.* Рассчитываемый механизм служит для уменьшения скорости вращения электродвигателя в  $i$  число раз и состоит из пары находящихся в зацеплении цилиндрических зубчатых колес (шестерни 1 и колеса 2). Зубчатые колеса устанавливаются на валах, которые поддерживаются в требуемом положении опорами. Каждый вал имеет две опоры (скольжения или качения), закрепленные в корпусе. Быстроходный вал редуктора соединен с валом электродвигателя муфтой.

Определяем требуемую мощность  $N_{\text{дв}}$  электродвигателя, приняв коэффициент полезного действия электромеханического привода для выбранной схемы равным  $\eta = 0,84$ ,

$$N_{\text{дв}} = kN_{\text{вых}}/\eta \text{ [Вт]},$$

где  $k$  – коэффициент запаса, учитывающий необходимость преодоления динамических нагрузок в момент разгона, принимаемый равным 1,05–1,1;  $N_{\text{вых}} = T_{\text{вых}} \cdot \omega_{\text{вых}}$  – требуемая мощность на выходном валу;  $\omega_{\text{вых}} = 2\pi n_{\text{вых}}/60$  – угловая скорость выходного вала, рад/с;  $n_{\text{вых}}$  – угловая скорость выходного вала в об/мин;  $T_{\text{вых}}$  – момент на выходном валу, Нм.

Скорость вращения выходного вала  $\omega_{\text{вых}}$  в рад/с равна

$$\omega_{\text{вых}} = (2 \cdot 3,14 \cdot 310)/60 = 32,45 \text{ рад/с}.$$

Подставив значения  $\eta$ ,  $T_{\text{вых}}$ ,  $\omega_{\text{вых}}$  в выражение для мощности двигателя и приняв  $k = 1,1$ , получим

$$N_{\text{дв}} = (k \cdot T_{\text{вых}} \cdot \omega_{\text{вых}}) / \eta = (1,1 \cdot 0,4 \cdot 32,45) = 17,02 \text{ Вт.}$$

Частота вращения электродвигателя

$$n_{\text{дв}} = n_{\text{вых}} \cdot i = 310 \cdot 4,13 = 1280,3 \text{ об/мин.}$$

Из серии двигателей, имеющих скорости вращения 1250, 1280, 1300 об/мин выбираем электродвигатель с  $n = 1280$  об/мин и мощностью  $N \geq 17$  Вт.

Выбираем число зубьев  $z_1$  шестерни. Так как  $z_{\text{min}} = 17$ , а рекомендуемое значение числа зубьев шестерни составляет 18 – 30, принимаем  $z_1 = 20$ .

Число зубьев зубчатого колеса определяем по формуле

$$z_2 = z_1 \cdot i = 20 \cdot 4,13 = 82,6.$$

Так как колесо должно иметь целое число зубьев, принимаем  $z_2 = 82$ . Тогда фактическое передаточное отношение зубчатой передачи

$$i_{\phi} = z_2 / z_1 = 82 / 20 = 4,1.$$

Относительная погрешность передаточного отношения зубчатой передачи

$$\Delta i \% = (|i - i_{\phi}|) \cdot 100 \% / i = (4,13 - 4,1) \cdot 100 \% / 4,13 = 0,73 \%.$$

Допустимая погрешность  $\Delta i$  передаточного отношения не должна превышать 3,5 %.

Выбираем значение модуля  $m$  зацепления из стандартного ряда модулей (0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,25 мм). Применение малых модулей позволяет уменьшить габариты колес или при сохранении габаритов увеличить плавность передачи за счет увеличения числа зубьев. Принимаем  $m = 0,5$  мм.

Предполагая прямозубый тип зубчатых колес, определим диаметр делительной окружности колеса (ведомого звена):

$$d_2 = m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 82 = 41 \text{ мм.}$$

Линейная скорость  $v$  зубчатого колеса в зацеплении

$$v = \omega_{\text{вых}} \cdot d_2 / 2 = (32,45 \cdot 41) / (2 \cdot 10^{-3}) = 0,66 \text{ м/с.}$$

При линейных скоростях  $v < 6$  м/с принимают тип передачи – прямо-зубая.

У зубчатых колес со стандартной (нормальной) высотой зуба коэффициент высоты головки зуба  $h_a^* = 1$ , а коэффициент радиального зазора  $c^*$  зубьев в зацеплении зависит от модуля и равен

$$c^* = 0,5 \text{ при } m \leq 0,5 \text{ мм};$$

$$c^* = 0,35 \text{ при } 0,5 < m < 1,0;$$

$$c^* = 0,25 \text{ при } m \geq 1,0 \text{ мм.}$$

Высота головки зубьев колес

$$h_a = h_a^* \cdot m = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ мм.}$$

Высота ножки зубьев колес

$$h_f = m(h_a^* + c^*) = 0,5(1 + 0,5) = 0,75 \text{ мм.}$$

Диаметры делительных окружностей зубчатых колес:

- шестерни:  $d_1 = m \cdot z_1 = 0,5 \cdot 20 = 10$  мм;

- колеса:  $d_2 = m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 82 = 41$  мм.

Диаметры окружностей вершин зубьев колес:

- шестерни:  $d_{a1} = d_1 + 2h_a = 10 + 2 \cdot 0,5 = 11$  мм;

- колеса:  $d_{a2} = d_2 + 2h_a = 41 + 2 \cdot 0,5 = 42$  мм.

Диаметры окружностей впадин зубьев колес:

- шестерни:  $d_{f1} = d_1 - 2h_f = 10 - 2 \cdot 0,5 = 8,5$  мм;

- колеса:  $d_{f2} = d_2 - 2h_f = 41 - 2 \cdot 0,5 = 39,5$  мм.

Межосевое расстояние  $a$  зубчатой передачи

$$a = (d_1 + d_2)/2 = (10 + 41)/2 = 25,5 \text{ мм.}$$

### Задачи

**5.9** Определить передаточное отношение  $i_{1-3}$  зубчатой передачи (рисунок 5.5), если числа зубьев колес равны  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ ,  $z_3 = 40$ .

Ответ:  $i_{1-3} = 2$ .

**5.10** Определить передаточное отношение  $i_{1-6}$  зубчатой передачи (рисунок 5.6), если числа зубьев равны  $z_1 = 16, z_2 = 48, z_3 = 20, z_4 = 40, z_5 = 13, z_6 = 26$ .

Ответ:  $i_{1-6} = -12$ .

**5.11** Определить передаточное отношение  $i_{1-3}$  зубчатой передачи (рисунок 5.7), если числа зубьев колес равны  $z_1 = z_2 = 20, z_3 = 60$ .

Ответ:  $i_{1-3} = -3$ .

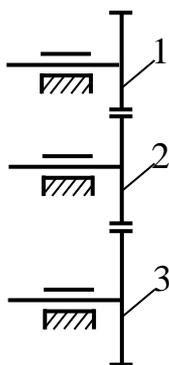


Рисунок 5.5

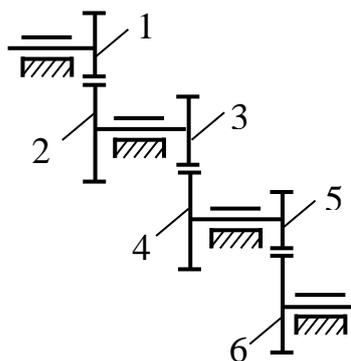


Рисунок 5.6

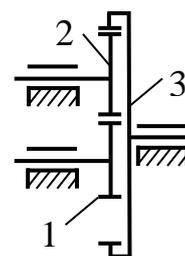


Рисунок 5.7

**5.12** Редуктор скорости (рисунок 5.8), служащий для замедления вращения и передающий вращение вала I валу II, состоит из четырех шестерен с соответствующим числом зубьев:  $z_1 = 10, z_2 = 60, z_3 = 12, z_4 = 70$ . Определить передаточное отношение механизма.

Ответ:  $i_{I-II} = \omega_I/\omega_{II} = 35$ .

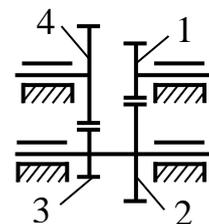


Рисунок 5.8

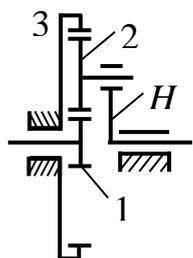


Рисунок 5.9

**5.13** В представленном на рисунке 5.9 планетарном зубчатом механизме (редуктор Джемса) известно количество зубьев центральных колес:  $z_1 = 20, z_3 = 80$ . Определить количество зубьев сателлита  $z_2$  и передаточное отношение  $i_{1-H}$  всего механизма.

Ответ:  $z_2 = 30, i_{1-H} = 5$ .

**5.14** Для редуктора Давида (рисунок 5.10) подсчитать передаточное отношение  $i_{H-1}$  при  $z_1 = z_3 = 100, z_2 = 99, z_4 = 101$ .

Ответ:  $i_{H-1} = 10000$ .

**5.15** Определить передаточное отношение  $i_{1-H}$  редуктора Давида (рисунок 5.11), если числа зубьев колес равны  $z_1 = 24, z_2 = 36, z_3 = 12, z_4 = 48$ .

Ответ:  $i_{1-H} = -5$ .

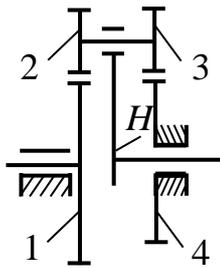


Рисунок 5.10

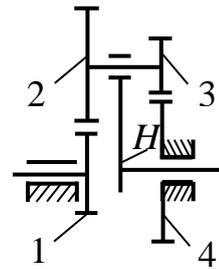


Рисунок 5.11

**5.16** На рисунке 5.12 показаны 10 схем зубчатых передач. Входное колесо 1 в данный момент имеет угловую скорость  $\omega_1$  и постоянное угловое ускорение  $\varepsilon_1$ , направленное по движению или против движения. Определить:

- передаточное отношение между входным и выходным звеньями и его знак (если их оси вращения параллельны);
- угловую скорость и угловое ускорение выходного звена, их направления показать на схеме передачи;
- время, в течение которого угловая скорость увеличится в два раза (если движение ускоренное) или уменьшится до нуля (если движение замедленное);
- общий коэффициент полезного действия передачи.

В таблицах 5.1–5.10 заданных величин  $z$  – число зубьев колес приводится с индексом, соответствующим их номеру на схеме механизма, для червяка  $z$  – число заходов, а направление витков червяка указано буквами: л – левое, п – правое.

Для расчетов принять следующие значения КПД (учитывающего потери и в зацеплении, и в подшипниках): для пары цилиндрических колес  $\eta_{ц} = 0,97$ ; для пары конических колес  $\eta_{к} = 0,95$ ; для планетарной передачи с внешними зацеплениями ее колес  $\eta_{п} = 0,95$ , а для имеющей внутреннее зацепление одной из пар  $\eta_{п} = 0,96$ ; для червячной передачи при одно-, двух- и трехзаходном червяке – соответственно  $\eta_{ч} = 0,7; 0,75; 0,8$ .

Для решения задачи нужно определить, из каких видов передач состоит заданное сложное соединение зубчатых колес, уметь находить планетарную передачу с ее характерными звеньями – водилом и сателлитами, разделять передачи на плоские и пространственные (с непараллельными осями вращения). Нужно понимать, когда направления вращения можно определять по алгебраическим знакам передаточного отношения, а когда для этого необходимо применять простановку стрелок на схеме. Очень важны показанные направления угловой скорости и углового ускорения – по ним определяют характер движения (ускоренное, замедленное).

**5.17** Рассчитать одноступенчатый зубчатый механизм с цилиндрическими зубчатыми колесами. В таблице 5.11 заданы момент  $T_{\text{вых}}$  на выходном валу механизма (момент сопротивления), частота вращения выходного вала

зубчатого механизма и передаточное отношение  $i$  механизма. Принять коэффициент полезного действия механизма, учитывающий потери в зубчатом зацеплении, подшипниках и муфте, соединяющей вал электродвигателя с входным валом механизма, равным  $\eta = 0,84$ .

Необходимо рассчитать геометрические параметры ( $d, d_a, d_f, h, h_a, h_f$ ) шестерни 1 и ведомого колеса 2, определить мощность  $N_{дв}$  и частоту вращения  $n_{дв}$  электродвигателя.

