НАСЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ В КОМБИНАТОРНЫХ ВАРИАНТАХ ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИИ

Д.С. Геррус, Н.В. Хаджинова, М.П. Ревотюк
(БГУИР, Минск)

Предмет обсуждения – комбинаторная задача выбора вида

$$\min\left\{\sum_{i\in M}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\,\middle|\,\sum_{i\in M}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1;\ x_{ij}\geq 0;\ i\in M,\ j=\overline{1,n},\ M\in\overline{1,n}\right\},\quad(1)$$

когда решение классической задачи о назначении дополнено необходимостью поиска дислокации исполнителей на множестве сочетаний индексов матрицы оценок эффективности назначения заданий.

Задача (1) в практических случаях может быть решена методом перебора среди линейных задач о назначении для всех возможных сочетаний. Вычислительная сложность такой прямолинейной процедуры решения при этом имеет оценку $C_n^m\cdot O(n^3)$. Однако при перечислении сочетаний удобно использовать взаимозависимость решений задач о назначении, обусловленную возможностью наследования решений двойственных задач вида

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}u_i+\sum_{j=1}^{n}v_j\,\middle|\,c_{ij}-u_i-v_j\geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right\}.\quad(2)$$

Наследование решений реализуется сохранением векторов потенциалов строк ($u.$) и столбцов ($v.$), тогда пересчет потребуется лишь для измененных строк матрицы очередного сочетания.

Предпочтительным методом порождения сочетаний здесь является метод “вращающейся двери” с минимальным расстоянием Хэмминга между множествами M^k и M^{k+1}, $k=\overline{1,C_n^m}$. Идея такого алгоритма определяется известным соотношением Паскаля $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$. Отсюда легко заметить, что множество всех сочетаний из n элементов по m штук, обозначаемое как $A^{n,m}$, может соответствовать множествам $A^{n-1,m}$ и $A^{n-1,m-1}$:

$$A^{n,0}=[\varnothing],\ A^{n,n}=\left[\left\{\overline{1,n}\right\}\right],$$

$$A^{n,m} = \left[A_1^{n-1,m}, \ldots, A_{C_{n-m}^{m}}^{n-1,m}, A_{C_{n-m}^{m-1}}^{n-1,m-1} \cup \{n\}, \ldots, A_1^{n-1,m-1} \cup \{n\} \right],\ m \in \overline{1, n-1}\,.$$

Несложно показать, что итерации наиболее предпочтительного в таких ситуациях алгоритма венгерского метода при изменении элементов матрицы задачи назначения требуется выполнить для множества строк

$$M^{k+1} = \left\{ i \,\middle|\, (c_{ij}^{k+1} > c_{ij}^{k}) \wedge (x_{ij}^{k} = 0),\ j = \overline{1,n} \right\} \cup \left\{ i \,\middle|\, (c_{ij}^{k+1} < c_{ij}^{k}) \wedge (x_{ij}^{k} = 1),\ j = \overline{1,n} \right\},$$

но в случае применения метода «вращающейся двери» $\left| M^k \right| \le 1,\ k > 1$.

Таким образом, вычислительная сложность процедуры решения задачи (1) имеет оценку $C_n^m \cdot O(n^2)$, что на порядок лучше оценки для прямолинейной реализации схемы полного перебора сочетаний.