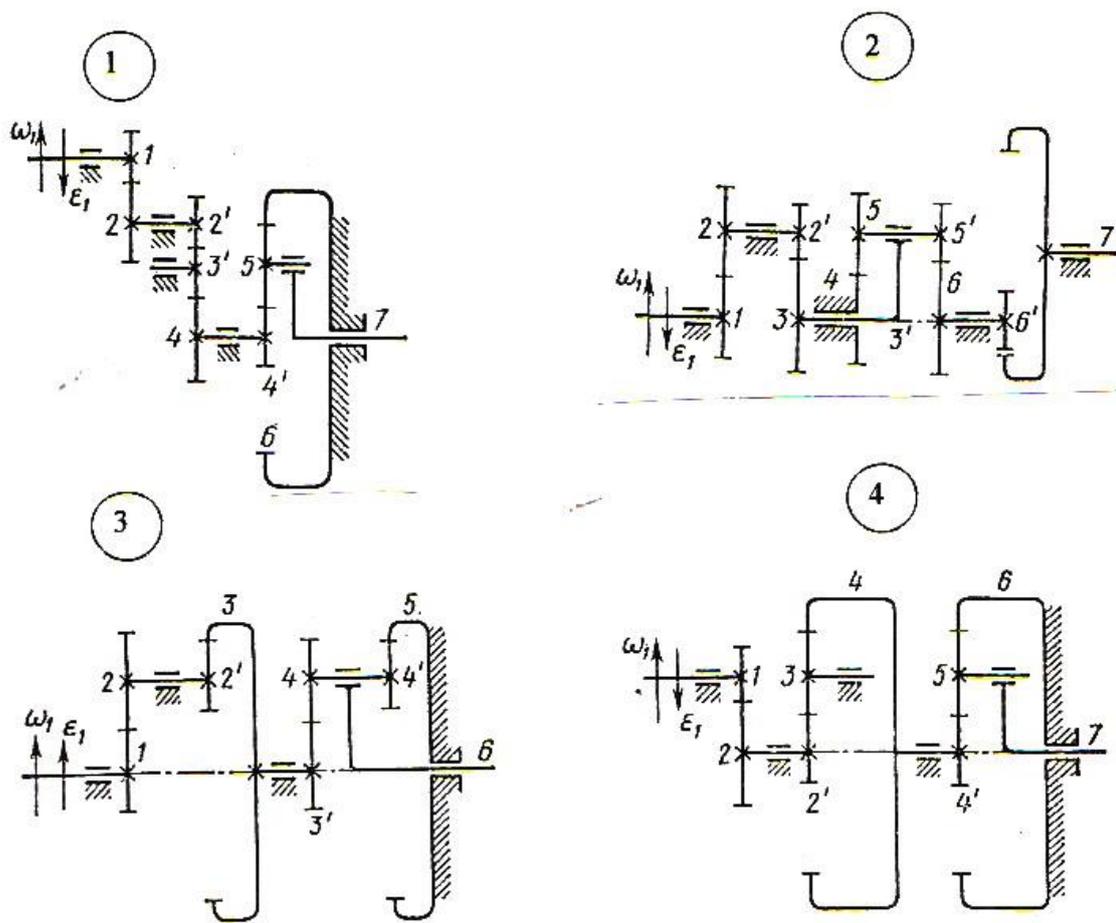


Рисунок 5.12

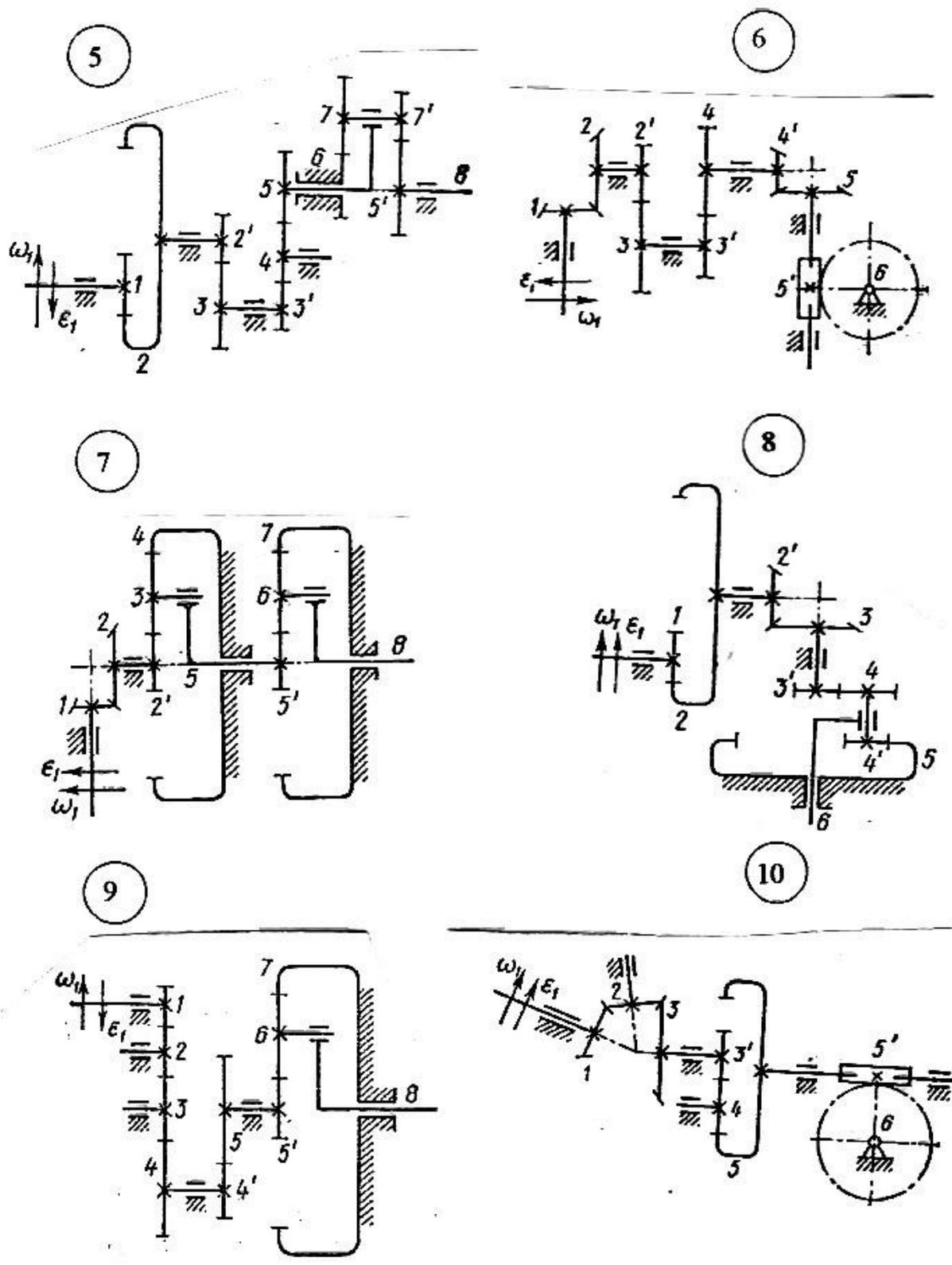


Рисунок 5.12, лист 2

Таблица 5.1 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 1

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	15	16	14	14	17	18	14	15	16	14
$z_2$	20	30	24	20	34	24	20	30	28	26
$z_2'$	14	15	14	15	17	15	15	14	14	15
$z_4$	20	20	28	21	24	26	36	38	40	43
$z_4'$	15	14	14	16	15	18	14	18	19	20
$z_5$	21	22	21	22	21	25	22	26	25	40
$z_6$	57	58	56	60	57	68	58	70	69	100
$\omega_1$ , рад/с	280	180	240	250	300	250	150	200	350	100
$\varepsilon_1$ , рад/с <sup>2</sup>	50	60	180	125	75	50	100	50	40	20

Таблица 5.2 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 2

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	22	14	25	18	21	20	16	18	16	20
$z_2$	23	22	26	30	28	30	28	28	24	21
$z_2'$	22	16	25	16	17	18	16	15	18	20
$z_3$	23	26	26	26	30	28	24	32	30	21
$z_4$	22	28	26	24	31	32	29	31	21	20
$z_5$	23	27	25	25	32	31	30	30	22	21
$z_5'$	22	28	26	24	31	32	29	31	21	20
$z_6$	23	27	25	25	32	31	30	30	22	21
$z_6'$	32	29	26	28	30	25	22	23	24	20
$z_7$	42	39	38	37	40	37	45	42	40	65
$\omega_1$ , рад/с	150	380	320	290	320	300	280	350	250	400
$\varepsilon_1$ , рад/с <sup>2</sup>	75	285	160	100	80	100	210	70	50	200

Таблица 5.3 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 3

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1, z_3'$	20	23	24	17	22	19	14	16	18	20
$z_2, z_4$	40	30	38	25	36	36	26	40	30	28
$z_2', z_4'$	22	21	22	20	26	26	21	20	22	20
$z_3, z_5$	82	74	84	62	84	79	61	76	70	68
$\omega_1$ , рад/с	320	190	220	180	200	240	300	260	340	280
$\varepsilon_1$ , рад/с <sup>2</sup>	80	95	165	200	50	180	200	130	285	210

Таблица 5.4 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 4

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	15	17	14	19	16	18	14	18	14	18
$z_2$	24	32	24	28	30	27	21	31	19	25
$z_2', z_4'$	30	25	20	20	25	21	30	29	34	42
$z_3, z_5$	20	30	40	30	21	20	21	21	20	20
$z_4, z_6$	70	85	100	80	67	61	72	71	74	82
$\omega_1, \text{рад/с}$	260	240	240	350	400	220	150	150	300	200
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	195	100	180	200	50	55	60	200	200	50

Таблица 5.5 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 5

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	29	30	27	26	25	24	23	22	21	20
$z_2$	39	40	40	36	37	40	42	46	56	65
$z_2'$	20	15	20	16	17	16	15	17	15	14
$z_3$	29	32	31	24	25	23	28	26	30	26
$z_3'$	19	21	22	15	16	15	16	13	14	15
$z_5$	29	31	30	22	23	21	22	20	24	25
$z_6$	31	30	18	17	20	19	26	25	21	20
$z_7$	30	31	17	18	19	20	25	26	20	21
$z_7'$	31	30	18	17	20	19	26	25	21	20
$z_8$	30	31	17	18	19	20	25	26	20	21
$\omega_1, \text{рад/с}$	300	260	120	280	225	100	350	150	300	200
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	150	65	200	120	50	50	200	1009	75	40

Таблица 5.6 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 6

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	22	17	20	17	21	18	20	18	17	17
$z_2$	30	23	21	25	24	21	24	30	17	20
$z_2'$	16	14	15	15	16	17	15	16	14	14
$z_3$	28	23	24	20	30	24	28	20	20	16
$z_3'$	15	15	14	16	14	14	17	18	15	15
$z_4$	31	28	24	24	21	20	30	32	20	20
$z_4'$	19	18	17	18	19	18	17	18	17	18
$z_5$	28	27	32	31	32	28	30	32	26	28
$z_5'$	2, л	3, п	2, л	1, п	3, л	2, п	1, л	3, п	2, л	1, п
$z_6$	50	33	38	40	42	40	30	36	30	50
$\omega_1, \text{рад/с}$	380	320	350	320	280	250	300	400	150	350
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	190	80	70	80	70	125	60	250	50	100

Таблица 5.7 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 7

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	18	19	16	17	18	13	14	14	16	15
$z_2$	25	28	31	27	39	24	27	20	30	25
$z_2', z_5'$	40	35	28	30	18	22	25	20	20	21
$z_3, z_6$	20	20	20	20	24	36	20	40	30	20
$z_4, z_7$	80	75	68	70	66	94	65	100	80	61
$\omega_1, \text{рад/с}$	320	360	400	180	350	320	280	120	300	250
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	80	60	50	90	200	240	75	40	200	100

Таблица 5.8 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 8

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	22	22	21	21	26	25	21	22	22	20
$z_2$	50	45	60	55	36	38	60	50	60	62
$z_2'$	18	14	18	17	16	14	15	16	17	15
$z_3$	29	26	32	30	24	26	24	24	30	28
$z_3'$	16	17	23	24	20	20	15	18	16	15
$z_4$	40	27	30	38	40	30	26	28	24	25
$z_4'$	20	20	21	22	22	20	20	21	21	22
$z_5$	76	64	74	84	82	70	61	67	61	62
$\omega_1, \text{рад/с}$	240	320	400	280	350	300	150	200	250	180
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	180	240	100	210	200	75	25	100	50	90

Таблица 5.9 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 9

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	20	14	15	19	17	14	15	18	15	14
$z_4$	30	26	25	26	28	21	20	30	21	30
$z_4'$	18	14	15	18	16	17	16	14	15	14
$z_5$	24	26	27	30	24	24	23	21	30	26
$z_5'$	15	15	14	16	15	14	15	14	18	20
$z_6$	35	30	26	30	24	23	21	22	21	25
$z_7$	85	75	66	76	63	60	57	58	60	70
$\omega_1, \text{рад/с}$	210	280	400	180	220	240	250	350	200	150
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	630	140	250	45	550	60	400	70	500	60

Таблица 5.10 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 10

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1$	19	18	20	17	18	19	17	18	18	17
$z_3$	27	24	32	30	25	30	27	30	25	28
$z_3'$	21	20	16	14	14	15	17	15	16	15
$z_5$	52	50	42	46	50	49	48	45	50	45
$z_5'$	3, п	2, л	1, п	2, л	1, п	3, л	2, п	1, л	2, п	3, л
$z_6$	33	34	50	32	29	36	40	28	28	30
$\omega_1$ , рад/с	150	200	350	240	300	350	250	100	200	180
$\varepsilon_1$ , рад/с <sup>2</sup>	500	250	700	600	500	175	125	60	50	60

Таблица 5.11 – Данные для расчета одноступенчатого зубчатого механизма

Вариант	Момент $T_{\text{вых}}$ , Нм	Частота вращения $n_{\text{вых}}$ , мин <sup>-1</sup>	Переда- точное отноше- ние $i$	Вариант	Момент $T_{\text{вых}}$ , Нм	Частота вращения $n_{\text{вых}}$ , мин <sup>-1</sup>	Переда- точное отноше- ние $i$
2	0,5	165	7,76	17	0,5	240	5,33
3	0,4	170	7,53	18	0,4	245	5,22
4	0,3	175	7,31	19	0,3	250	5,12
5	0,2	180	7,11	20	0,2	255	5,02
6	0,6	185	6,91	21	0,6	260	4,92
7	0,5	190	6,74	22	0,5	265	4,83
8	0,4	195	6,56	23	0,4	270	4,74
9	0,3	200	6,40	24	0,3	275	4,65
10	0,2	205	6,24	25	0,2	280	4,57
11	0,6	210	6,09	26	0,6	285	4,49
12	0,5	215	5,95	27	0,5	290	4,41
13	0,4	220	5,82	28	0,4	295	4,34
14	0,3	225	5,69	29	0,3	300	4,27
15	0,2	230	5,56	30	0,2	305	4,20

## 6 Точность механизмов

### 6.1 Допуски и посадки

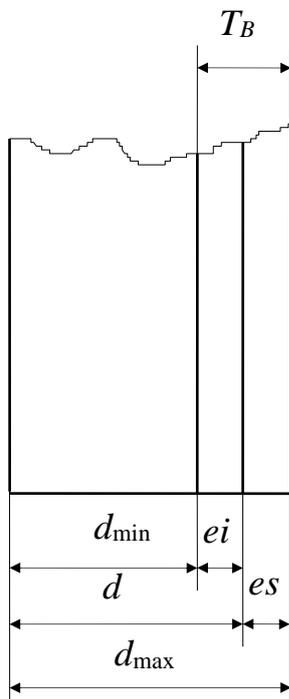


Рисунок 6.1

В соединении двух деталей, входящих одна в другую, различают наружные (охватываемые) и внутренние (охватывающие) элементы деталей, называемые соответственно валом и отверстием. Размеры валов и отверстий могут быть как диаметральными, так и линейными.

Основной размер отверстия и вала, определяемый из расчета на прочность или по конструктивным соображениям и служащий началом отсчета отклонений, называется *номинальным размером* (обозначается:  $d$  – для вала,  $D$  – для отверстия). Размер, общий для вала и отверстия, составляющих соединение, называется *номинальным размером соединения* ( $d$ ).

Размер, полученный в результате непосредственного измерения изготовленной детали, называется *действительным размером* ( $d_d$ ,  $D_d$ ). Максимальное и минимальное значения размера, между которыми должен находиться действительный размер годной детали, называют соответственно *наибольшим*

( $d_{\max}$ ;  $D_{\max}$ ) и *наименьшим* ( $d_{\min}$ ;  $D_{\min}$ ) *предельными размерами* (рисунок 6.1).

Алгебраическая разность между действительным и номинальным размерами называется *отклонением*. Алгебраическая разность между наибольшим и наименьшим предельными и номинальным размерами называется соответственно *верхним* ( $ES$  – отверстие,  $es$  – вал) и *нижним* ( $EI$  – отверстие,  $ei$  – вал) *отклонениями*.

Разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или алгебраическая разность между верхним и нижним отклонениями называют *допуском размера* ( $T_A$  – отверстия,  $T_B$  – вала). Допуск характеризует точность изготовления детали: чем он меньше, тем выше точность.

Интервал возможных значений действительного размера, ограниченный предельными размерами, называется *полем допуска*. Поле допуска определяется величиной допуска и его расположением относительно номинального размера.

При соединении двух деталей (вала и отверстия) в зависимости от взаимного расположения полей допусков можно получать различные виды соединений.

*Посадкой* называется вид соединения деталей, определяемый величиной получающихся в нем *зазоров* или *натягов*.

*Зазором*  $S$  называют положительную разность между действительными размерами отверстия и вала (размер отверстия больше размера вала).

*Натягом N* называют положительную разность между действительными размерами вала и отверстия, вычисленную до сборки деталей (размер вала больше размера отверстия).

ГОСТ 25346–89 устанавливает три типа посадок:

1) *посадки с зазором* – поле допуска отверстия расположено над полем допуска вала;

2) *посадки с натягом* – поле допуска вала расположено над полем допуска отверстия;

3) *переходные посадки* – поля допусков перекрываются.

На примере рассмотрим определение предельных размеров отверстий и валов, наибольших и наименьших зазоров (натягов), а также допуски посадок для различных типов посадок и графическое изображение полей допусков для различных посадок.

Формулы подсчета предельных величин зазоров и натягов для цилиндрических соединений имеют следующий вид:

- посадка с зазором:

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min}, \quad S_{\min} = D_{\min} - d_{\max};$$

- посадка с натягом :

$$N_{\max} = d_{\max} - D_{\min}, \quad N_{\min} = d_{\min} - D_{\max};$$

- переходная посадка :

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min}, \quad N_{\max} = d_{\max} - D_{\min}.$$

**Пример 6.1.** Для посадок  $\varnothing 12H7/f7$ ,  $\varnothing 12H7/r6$ ,  $\varnothing 12H7/k6$  рассчитать предельные размеры и допуски для отверстия и валов, определить значения максимальных и минимальных зазоров либо натягов.

Размеры отверстий у всех трех посадок одинаковые:  $\varnothing 12H7^{(0,018)}$ . Определим значения наименьшего и наибольшего предельных размеров отверстия:

$$D_{\min} = 12 \text{ мм}; \quad D_{\max} = 12,000 + 0,018 = 12,018 \text{ (мм)}.$$

Допуск размера отверстия будет равен

$$T_A = 12,018 - 12,000 = 0,018 \text{ (мм)}.$$

Рассчитаем предельные размеры и допуски валов, а также параметры соединений.

Для посадки с зазором  $\varnothing 12H7/f7$

Вал  $\varnothing 12f7 \begin{pmatrix} -0,016 \\ -0,034 \end{pmatrix}$

Соединение

$$d_{\min} = 12,000 - 0,034 = 11,966 \text{ (мм)},$$

$$d_{\max} = 12,000 - 0,016 = 11,984 \text{ (мм)},$$

$$T_B = 11,984 - 11,966 = 0,018 \text{ (мм)}.$$

$$S_{\min} = 12,000 - 11,984 = 0,016 \text{ (мм)},$$

$$S_{\max} = 12,018 - 11,966 = 0,052 \text{ (мм)},$$

$$T_S = 0,052 - 0,016 = 0,036 \text{ (мм)}.$$

Для посадки с натягом  $\varnothing 12H7/r6$

Вал  $\varnothing 12r6 \begin{pmatrix} +0,034 \\ +0,023 \end{pmatrix}$

Соединение

$$d_{\min} = 12,000 + 0,023 = 12,023 \text{ (мм)},$$

$$d_{\max} = 12,000 + 0,034 = 12,034 \text{ (мм)},$$

$$T_B = 12,034 - 12,023 = 0,011 \text{ (мм)}.$$

$$N_{\min} = 12,023 - 12,018 = 0,005 \text{ (мм)},$$

$$N_{\max} = 12,034 - 12,000 = 0,034 \text{ (мм)},$$

$$T_N = 0,034 - 0,005 = 0,029 \text{ (мм)}.$$

Для переходной посадки  $\varnothing 12H7/k6$

Вал  $\varnothing 12k6 \begin{pmatrix} +0,012 \\ +0,001 \end{pmatrix}$

Соединение

$$d_{\min} = 12,000 + 0,001 = 12,001 \text{ (мм)},$$

$$d_{\max} = 12,000 + 0,012 = 12,012 \text{ (мм)},$$

$$T_B = 12,012 - 12,001 = 0,011 \text{ (мм)}.$$

$$S_{\max} = 12,018 - 12,001 = 0,017 \text{ (мм)},$$

$$N_{\max} = 12,012 - 12,000 = 0,012 \text{ (мм)},$$

$$T_{S,N} = 0,012 - 0,017 = 0,029 \text{ (мм)},$$

где  $T_S$ ,  $T_N$ ,  $T_{S,N}$  – допуск посадки, соответственно с зазором, с натягом и переходной.

На рисунке 6.2 графически представлены схемы расположения полей допусков отверстия и вала для рассмотренных посадок с зазором, с натягом и переходной.

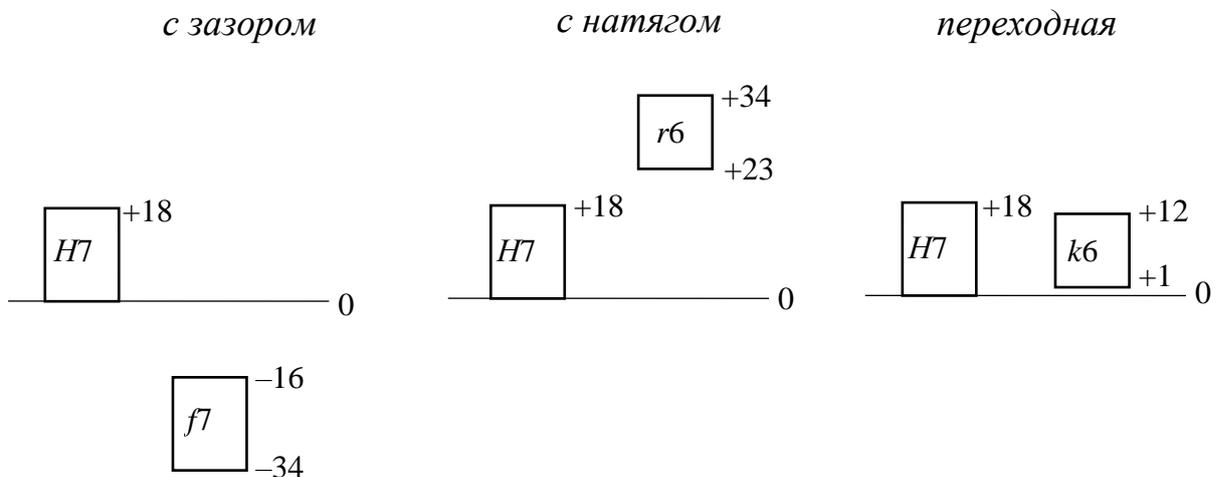


Рисунок 6.2

## Задачи

**6.1–6.10** Для посадок, представленных в таблице 6.1, рассчитать наибольшие и наименьшие размеры заданных отверстий и валов, их допуски, наибольшие и наименьшие зазоры и натяги. Построить схемы расположения полей допусков отверстий и валов, указав на схемах предельные отклонения, взятые из таблиц 6.2 и 6.3.

Таблица 6.1 – Варианты заданий для задач 6.1–6.10

Вариант	Типы посадок		
	1	$\varnothing 22H7/h6$	$\varnothing 36H7/s6$
2	$\varnothing 27H8/e8$	$\varnothing 48H7/r6$	$\varnothing 18H7/k6$
3	$\varnothing 37N7/h7$	$\varnothing 7H8/e8$	$\varnothing 25H7/r6$
4	$\varnothing 38H7/r6$	$\varnothing 12H7/e8$	$\varnothing 45H7/js6$
5	$\varnothing 22H7/e8$	$\varnothing 69H7/r6$	$\varnothing 15K7/h6$
6	$\varnothing 18E9/h8$	$\varnothing 29H7/r6$	$\varnothing 50H7/js6$
7	$\varnothing 42H7/r6$	$\varnothing 25H7/k6$	$\varnothing 18E9/h8$
8	$\varnothing 85E9/h8$	$\varnothing 35H7/s6$	$\varnothing 45H7/k6$
9	$\varnothing 5H9/h9$	$\varnothing 72H7/r6$	$\varnothing 28N7/h7$
10	$\varnothing 50P7/h6$	$\varnothing 18E9/h8$	$\varnothing 29K7/h6$

Таблица 6.2 – Предельные отклонения полей допусков отверстий

Интервалы размеров, мм	Поля допусков									
	<i>H7</i>	<i>J<sub>s</sub>7</i>	<i>K7</i>	<i>N7</i>	<i>P7</i>	<i>F8</i>	<i>H8</i>	<i>E9</i>	<i>H9</i>	<i>H11</i>
	Предельные отклонения, мкм									
От 1	+10	+5	0	-4	-6	+20	+14	+39	+25	+60
до 3	0	-5	-10	-14	-16	+6	0	+14	0	0
Св. 3	+12	+6	+3	-4	-8	+28	+18	+50	+30	+75
до 6	0	-6	-9	-16	-20	+10	0	+20	0	0
Св. 6	+15	+7	+5	-4	-9	+35	+22	+61	+36	+90
до 10	0	-7	-10	-19	-24	+13	0	+25	0	0
Св. 10	+18	+9	+6	-5	-11	+43	+27	+75	+43	+110
до 18	0	-9	-12	-23	-29	+16	0	+32	0	0
Св. 18	+21	+10	+6	-7	-14	+53	+32	+92	+52	+130
до 30	0	-10	-15	-28	-35	+20	0	+40	0	0
Св. 30	+25	+12	+7	-8	-17	+64	+39	+112	+62	+160
до 50	0	-12	-18	-33	-42	+25	0	+50	0	0
Св. 50	+30	+15	+9	-9	-21	+76	+46	+134	+74	+190
до 80	0	-15	-21	-39	-51	+30	0	+60	0	0
Св. 80	+35	+17	+10	-10	-24	+90	+54	+159	+87	+220
до 120	0	-17	-25	-45	-59	+36	0	+72	0	0
Св. 120	+40	+20	+12	-12	-28	+106	+63	+185	+100	+250
до 180	0	-20	-28	-52	-68	+43	0	+85	0	0
Св. 180	+46	+23	+13	-14	-33	+122	+72	+215	+115	+290
до 250	0	-23	-33	-60	-79	+50	0	+100	0	0

Таблица 6.3 – Предельные отклонения полей допусков валов

Интервалы размеров, мм	Поля допусков																		
	g6	h6	j <sub>s</sub> 6	k6	л6	р6	г6	h7	e8	h8	d9	h9	d11	h11					
	Предельные отклонения, мкм																		
От 1 до 3	-2	0	+3	+6	+10	+12	+16	+20	-6	0	-14	0	-20	0	-20	-14	0	-20	0
Св. 3 до 6	-4	0	+4	+9	+16	+20	+23	+27	-10	0	-20	0	-30	0	-30	0	-25	-80	-60
Св. 6 до 10	-5	0	+4,5	+10	+19	+24	+28	+32	-13	0	-25	0	-40	0	-40	0	-36	-105	-75
Св. 10 до 18	-6	0	+5,5	+12	+23	+29	+34	+39	-16	0	-32	0	-50	0	-50	0	-43	-130	-90
Св. 18 до 30	-7	0	+6,5	+15	+28	+35	+41	+48	-20	0	-40	0	-65	0	-65	0	-52	-160	-110
Св. 30 до 50	-9	0	+8	+18	+33	+42	+50	+59	-25	0	-50	0	-80	0	-80	0	-74	-190	-130
Св. 50 до 65	-10	0	+9,5	+21	+39	+51	+60	+72	-30	0	-60	0	-100	0	-100	0	-100	-240	-160
Св. 65 до 80	-29	-19	-9,5	+2	+20	+32	+62	+78	-60	-30	-106	-30	-174	-74	-290	-46	-290	-290	-190
Св. 80 до 100	-12	0	+11	+25	+45	+59	+73	+93	-36	0	-72	0	-120	0	-120	0	-120	-340	-220
Св. 100 до 120	-34	-22	-11	+3	+23	+37	+76	+101	-71	-35	-126	-35	-207	-87	-340	-54	-340	-340	-220
Св. 120 до 140							+88	+177											
Св. 140 до 160	-14	0	+12,5	+28	+52	+68	+90	+125	-43	0	-85	0	-145	0	-145	0	-145	-395	-250
Св. 160 до 180	-39	-25	-12,5	+3	+27	+43	+65	+100	-83	-40	-148	-40	-245	-100	-395	-63	-395	-395	-250
Св. 180 до 200							+93	+133											
Св. 200 до 225	-15	0	+14,5	+33	+60	+79	+106	+151	-50	0	-100	0	-170	0	-170	0	-170	-460	-290
Св. 225 до 250	-44	-29	-14,5	+4	+31	+50	+77	+122	-96	-46	-172	-46	-285	-115	-460	-72	-460	-460	-290
							+113	+169											
							+84	+140											

## 6.2 Точность зубчатых передач

Основными погрешностями зубчатых передач являются *погрешность мертвого хода* и *кинематическая погрешность*.

Погрешность мертвого хода рассчитывается при реверсивном режиме работы (изменении направления вращения колес) зубчатых передач. *Мертвый ход* пары сопряженных зубчатых колес определяется углом поворота  $\Delta\varphi$  одного колеса при неподвижном втором колесе. Причиной мертвого хода в передачах является наличие бокового зазора  $j_n$  между зубьями сопряженных колес (*кинематический мертвый ход*) и упругими деформациями валов под действием передаваемых моментов (*упругий мертвый ход*).

При отсутствии зазоров в подшипниковых узлах значение *кинематического мертвого хода* для пары зубчатых колес рассчитывают по формуле

$$\Delta\varphi = j_n/r \cdot \cos\alpha, \quad (6.1)$$

где  $j_n$  – величина бокового зазора, значение которого зависит от вида сопряжения зубчатых колес и допуска на боковой зазор;  $r$  – радиус делительной окружности колеса;  $\alpha$  – угол зацепления (для эвольвентного профиля  $\alpha = 20^\circ$ ).

Обычно величина бокового зазора  $j_n$  дается в микрометрах, а величину мертвого хода определяют в угловых минутах. Тогда для пары зубчатых колес

$$\Delta\varphi = \frac{2j_n 180 \cdot 60}{10^3 m z \cos\alpha} = 7,32 \frac{j_n}{mz}, \quad (6.2)$$

где  $\Delta\varphi$  – кинематический мертвый ход, мин;  $j_n$  – боковой зазор, мкм;  $m$  – модуль зацепления, мм;  $z$  – число зубьев колеса.

Для передачи, состоящей из  $2n$  зубчатых колес, закрепленных на  $n+1$  валах, формула для нахождения *кинематической погрешности мертвого хода*, приведенной к выходному колесу, имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_1}{i_{1(n+1)}} + \frac{\Delta\varphi_3}{i_{2(n+1)}} + \dots + \frac{\Delta\varphi_{2n-3}}{i_{(n-1)(n+1)}} + \frac{\Delta\varphi_{2n-1}}{i_{n(n+1)}}, \quad (6.3)$$

где  $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_3, \dots, \Delta\varphi_{(2n-3)}, \Delta\varphi_{(2n-1)}$  – собственные кинематические погрешности пар зубчатых колес  $z_1z_2, z_3z_4, \dots, z_{2n-3}z_{2n-2}$  и  $z_{2n-1}z_{2n}$ , отнесенные к ведущим колесам (шестерням) и определяемые по формуле (6.2);  $i_{1(n+1)}, i_{2(n+1)}, \dots, i_{(n-1)(n+1)}, i_{n(n+1)}$  – передаточные отношения соответственно между 1, 2, ...,  $n-1$ ,  $n$ -м и последним  $(n+1)$ -м валом.

*Кинематическая погрешность* рассчитывается для нереверсивной зубчатой передачи и состоит в определении разности между действительным и номинальным (расчетным) углами поворота ведомого колеса. Величина разности зависит от точности изготовления зубчатых колес, входящих в передачу, которая определяется значениями норм кинематической точности и плавности.

При расчете *кинематической погрешности* необходимо брать значение допуска  $F_i'$  на кинематическую погрешность зубчатых колес, входящих в передачу, который определяют как сумму допусков на накопленную погрешность шага  $F_p$  (таблица 6.4) и на погрешность профиля зуба  $f_f$  (таблица 6.5):  $F_i' = F_p + f_f$ . Тогда кинематическая погрешность  $\delta\varphi_i$  в угловых минутах определится из выражения

$$\delta\varphi_i = \frac{2F_i' 180 \cdot 60}{mz 10^3 \pi} = 6,88 \frac{F_i'}{mz}. \quad (6.4)$$

Таблица 6.4 – Нормы кинематической точности цилиндрических зубчатых колес  $F_p$ , мкм ( $0,1 \leq m < 1,0$ )

Степень точности	Делительный диаметр, $d$ , мм						
	до 12	св. 12 до 20	св. 20 до 32	св. 32 до 50	св. 50 до 80	св. 80 до 125	св. 125 до 200
5	10	11	12	14	16	19	22
6	16	17	19	22	25	30	36
7	22	24	27	30	35	42	50
8	32	34	38	44	50	60	70

Таблица 6.5 – Нормы плавности работы  $f_f$  цилиндрических зубчатых колес, мкм ( $0,1 \leq m < 1,0$ )

Модуль, $m$	Степень точности			
	5	6	7	8
Св. 0,1 до 0,5	5	7	9	11
Св. 0,5 до 1,0	6	8	10	13

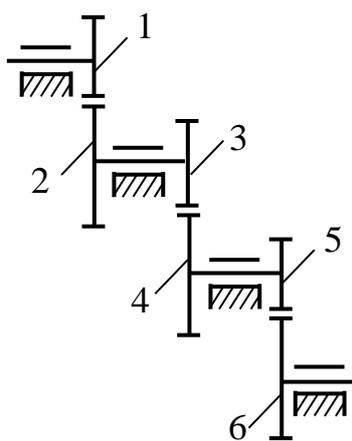


Рисунок 6.3

При нахождении кинематической погрешности  $\delta\varphi$  передачи кинематическую погрешность зубчатых колес, расположенных на одном валу, складывают и приводят к одному валу, обычно выходному.

Порядок определения кинематической погрешности, приведенной к выходному валу, рассмотрим на примере зубчатой передачи, представленной на рисунке 6.3. Пусть ведущее колесо 1 имеет погрешность  $\delta\varphi_1$ . Тогда эта погрешность вызовет дополнительный поворот колеса 2 на угол  $\delta\varphi_1/i_{12}$ . Если колесо 2 имеет собственную погрешность  $\delta\varphi_2$ , то эта погрешность прибавится к погрешности  $\delta\varphi_1/i_{12}$  и дополнительный поворот колеса 2 составит  $\delta\varphi_1/i_{12} + \delta\varphi_2$ . Погрешность на третьем колесе будет равна этой же сумме погрешностей плюс собственная погрешность  $\delta\varphi_3$  колеса 3, т. е.  $\delta\varphi_1/i_{12} + \delta\varphi_2 + \delta\varphi_3$ . Аналогично рассуждая, полу-

74

чим выражение для погрешности на колесе 5, состоящей из суммы приведенных к колесу 4 погрешностей колес 1, 2, 3 и собственных погрешностей колес 4 ( $\varphi_4\delta$ ) и 5 ( $\delta\varphi_5$ ):  $(\delta\varphi_1/i_{12}+\delta\varphi_2+\delta\varphi_3)/i_{34}+\delta\varphi_4+\delta\varphi_5$ .

Для всего механизма кинематическая погрешность, приведенная к выходному колесу 6, определится выражением

$$\delta\varphi = ((\delta\varphi_1/i_{12}+\delta\varphi_2+\delta\varphi_3)/i_{34}+\delta\varphi_4+\delta\varphi_5)/i_{56}+\delta\varphi_6. \quad (6.5)$$

**Пример 6.2.** Для трехступенчатой прямозубой передачи (рисунок 6.3) рассчитать наименьший возможный кинематический мертвый ход  $\Delta\varphi_{п1}$ , приведенный к шестерне 1, обусловленный боковыми зазорами в зацеплениях, если передаточные отношения  $i_{1-2} = 5,1$ ;  $i_{3-4} = 4,2$ ;  $i_{5-6} = 3,5$ . Модули всех колес  $m = 0,6$  мм, числа зубьев шестерен равны 20, угол зацепления  $\alpha = 20^\circ$ , а наименьшие боковые зазоры в зацеплениях равны:  $j_{n \min 1-2} = j_{n \min 3-4} = 16$  мкм,  $j_{n \min 5-6} = 13$  мкм.

*Решение.* Зная число зубьев шестерен 1, 3, 5 (равно 20) и значения передаточных отношений для каждой ступени, определим число зубьев колес 2, 4, 6:  $z_2 = z_1 i_{1-2} = 20 \cdot 5,1 = 102$ ;  $z_4 = z_3 i_{3-4} = 20 \cdot 4,2 = 84$ ;  $z_6 = z_5 i_{5-6} = 20 \cdot 3,5 = 70$ .

В нашем случае входным является колесо 6, а выходным – 1. Для каждой пары ведущими будут колеса 6, 4 и 2. Тогда уравнение (6.3) для кинематического мертвого хода  $\Delta\varphi_{п1}$ , приведенного к шестерне 1, запишется в виде

$$\Delta\varphi_{п1} = \Delta\varphi_6/i_{6-1} + \Delta\varphi_4/i_{4-1} + \Delta\varphi_2/i_{2-1},$$

где  $\Delta\varphi_6$ ,  $\Delta\varphi_4$  и  $\Delta\varphi_2$  – собственные кинематические погрешности пар зубчатых колес  $z_6z_5$ ,  $z_4z_3$ ,  $z_2z_1$ , отнесенные к ведущим колесам и определяемые по формуле (6.2).

$$\Delta\varphi_6 = 7,32 \cdot j_{n \min 5-6}/(mz_6) = 7,32 \cdot 13/(0,6 \cdot 70) = 2,26';$$

$$\Delta\varphi_4 = 7,32 \cdot j_{n \min 3-4}/(mz_4) = 7,32 \cdot 16/(0,6 \cdot 84) = 2,32';$$

$$\Delta\varphi_2 = 7,32 \cdot j_{n \min 1-2}/(mz_2) = 7,32 \cdot 16/(0,6 \cdot 102) = 1,91'.$$

Определим передаточные отношения  $i_{6-1}$ ,  $i_{4-1}$ ,  $i_{2-1}$ .

$$i_{6-1} = 1/i_{1-6} = 1/(i_{1-2}i_{3-4}i_{5-6}) = 1/(5,1 \cdot 4,2 \cdot 3,5) = 0,013;$$

$$i_{4-1} = 1/i_{1-4} = 1/(i_{1-2}i_{3-4}) = 1/(5,1 \cdot 4,2) = 0,046;$$

$$i_{2-1} = 1/i_{1-2} = 1/5,1 = 0,196.$$

Полученные значения собственных кинематических погрешностей пар зубчатых колес и значения передаточных отношений подставим в выражение для кинематического мертвого хода  $\Delta\varphi_{п1}$ , приведенного к шестерне 1,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{п1} &= \Delta\varphi_6/i_{6-1} + \Delta\varphi_4/i_{4-1} + \Delta\varphi_2/i_{2-1} = 2,26/0,013 + 2,32/0,046 + 1,91/0,196 = \\ &= 173,85 + 50,43 + 9,74 = 234,02 = 3^\circ 54' 1''. \end{aligned}$$

Ответ:  $\Delta\varphi_{п1} = 3^\circ 54' 1''$ .

### Задачи

**6.11** Для зубчатой передачи, схема которой представлена на рисунке 6.3, рассчитать наименьший возможный мертвый ход  $\Delta\varphi_{п6}$ , приведенный к колесу 6.

Ответ:  $\Delta\varphi_{п6} = 3'15''$ .

**6.12** Определить величину приведенного к выходному колесу 6 максимального мертвого хода  $\Delta\varphi_{п6}$  передачи, состоящей из трех пар цилиндрических зубчатых колес с эвольвентным профилем зубьев (угол зацепления  $\alpha = 20^\circ$ ), если известно, что  $z_1 = z_3 = 20$ ,  $z_2 = 60$ ,  $z_4 = 80$ ,  $z_5 = 30$  и  $z_6 = 90$ . Модули сопряженных пар соответственно равны  $m_{1-2} = 0,4$  мм,  $m_{3-4} = 0,5$  мм,  $m_{5-6} = 0,8$  мм. Значения максимальных боковых зазоров равны:  $j_{n \max 1-2} = 60$  мкм,  $j_{n \max 3-4} = 48$  мкм,  $j_{n \max 5-6} = 30$  мкм.

Ответ:  $\Delta\varphi_{п6} = 7'31''$ .

**6.13** Для зубчатой передачи задачи 6.12 определить приведенную к выходному колесу 6 кинематическую погрешность  $\delta\varphi_{п6}$ . Точность изготовления зубчатых колес принять равной 8. Значения норм плавности и норм кинематической точности зубчатых колес взять из таблиц 6.4 и 6.5.

Ответ:  $\delta\varphi_{п6} = 19'25''$ .

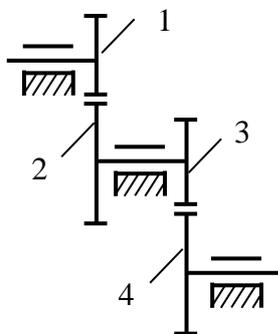


Рисунок 6.14

**6.14** Зубчатая передача (рисунок 6.14) состоит из четырех зубчатых колес с числами зубьев  $z_1 = 25$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_3 = 20$ ,  $z_4 = 70$ . Модуль зацепления зубчатых колес принять равным  $m = 0,8$  мм. Кинематическая погрешность колеса 1 равна  $F_1' = 20$  мкм, колеса 2 равна  $F_2' = 40$  мкм, колеса 3 равна  $F_3' = 15$  мкм, колеса 4 равна  $F_4' = 30$  мкм. Определить наибольшую угловую погрешность на валу ведомого колеса, если ведущим звеном является: а) колесо 1; б) колесо 4.

Ответ: а)  $\delta\varphi_{п4} = 9' 12''$ ; б)  $\delta\varphi_{п1} = 51' 34''$ .

## 7 Соединение деталей

### 7.1 Расчет резьбовых соединений

**Расчет резьбовых соединений.** При расчетах на прочность различают резьбовые соединения *напряженные* (с наличием предварительной затяжки) и *ненапряженные* (усилие затяжки отсутствует). В большинстве случаев резьбовые соединения являются предварительно затянутыми, т. е. как крепежные, так и соединяемые детали до приложения рабочей нагрузки находятся в напряженном состоянии под действием усилия предварительной затяжки, величина которого выбирается из условия обеспечения заданного удельного давления на поверхности контакта соединяемых деталей после приложения внешних сил. Это делается с целью предупреждения раскрытия стыка или обеспечения необходимой плотности соединения.

В предварительно затянутом резьбовом соединении минимальной прочностью может обладать сечение винта по внутреннему диаметру резьбы  $d_1$ , а также сама резьба винта или гайки, витки которой работают на смятие и на срез по внутреннему диаметру резьбы гайки  $d$ . При расчете резьбы на прочность площадь смятия принимают равной площади кольца с наружным  $d$  и внутренним  $d_1$  диаметрами.

В резьбовом соединении расчетной нагрузкой является осевая сила  $F_a$ , равная внешней нагрузке, передаваемой на каждый винт. Тогда условие прочности винта на растяжение запишется в виде

$$\sigma = \frac{4nF_a}{\pi d_1^2} \leq [\sigma], \quad (7.1)$$

где  $[\sigma]$  – допустимое напряжение на растяжение для материала винта;  $n$  – поправочный коэффициент, учитывающий влияние крутящего момента на резьбе от усилия, приложенного к гаечному ключу ( $n = 1,3$ ).

Из условия прочности (7.1) определяется диаметр винта при заданной осевой нагрузке  $F_a$  :

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4nF_a}{\pi[\sigma]}}. \quad (7.2)$$

Кроме проверки выполнения условия прочности на растяжение, проверяется резьба винта и гайки на срез и смятие. Если винт и гайка выполнены из одинакового материала, то срез резьбы возможен по цилиндрической поверхности винта диаметром  $d_1$ . При выполнении гайки из менее прочного материала срез резьбы возможен по цилиндрической поверхности гайки диаметром  $d$ . Условия прочности резьбы на срез определяются выражениями:

- для винта:

$$\tau = \frac{F_a}{\pi d_1 k B} \leq [\tau]; \quad (7.3)$$

- для гайки:

$$\tau = \frac{F_a}{\pi d k B} \leq [\tau], \quad (7.4)$$

где  $k$  – коэффициент полноты резьбы (для треугольной резьбы  $k = 0,75$ );  $B$  – высота гайки, принимаемая равной  $B = 0,8d$ .

Условие прочности резьбы на смятие запишется в виде

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{4F_a h}{\pi(d^2 - d_1^2)B} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (7.5)$$

где  $h$  – шаг резьбы;  $[\sigma_{\text{см}}]$  – допустимое напряжение смятия.

Возможны также два случая болтового соединения, нагруженного поперечной силой, т. е. силой, перпендикулярной оси болта.

*Первый случай:* болт установлен в отверстие с зазором. В этом случае отсутствие относительного смещения соединяемых деталей достигается силой трения в зоне их контакта, превышающей заданную поперечную нагрузку. Для получения заданного значения силы трения необходимо обеспечить значительное усилие затяжки болтового соединения. В этом случае расчет болтового соединения выполняется по зависимостям (7.1)–(7.5).

*Второй случай:* болт вставлен в отверстие без зазора. В этом случае болт рассчитывают на срез и проверяют на смятие.

Условие прочности болта на срез запишется в виде

$$\tau = \frac{F}{S} \leq [\tau], \quad (7.6)$$

где  $F$  – внешняя поперечная сила;  $S = \frac{\pi d_0^2}{4}$  – площадь поперечного сечения болта;  $d_0$  – диаметр цилиндрической поверхности болта, контактирующей с отверстиями в соединяемых деталях; он должен быть на 1–2 мм больше диаметра резьбы  $d$ .

Из (7.6) получим выражение для диаметра болта:

$$d_0 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]}}. \quad (7.7)$$

Условие прочности на смятие запишется в виде

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{d_0 h} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (7.8)$$

где  $h$  – меньшее значение толщины (высоты отверстий) соединяемых деталей;  $[\sigma_{см}]$  – меньшее значение предельно допустимого напряжения на смятие для материалов болта и соединяемых деталей.

Стандартные крепежные резьбовые детали общего назначения изготавливают из углеродистых сталей Ст3, 10, 20, 35, 45 и др. Для стали Ст3 предельно допустимое напряжение при растяжении равно  $[\sigma] = 160$  МПа, при сдвиге –  $[\tau] = 60$  МПа и смятия –  $[\sigma_{см}] = 190$  МПа.

**Пример 7.1.** Определить размеры резьбы болтового соединения двух планок из стали Ст3, нагруженных статически растягивающей силой  $F = 7500$  Н, если болт вставлен в отверстие с зазором. Коэффициент трения для материала соединяемых планок принять равным  $\mu = 0,3$ , предельно допустимое напряжение растяжения для стали Ст3 примем равным  $[\sigma] = 160$  МПа, а для смятия –  $[\sigma_{см}] = 190$  МПа.

*Решение.* 1. Определим необходимое значение осевой нагрузки  $F_a$  на болтовое соединение, которое обеспечит необходимое значение силы трения  $F_{тр}$ , исключающее относительное смещение соединяемых планок под действием растягивающей силы  $F$ . Для надежной фиксации соединяемых планок увеличим силу трения по отношению к растягивающей силе на 25 %. Тогда  $F_{тр} = \mu F_a = 1,25 F$ . Откуда  $F_a = 1,25 F / \mu = 1,25 \cdot 7500 / 0,3 = 31250$  (Н).

2. Из условия прочности на растяжение (7.1) определим внутренний диаметр  $d_1$  резьбы винта:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4kF_a}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 \cdot 31250}{3,14 \cdot 160}} = 17,98 \text{ мм.}$$

Примем резьбу соединения М22 с шагом  $h = 2,5$  мм, для которой  $d = 22$  мм,  $d_1 = 19,29$  мм (приложение А, таблица А.3). Высота гайки будет равна  $B = 0,8d = 17,6$  мм.

3. Будем считать, что болт и гайка выполнены из одного материала (сталь Ст3). В этом случае проверяются на срез витки болта по цилиндрической поверхности диаметра  $d_1 = 19,29$  мм.

$$\tau = \frac{F_a}{\pi d_1 k B} = \frac{31250}{3,14 \cdot 17,98 \cdot 0,75 \cdot 0,8 \cdot 22} = 41,93 \text{ (МПа)} < [\tau].$$

4. Выполним проверку прочности резьбы на смятие.

$$\sigma_{см} = \frac{4F_a h}{\pi(d^2 - d_1^2)B} = \frac{4 \cdot 31250 \cdot 2,5}{3,14(22^2 - 19,29^2)0,8 \cdot 22} = 50,53 \text{ (МПа)} < [\sigma_{см}].$$

**Пример 7.2.** Рассчитать диаметр болта для соединения двух планок сечением  $b \times h = 60 \times 10$  мм, нагруженных статически растягивающей силой  $F = 7500$  Н, если болт вставлен в отверстие без зазора. Соединяемые планки

и детали резьбового соединения выполнены из стали Ст3, для которой предельно допустимое напряжение при сдвиге равно  $[\tau] = 60$  МПа и смятии  $[\sigma_{см}] = 190$  МПа.

*Решение.* Определим диаметр болта исходя из условия прочности на срез (7.6):

$$d_0 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7500}{3,14 \cdot 60}} = 12,62 \text{ (мм)}.$$

Примем диаметр стержня  $d_0 = 14$  мм со стандартной резьбой М12 с шагом 1,75 мм (приложение А, таблица А.3).

Полученный диаметр стержня проверим из условия прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{d_0 h} = \frac{7500}{14 \cdot 10} = 53,57 \text{ (МПа)} < [\sigma_{см}].$$

Из двух рассмотренных случаев постановки болта в отверстие соединяемых деталей следует, что размер болта при постановке без зазора намного меньше размера болта при постановке с зазором: М12 вместо М22.

## 7.2 Расчет сварных соединений

Сварное соединение осуществляется расплавлением близлежащих частей соединяемых деталей. Основными видами сварки являются газовая сварка и электросварка. Газовая сварка применяется для соединения металлов, имеющих различные температуры плавления (платина – медь, вольфрам – медь), а также для сварки тонкостенных труб, кожухов приборов и т. п. При электросварке расплавление металла происходит под действием электрической дуги.

В зависимости от взаимного расположения свариваемых деталей различают следующие виды сварных соединений: *стыковые* (рисунок 7.1, а), *нахлесточные* (рисунок 7.1, б), *тавровые* (рисунок 7.1, в) и *угловые* (рисунок 7.1, г).

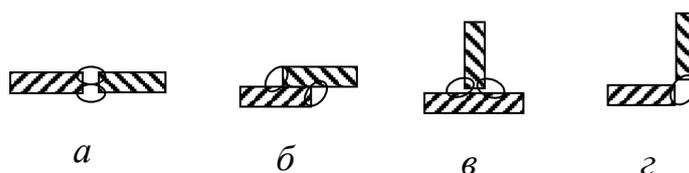


Рисунок 7.1

*Стыковые* соединения наиболее простые и применяются чаще всего в конструкциях, подверженных вибрационным нагрузкам.

Нахлесточные соединения применяют в ответственных конструкциях и при действии переменных нагрузок. Тавровые соединения применяют в составных конструкциях, свариваемые детали которых расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Угловые соединения применяют как связующие, так как они мало пригодны как силовые.

Сварные швы стыковых соединений (см. рисунок 7.1, а) называют *стыковыми*. Сварные швы нахлесточных (см. рисунок 7.1, б), тавровых (см. рисунок 7.1, в) и угловых (см. рисунок 7.1, г) соединений называют *угловыми*. Шов нахлесточного соединения, выполненный по торцам соединяемых деталей, называется *угловым лобовым швом*. Угловым *фланговым* называется шов нахлесточного соединения, выполненный по боковым поверхностям соединяемых деталей.

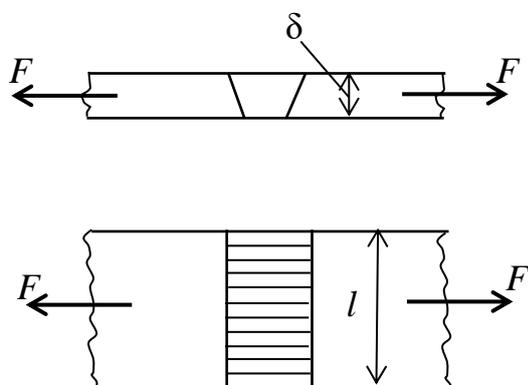


Рисунок 7.2

утолщения шва (наплыва металла). В зависимости от вида нагружения стыкового шва его соответственно рассчитывают на растяжение (рисунок 7.2):

$$\sigma'_p = \frac{F}{\delta l} \leq [\sigma'_p]; \quad (7.9)$$

на сжатие

$$\sigma'_c = \frac{F}{\delta l} \leq [\sigma'_c], \quad (7.10)$$

где  $\sigma'_p$  и  $\sigma'_c$  – соответственно расчетное напряжение в шве при растяжении и сжатии;  $F$  – сила растягивающая или сжимающая соединяемые элементы;  $\delta$  – толщина более тонкой свариваемой детали;  $l$  – длина шва;  $[\sigma'_p]$  и  $[\sigma'_c]$  – соответственно допустимое напряжение для шва при растяжении и сжатии (приложение А, таблица А.2).

При действии на стыковой шов изгибающего момента  $M$  в плоскости приварки (рисунок 7.3) расчет шва производится по формуле

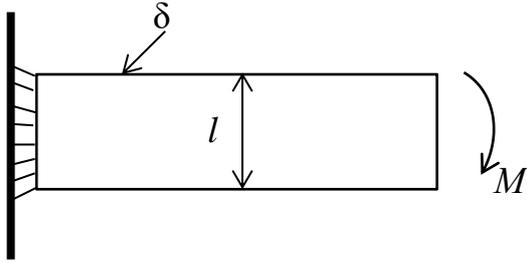


Рисунок 7.3

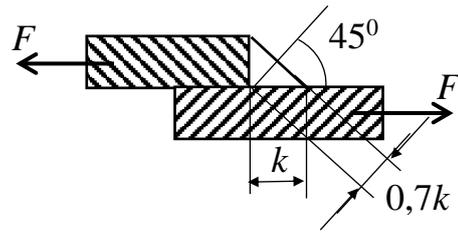


Рисунок 7.4

$$\sigma' = \frac{M}{W} = \frac{6M}{\delta l^2} \leq [\sigma_p], \quad (7.11)$$

где  $W = \delta l^2/6$  – осевой момент сопротивления сечения шва.

Угловые швы рассчитываются по опасному сечению, содержащему биссектрису прямого угла (рисунок 7.4). Если  $k$  – катет углового шва, то расчетная толщина шва будет равна  $k \sin 45^\circ \approx 0,7k$ .

При действии на угловой шов силы  $F$  (рисунок 7.4) его рассчитывают по формуле

$$\tau'_c = \frac{F}{0,7kl} \leq [\tau'_c], \quad (7.12)$$

где  $\tau'_c$  – расчетное напряжение среза в шве;  $k$  – катет поперечного сечения шва;  $l$  – длина шва;  $[\tau'_c]$  – допустимое напряжение на срез шва.

Длину углового лобового шва (рисунок 7.5) обычно принимают равной ширине привариваемой детали. Длину углового флангового шва определяют исходя из условия прочности шва на срез:

$$l = \frac{F}{0,7k[\tau'_c]}. \quad (7.13)$$

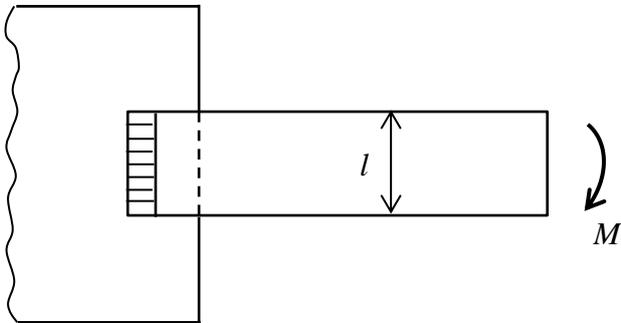


Рисунок 7.5

Если соединение угловым швом длиной  $l$  нагружено изгибающим моментом  $M$  (рисунок 7.5), то расчет шва производят по формуле

$$\tau' = \frac{M}{W} = \frac{6M}{0,7kl^2} \leq [\tau'_c], \quad (14)$$

где  $W = 0,7kl^2/6$  – осевой момент сопротивления сечения шва, содержащего биссектрису прямого угла.

При расчетах сварных соединений допустимые напряжения принимают пониженными. Величина понижающего коэффициента зависит от способа сварки, характера действующих нагрузок (статические или переменные). В таблице А.2 приложения А приведены значения понижающих коэффициентов для допускаемых напряжений при расчете стыковых и угловых швов, полученных различными видами электросварки.

### Задачи

**Задача 7.1.** Проверить прочность сварных швов, соединяющих диск с зубчатым ободом и диск со ступицей (рисунок 7.6, схема 1). Мощность  $P$ , передаваемая колесом, его угловая скорость  $\omega$ , толщина швов  $K_1$  и  $K_2$  и размеры  $d_c$ ,  $D_o$ ,  $d$  заданы в таблице 7.1. Материал диска, ступицы и обода сталь Ст3.

Таблица 7.1 – Исходные данные для расчета прочности сварных швов

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P$ , кВт	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
$\omega$ , рад/с	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d_c$ , мм	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165
$D_o$ , мм	450	475	500	525	550	575	600	625	700	750
$d$ , мм	500	525	550	575	600	625	650	675	750	800
$K_1$ , мм	4	4	4	6	6	6	8	8	8	8
$K_2$ , мм	6	6	6	8	8	8	10	10	10	10
Тип электрода	э34					э42				
Метод сварки	Ручной					Полуавтоматический				

**Задача 7.2.** Рассчитать болты, скрепляющие зубчатое колесо с барабаном лебедки (рисунок 7.6 схема 2). Расчет вести в двух вариантах: а) болты поставлены с зазором; б) болты поставлены без зазора. Грузоподъемность лебедки  $F$  и диаметры  $D_1$  и  $D_2$  заданы в таблице 7.2. Материал барабана чугуна, материал колеса сталь Ст3. Числом болтов задаться.

Таблица 7.2 – Исходные данные для расчета скрепляющих болтов

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кН	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
$D_1$ , мм	250	250	300	300	350	350	400	400	450	450
$D_2$ , мм	400	400	450	450	500	500	550	550	600	600

**Задача 7.3.** Рассчитать сварное соединение, крепящее неподвижный блок монтажного устройства к плите (рисунок 7.6, схема 3), по данным таблицы 7.3.

Материал электрода и метод сварки выбрать самостоятельно, недостающие данные задать.

Таблица 7.3 – Исходные данные для расчета сварного соединения

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кН	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$a$ , мм	600	600	600	500	500	500	450	450	400	400
$\alpha$ , рад	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$

**Задача 7.4.** Определить диаметр фундаментных болтов, крепящих стойку к бетонному основанию (рисунок 7.6, схема 4). Коэффициент трения основания стойки о бетон  $f = 0,4$ . Болты принять с метрической резьбой по ГОСТу. Данные для расчета приведены в таблице 7.4.

Недостающие данные выбрать самостоятельно.

Таблица 7.4 – Исходные данные для расчета фундаментных болтов

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кН	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
$\alpha$ , рад	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$
$a$ , мм	600	600	650	650	700	700	750	750	800	800
$b$ , мм	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850

**Задача 7.5.** Рассчитать сварное соединение, крепящее опорный швеллер шириной 160 см к стальной плите (рисунок 7.6, схема 5). Материал электрода и метод сварки назначить самостоятельно. Данные для расчета приведены в таблице 7.5.

Таблица 7.5 – Исходные данные для расчета сварного соединения

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кН	28	26	24	22	20	18	16	14	14	10
$l$ , мм	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500

**Задача 7.6.** Рассчитать винтовую стяжку (рисунок 7.6, схема 6) с максимальным усилием на винте  $F$  по данным таблицы 7.6. Определить также размеры рукоятки. Материал винта, гайки и другие недостающие данные принять самостоятельно.

Таблица 7.6 – Исходные данные для расчета винтовой стяжки

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кН	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

**Задача 7.7.** Определить диаметр болтов фланцевого соединения верхней части автоклава с его корпусом (рисунок 7.6, схема 7). Давление жидкости внутри автоклава по манометру  $p$ , внутренний диаметр верхней части автоклава  $D$  и количество болтов  $z$  заданы в таблице 7.7.

Таблица 7.7 – Исходные данные для расчета болтов фланцевого соединения

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p$ , МПа	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9
$D$ , мм	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
$z$	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8

**Задача 7.8.** Определить диаметр нарезной части вала дисковой пилы, которая удерживается между двумя шайбами посредством сил трения, возникающих при затяжке гайки на конце вала (рисунок 7.6, схема 8). Пила преодолевает сопротивление резанию – силу  $F$ . Данные для расчета приведены в таблице 7.8.

Таблица 7.8 – Исходные данные для расчета вала дисковой пилы

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , Н	600	625	650	675	700	725	750	775	800	825
$D$ , мм	700	700	650	650	600	600	550	550	500	500
$D_1$ , мм	400	400	350	350	300	300	250	250	200	200

**Задача 7.9.** Рассчитать клеммовое болтовое соединение, обеспечивающее передачу крутящего момента с рычага в результате приложения на его конце силы  $F$  на вал диаметром  $D$  (см. рисунок 7.6, схема 9), по данным таблицы 7.9. Коэффициент трения  $f$ .

Таблица 7.9 – Исходные данные для расчета клеммового болтового соединения

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D$ , мм	40	42	45	48	50	52	55	58	60	65
$f$	0,2	0,2	0,2	0,18	0,18	0,18	0,2	0,2	0,2	0,2
$F$ , Н	600	650	700	750	800	850	900	950	1000	1050
$a$ , мм	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580

**Задача 7.10.** Определить диаметр резьбы стяжной шпильки станочного прихвата (рисунок 7.6, схема 10) по данным таблицы 7.10. Усилиям пружины пренебречь.

Таблица 7.10 – Исходные данные для расчета стяжной шпильки прихвата

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F$ , кН	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
$a$ , мм	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165
$b$ , мм	115	115	120	120	130	130	140	140	150	150

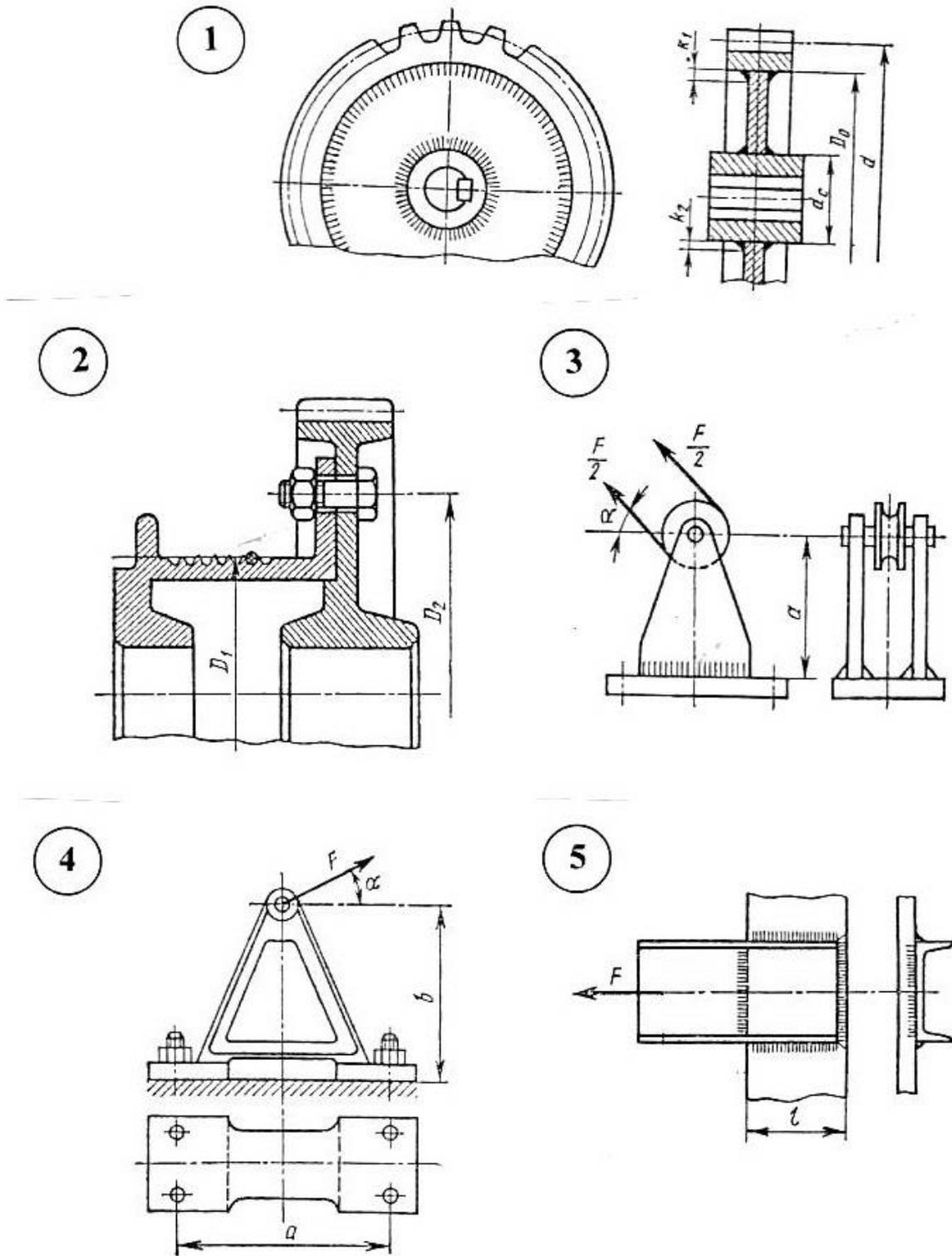
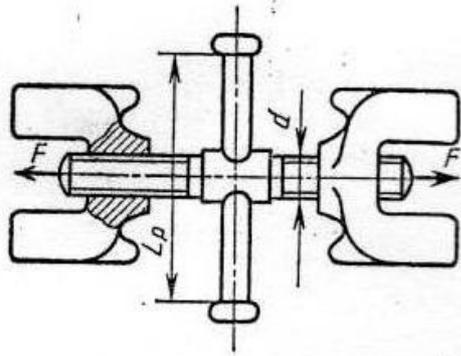
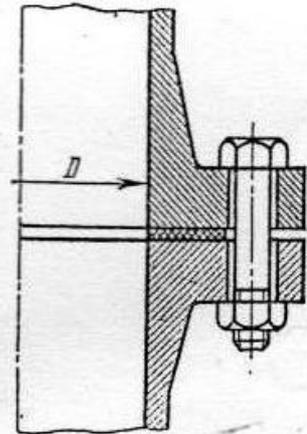


Рисунок 7.6

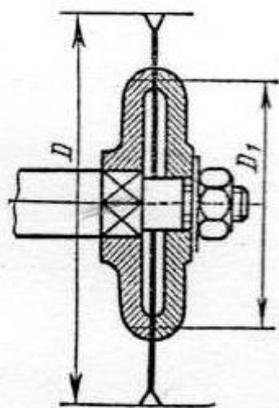
6



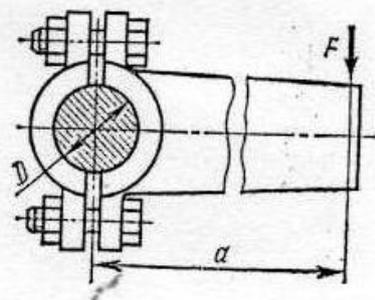
7



8



9



10

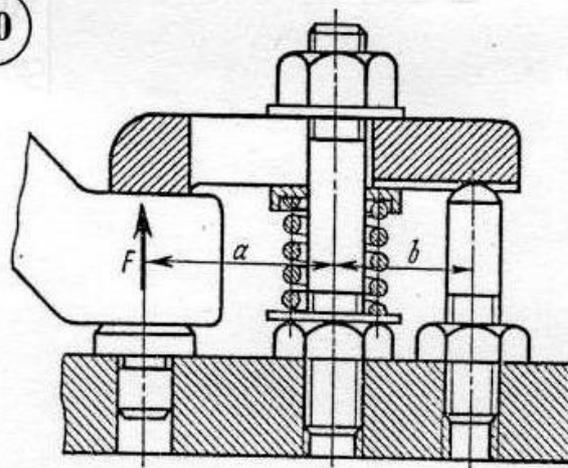


Рисунок 7.6, лист 2

## 8 Расчет винтовых цилиндрических пружин растяжения (сжатия)

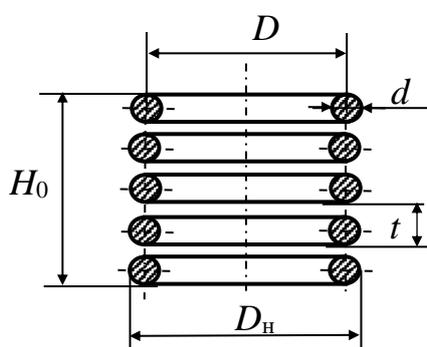


Рисунок 8.1

На рисунке 8.1 показана винтовая цилиндрическая пружина (в разрезе). На рисунке приняты следующие обозначения:  $D$  – средний диаметр пружины,  $D_n$  – наружный диаметр пружины,  $t$  – шаг витков пружины,  $H_0$  – длина пружины в свободном (ненагруженном) состоянии.

При расчете пружин, работающих на растяжение или сжатие, учитывают индекс пружины  $c$ , определяемый как отношение значения среднего диаметра пружины  $D$  к

значению диаметра проволоки  $d$ , из которой она изготовлена, т. е.  $c = \frac{D}{d}$ .

Чем меньше индекс  $c$ , тем труднее навить пружину. Кроме этого, с уменьшением индекса пружины увеличивается концентрация напряжений на внутренней стороне витка. В таблице 8.1 приведены рекомендуемые значения индекса пружины в зависимости от диаметра проволоки.

Таблица 8.1 – Рекомендуемые значения индекса пружины

Диаметр $d$ проволоки, мм	0,2–0,4	0,42–1,0	1,2–2,5	2,6–6,0
Индекс пружины $c$	8–16	6–12	5–10	4–10

При расчете винтовых цилиндрических пружин, работающих на растяжение (сжатие), заданными обычно являются внешняя нагрузка  $F$  и величина деформации пружины  $f$ . Кроме этого, выбирают материал проволоки, из которой будет навита пружина. Расчет пружины состоит в определении необходимого диаметра  $d$  проволоки, среднего диаметра  $D$  и количества рабочих витков  $n$  пружины.

Выполним поперечное сечение витка пружины некоторой плоскостью и, отбросив часть пружины, рассмотрим силы, действующие на оставшуюся ее часть (рисунок 8.2). Под действием осевой силы  $F$  материал пружины испытывает сложную деформацию, состоящую из деформации кручения под действием крутящего момента  $T_{кр} = FD/2$  и деформации среза под действием перерезывающей силы  $Q$ , уравновешенной силой  $F$ , т. е.  $Q = F$ .

Пренебрегая кривизной проволоки и предполагая равномерное распределение напряжений среза по поперечному сечению, а также учитывая, что  $Q = F$ , выражение для максимальных касательных напряжений, действующих в сечениях проволоки, запишется в виде

$$\tau = \tau_{\text{кр}}^{\text{max}} + \tau_{\text{ср}} = \frac{T_{\text{кр}}}{W_{\rho}} + \frac{F}{S} = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}, \quad (8.1)$$

где  $W_{\rho} = \pi d^3/16$  – полярный момент сопротивления сечения проволоки диаметром  $d$ ;  $S = \pi d^2/4$  – площадь поперечного сечения проволоки.

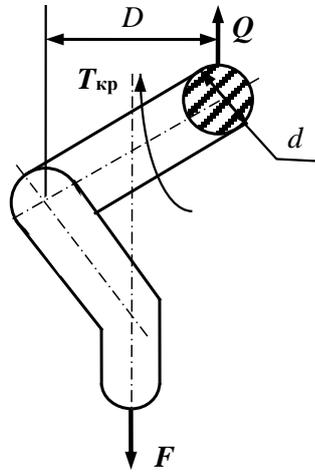


Рисунок 8.2

Сравнивая первое и второе слагаемые выражения (8.1), видим, что напряжения кручения в  $2c$  раз больше напряжений среза и поэтому при расчете винтовых пружин растяжения (сжатия) учитываются напряжения, возникающие вследствие деформации кручения.

Для определения диаметра проволоки, из которой будет навита пружина, используется следующая зависимость:

$$\tau = \frac{8FD}{\pi d^3} k \leq [\tau], \quad (8.2)$$

где  $k = \frac{4c+2}{4c-3}$  – коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений на внутренней стороне витка пружины;  $[\tau]$  – предельно допустимое значение напряжения для материала проволоки.

Подставив в (8.2) значение  $c = D/d$ , получим выражение для определения необходимого диаметра проволоки:

$$d \geq 1,6 \sqrt{\frac{Fck}{[\tau]}}. \quad (8.3)$$

Полученное значение диаметра проволоки округляют до ближайшего значения из стандартного ряда диаметров. По принятому индексу пружины  $c$  и найденному диаметру проволоки  $d$  определяют диаметр пружины  $D = dc$ .

Число витков пружины определим исходя из заданной величины деформации  $f$ , считая, что работа, совершаемая силой  $F$  на перемещение  $f$ , должна быть равна работе крутящего момента  $T_{\text{кр}} = FD/2$  на угловом перемещении  $\varphi$ :

$$Ff = T_{\text{кр}}\varphi = \frac{FD}{2}\varphi. \quad (8.4)$$

Из выражения (8.4) найдем соотношение между линейной  $f$  и угловой  $\varphi$  деформациями:

$$f = \frac{D}{2}\varphi. \quad (8.5)$$

Величина угла закручивания  $\varphi$  при деформации кручения определяется выражением

$$\varphi = \frac{T_{кр}l}{GJ_{\rho}} = \frac{FDl}{2GJ_{\rho}}, \quad (8.6)$$

где  $l = \pi dn$  – выпрямленная длина  $n$  витков пружины;  $J_{\rho} = \pi d^4/32$  – полярный момент инерции сечения проволоки;  $G$  – модуль упругости второго рода.

Тогда выражение (8.5) с учетом (8.6) примет вид

$$f = \frac{8FD^3n}{Gd^4}. \quad (8.7)$$

Разделив выражение (8.7) на величину нагрузки  $F$  и число витков  $n$ , мы получим перемещение  $\Delta$  одного витка пружины под действием силы в 1 Н, называемое *эластичностью* пружины:

$$\Delta = \frac{8D^3}{Gd^4}. \quad (8.8)$$

С учетом выражения для индекса пружины  $c$  из (8.7) получим выражение для определения числа витков, необходимого для обеспечения заданного перемещения,

$$n = \frac{Gdf}{8Fc^3}. \quad (8.9)$$

Для производства винтовых пружин методом холодной навивки применяют стальную или бронзовую проволоку соответствующих профилей и марок. В большинстве случаев применяют проволоку круглого сечения. Пружины повышенной жесткости изготавливают с прямоугольным поперечным сечением.

**Пример 8.1.** Рассчитать винтовую цилиндрическую пружину сжатия; максимальная нагрузка  $F = 4,0$  Н при деформации  $f = 6,0$  мм. Принять равными: допустимое напряжение на кручение  $[\tau] = 500$  МПа, модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

*Решение.* 1. С учетом рекомендаций (см. таблицу 8.1) примем значение индекса пружины равным  $c = 12$ .

2. Вычислим поправочный коэффициент  $k = \frac{4c+2}{4c-3} = 1,11$ .

3. Определим диаметр проволоки исходя из условия прочности при кручении:

$$d \geq 1,6 \sqrt{\frac{Fck}{[\tau]}} = 1,6 \sqrt{\frac{4 \cdot 12 \cdot 1,11}{500}} = 0,5216 \text{ (мм)}.$$

4. Из сортамента стальной углеродистой пружинной проволоки (приложение А) выбираем ближайшее большее значение диаметра:  $d = 0,56$  мм.

5. Определим средний диаметр пружины:  $D = cd = 12 \cdot 0,56 = 6,72$  мм. Примем значение наружного диаметра пружины равным  $D_n = 8$  мм. Тогда средний диаметр пружины  $D = 6,88$  мм.

6. Вычислим эластичность  $\Delta$  пружины:

$$\Delta = \frac{8D^3}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 8^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,56^4} = 0,33 \text{ (мм/Н)}.$$

7. Определим количество витков  $n$  пружины:

$$n = \frac{Gd^4 f}{8FD^3} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 0,56^4 \cdot 6}{8 \cdot 4 \cdot 6,88^3} = 4,53.$$

Примем количество витков равным  $n = 5$ .

8. Вычислим деформацию одного витка пружины при действии максимальной нагрузки:  $f_1 = \Delta \cdot F = 0,33 \cdot 4 = 1,32$  (мм).

9. Шаг  $t$  витков пружины определим как сумму деформации одного витка и диаметра пружины:  $t = f_1 + d = 1,32 + 0,56 = 1,88$  (мм). Примем  $t = 2,0$  мм.

10. Учитывая, что крайние витки пружины подгибают и сошлифовывают, высота пружины будет равна  $H = nt + 2d = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0,56 = 11,12$  (мм).

**Пример 8.2.** Рассчитать винтовую цилиндрическую пружину растяжения. При максимальной нагрузке  $F = 1,5$  Н величина деформации составляет  $f = 8,5$  мм. Принять равными: допустимое напряжение на кручение  $[\tau] = 500$  МПа, модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

*Решение.* 1. Выберем значение индекса пружины  $c = 12$ .

2. Поправочный коэффициент  $k = (4c + 2)/(4c - 3) = 1,11$ .

3. Из условия прочности при кручении определяем диаметр проволоки:

$$d \geq 1,6 \sqrt{\frac{Fck}{[\tau]}} = 1,6 \sqrt{\frac{1,5 \cdot 12 \cdot 1,11}{500}} = 0,32 \text{ (мм)}.$$

4. Из сортамента стальной углеродистой пружинной проволоки (приложение А) выберем ближайшее большее значение диаметра:  $d = 0,36$  мм.

5. Определим средний диаметр пружины:  $D = cd = 12 \cdot 0,36 = 4,32$  мм. Примем значение наружного диаметра пружины равным  $D_n = 5,5$  мм. Тогда средний диаметр пружины  $D = 4,78$  мм.

6. Вычислим эластичность  $\Delta$  пружины:

$$\Delta = \frac{8D^3}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 4,78^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,36^4} = 0,65 \text{ (мм/Н)}.$$

7. Определим количество витков  $n$  пружины:

$$n = \frac{Gd^4 f}{8FD^3} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 0,36^4 \cdot 8,5}{8 \cdot 1,5 \cdot 4,78^3} = 8,7.$$

Примем число витков равным  $n = 9$ .

8. Высота пружины в свободном состоянии:  $H = nd = 9 \cdot 0,36 = 3,24$  (мм).

9. Высота пружины при действии максимальной нагрузки:

$$H_1 = nd + \Delta \cdot n \cdot F = 9 \cdot 0,36 + 0,65 \cdot 9 \cdot 1,5 = 12,015 \text{ (мм)}.$$

10. Длина выпрямленной проволоки с учетом двух прицепов:

$$L = \pi Dn + 2\pi D = 3,14 \cdot 4,78 \cdot 9 + 2 \cdot 3,14 \cdot 4,78 = 165,1 \text{ (мм)}.$$

**Задачи 1–30.** Рассчитать винтовые цилиндрические пружины растяжения для зубчатых колес с выборкой мертвого хода. Зубчатые колеса являются выходными звеньями для одноступенчатых зубчатых передач.

Исходные данные для расчета взять из таблицы 8.2.

*Примечания*

1. Расстояние от оси зубчатого колеса до центральной оси пружины принять равным  $2/3$  радиуса делительной окружности колеса.

2. Смещение частей составного колеса при совмещении с сопряженным колесом принять равным трем шагам зубчатого колеса.

3. Число зубьев для входного зубчатого колеса (шестерни) принять равным 20.

4. Для вариантов 1–10 значение модуля зацепления принять равным 1,0 мм, а коэффициента полезного действия – 0,98; для вариантов 11–20 – 0,9 мм и 0,95 соответственно; для вариантов 21–30 – 0,8 мм и 0,93 соответственно.

5. Сортамент проволок для изготовления пружин и механические свойства материала проволок приведены в приложении А.

Таблица 8.2 – Исходные данные для расчета пружин

Вариант	Мощность на входе $P_{вх}$ , Вт	Скорость на выходе $n_{вых}$ , об/мин	Передаточное отношение, $i_{12}$	Вариант	Мощность на входе $P_{вх}$ , Вт	Скорость на выходе $n_{вых}$ , об/мин	Передаточное отношение, $i_{12}$
01	6,4	160	8,0	16	9,4	235	7,3
02	6,6	165	7,9	17	9,6	240	7,2
03	6,8	170	7,8	18	9,8	245	7,1
04	7,0	175	7,7	19	10,0	250	7,0
05	7,2	180	7,6	20	10,2	255	6,9
06	7,4	185	7,5	21	10,4	260	6,8
07	7,6	190	7,4	22	10,6	265	6,7
08	7,8	195	7,3	23	10,8	270	6,6
09	8,0	200	7,2	24	11,0	275	6,5
10	8,2	205	7,1	25	11,2	280	6,6
11	8,4	210	7,0	26	11,4	285	6,7
12	8,6	215	6,9	27	11,6	290	6,8
13	8,8	220	6,8	28	11,8	295	6,9
14	9,0	225	6,7	29	12,0	300	7,0
15	9,2	230	6,6	30	12,2	305	7,1

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**(обязательное)**

Таблица А.1 – Двутавры

Номер балки	Размеры сечения, мм		Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Момент сопротивления при изгибе $W_x$ , см <sup>3</sup>
	высота $h$	толщина $s$		
10	100	4,5	12,0	39,7
12	120	4,8	14,7	54,8
14	140	4,9	17,4	81,7
16	160	5,0	20,2	109
18	180	5,1	23,4	143
20	200	5,2	26,8	184
22	220	5,4	30,6	232
24	240	5,6	34,8	289
27	270	6,0	40,2	371
30	300	6,5	46,5	472
33	330	7,0	53,8	597
36	360	7,5	61,9	743
40	400	8,3	72,6	953
45	450	9,0	84,7	1231
50	500	10,0	100,0	1589

Таблица А.2 – Допустимые напряжения для сварных швов

Вид сварки и марка электрода	Стыковые швы		Угловые швы [ $\tau'$ ] <sub>ср</sub>
	[ $\sigma'$ ] <sub>р</sub>	[ $\sigma'$ ] <sub>сж</sub>	
Ручная сварка, электроды Э34	0,6[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>	0,75[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>	0,5[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>
Ручная сварка, электроды Э42 и Э50	0,9[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>	[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>	0,6[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>
Автоматическая и полуавтоматическая сварка под слоем флюса. Сварка в среде защитного газа, ручная электродами высшего качества (Э42А; Э50А)	[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>	[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>	0,65[ $\sigma$ ] <sub>р</sub>

*Примечания*

1. [ $\sigma$ ]<sub>р</sub> – допустимое напряжение на растяжение основного металла конструкции (например, для стали Ст3 [ $\sigma$ ]<sub>р</sub> = 160 МПа).
2. [ $\sigma'$ ]<sub>р</sub> , [ $\sigma'$ ]<sub>сж</sub> – допустимые напряжения для стыкового шва при растяжении и при сжатии соответственно.
3. [ $\tau'$ ]<sub>ср</sub> – допустимое напряжение среза для углового шва.

Таблица А.3 – Основные размеры (мм) метрической резьбы

Внешний диаметр $d$	Средний диаметр $d_2$	Внутренний диаметр $d_1$	Шаг резьбы $p$
M6	5,350	4,91	1,0
M8	7,188	6,64	1,25
M10	9,026	8,38	1,5
M12	10,863	10,10	1,75
M14	12,701	11,83	2,0
M16	14,701	13,83	2,0
M18	16,380	15,29	2,5
M20	18,380	17,29	2,5
M22	20,380	19,29	2,5
M24	22,050	20,75	3,0
M27	25,050	23,75	3,0
M30	27,730	26,21	3,5

### Сортамент и механические свойства пружинных проволок

1. Проволока стальная углеродистая пружинная (ГОСТ 9389–75), применяемая для изготовления пружин, навиваемых в холодном состоянии. Марка стали стандартом не регламентируется.

Сортамент проволоки, мм: 0,14; 0,15; 0,16; 0,18; 0,20; 0,22; 0,25; 0,28; 0,30; 0,32; 0,36; 0,40; 0,45; 0,50; 0,56; 0,60; 0,63; 0,70 – 2,10 (через 0,1 кроме 1,30); 2,30; 2,50; 2,80; 3,00 и далее до 8,00.

Модуль упругости второго рода (модуль сдвига)  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа; Предельно допустимое касательное напряжение принять  $[\tau] = 500$  МПа.

2. Проволока стальная легированная пружинная (ГОСТ 1463–78) для пружин, подвергающихся термообработке после навивки, изготавливается из сталей марок 60СГА, 63С2А, 70С3А.

Сортамент проволоки, мм: 0,50; 0,56; 0,60; 0,63; 0,71; 0,80; 0,90; 1,0; 1,1; 1,2; 1,25; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,5; 2,8; 3,0 и далее до 14,0.

Модуль сдвига для всех сталей принять равным  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;

Предельно допустимые касательные напряжения принять: сталь 60СГА –  $[\tau] = 550$  МПа; сталь 63С2А –  $[\tau] = 550$  МПа; сталь 70С3А –  $[\tau] = 625$  МПа.

3. Проволока из кремнемарганцевой бронзы (ГОСТ 5222–72) выпускается из материала марки БрКМц3-1 круглого и квадратного сечения.

Сортамент круглой проволоки, мм: 0,10; 0,12; 0,15; 0,18; 0,20–0,90 (через 0,05); 1,0–1,8 (через 0,1); 2,0; 2,2; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,5; 3,8; 4,0; 4,2; 4,5; 4,8; 5,0–10,0 (через 0,5).

Модуль упругости второго рода (модуль сдвига)  $G = 4 \cdot 10^4$  МПа. Предельно допустимое касательное напряжение принять  $[\tau] = 220$  МПа.

## Список использованных источников

1. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И. И. Артоболевский, Б. В. Эдельштейн. – М. : Наука, 1975.
2. Беляев, Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1966.
3. Вышинский, Н. В. Техническая механика : учеб. пособие / Н. В. Вышинский. – Минск : ИВЦ Минфина, 2006.
4. Вышинский, Н. В. Техническая механика. Сборник задач : пособие / Н. В. Вышинский. – Минск : БГУИР, 2017.
5. Вышинский, Н. В. Техническая механика. В 4 ч. Ч. 1 / Н. В. Вышинский. – Минск : БГУИР, 2018. – 127 с. – Режим доступа: <http://www.bsuir.by/ru/kaf-inzh-graf/vyshinskiy-n-v>.
6. Вышинский, Н. В. Техническая механика. В 4 ч. Ч. 2. Механика материалов / Н. В. Вышинский. – Минск : БГУИР, 2019. – 104 с. – Режим доступа: <http://www.bsuir.by/ru/kaf-inzh-graf/vyshinskiy-n-v>.
7. Вышинский, Н. В. Техническая механика. В 4 ч. Ч. 3. Механика конструкций / Н. В. Вышинский. – Минск : БГУИР, 2020. – 75 с. – Режим доступа: <http://www.bsuir.by/ru/kaf-inzh-graf/vyshinskiy-n-v>.
8. Вышинский, Н. В. Техническая механика. В 4 ч. Ч. 4. Детали приборов. Точность механизмов / Н. В. Вышинский. – Минск : БГУИР, 2021. – 98 с. – Режим доступа: <http://www.bsuir.by/ru/kaf-inzh-graf/vyshinskiy-n-v>.
9. Гузенков, П. Г. Детали машин / П. Г. Гузенков. – М. : Высш. шк., 1982.
10. Красковский, Е. Я. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем / Е. Я. Красковский, Ю. А. Дружинин, Е. М. Филатов. – М. : Высш. шк., 1991.
11. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986.
12. Народецкая, М. Э. Техническая механика и детали машин и приборов / М. Э. Народецкая, Б. А. Торбан, А. И. Аркуша. – М. : Машиностроение, 1982.
13. Соколовская, В. П. Механика. Практикум по решению задач / В. П. Соколовская. – Минск : ООО «Новое знание», 2006.

*Учебное издание*

**Вышинский Николай Владимирович**

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.  
СБОРНИК ЗАДАЧ**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

Корректор *Е. Н. Батурчик*  
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 03.01.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,93. Уч.-изд. л. 6,6. Тираж 50 экз. Заказ 177.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.  
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск



