БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЗВОНКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

К. С. Курочка, И. Л. Стефановский
Кафедра «Информационные технологии»,
Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого
Гомель, Республика Беларусь
E-mail: kurochka@gstu.by, igorst@pisem.net

Изложено построение биомеханической модели позвонка методом конечных элементов. Построенная модель позволяет оценить напряженно-деформированное состояние позвонка в различных фазах остеопороза. Получена зависимость перемещений на верхней суставной поверхности позвонка от изменения плотности костной ткани в результате заболевания.

Введение

В настоящее время одной из перспективных областей приложения метода конечных элементов (МКЭ) является биомеханика. С помощью математических моделей, построенных с использованием МКЭ, возможно оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов позвоночника в различных состояниях (переломы, смещения, травмы и т. д.) при функциональных нагрузках, провести анализ различных методов восстановления после травм [1].

Такие биомеханические модели могут быть использованы для выбора оптимальной фиксирующей конструкции, вариантов крепления ее к позвоночнику. При этом возможно проводить анализ позвоночника, варьируя параметры (свойства) исследуемых элементов, таких как плотность костной ткани, модуль упругости, пластичности, геометрические параметры позвоночника, при различных заболеваниях, включая остеопороз.

Остеопороз – обменное заболевание скелета, которое характеризуется снижением плотности костей, усилением хрупкости, по причине нарушения метаболизма костной ткани, снижением прочности костей и повышением риска переломов. Построенная модель позволяет оценить НДС в различных фазах остеопороза, предсказать риск развития переломов в том числе при таком заболевании.

I. Конечно-элементная модель

Для получения достоверных оценок НДС конкретного случая необходимо использовать результаты компьютерной томографии позвоночника конкретного пациента и на ее основе проводить моделирование [2].

Модель позвонка, полученная на основе данных компьютерной томографии, изображена на рис. 1. Решение данной задачи будем искать методом конечных элементов.

Воспользуемся принципом возможных перемещений:

$$\int_R \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij}dV - \int_R b_i\delta v_i dV - \int_{\partial_2 R} t_i\delta v_i dA = 0. \quad (1)$$

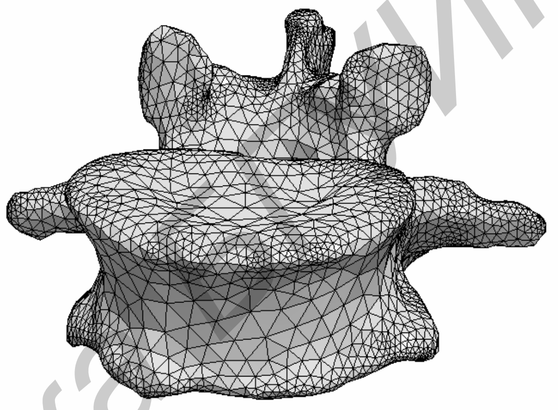

Рис. 1 – Модель позвонка

Соотношение между деформациями и перемещениями:

$$\delta\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right). \quad (2)$$

Для разработанной модели материал был принят однородным и упругим. Соотношение между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) получим (4).

В качестве конечного элемента выберем тетраэдр. После дискретизации определим интерполяцию полей перемещений $u_i(x)$ и виртуальных перемещений $\delta v_i(x)$ как

$$u_i(x) = \sum_{a=1}^{n} N^a(x)u_i^a; \quad (5)$$

$$\delta v_i(x) = \sum_{a=1}^{n} N^a(x)\delta v_i^a. \quad (6)$$

После подстановки (5) и (6) в (4) получим (7).

Представим матрицу жесткости $k^{(l)}_{aibk}$ и вектор сил $f_i^{a(l)}$ элемента l в виде:

$$k^{(l)}_{aibk} = \int_{V_e^{(l)}} C_{ijkl}\frac{\partial N^a(x)}{\partial x_j}\frac{\partial N^b(x)}{\partial x_l}dV;$$

$$f_i^{a(l)} = \int_{V_e^{(l)}} b_i N^a(x)dV + \int_{\partial_2 V_e^{(l)}} t_i^* N^a(x)dA;$$

где $V_e^{(l)}$, $\partial_2 V_e^{(l)}$ – объем и поверхность элемента l. Для аппроксимации перемещений воспользуемся следующими функциями формы:

$$N^1 = \xi_1; N^2 = \xi_2; N^3 = \xi_3;$$

$$N^4 = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3;$$

в локальной системе координат. Координаты удовлетворяют требованиям: $-1 \leq \xi_i \leq +1$.

После формирования глобальных матриц жесткости и сил

$$K_{aibk} = \sum_{l=1}^{N_{lmn}} k_{aibk}^{(l)}; F_i^a = \sum_{l=1}^{N_{lmn}} f_i{}^{a(l)};$$

решив систему

$$K_{aibk} u_k^b = F_i^a;$$

получим вектор перемещения u_k^b в узлах элемента.

II. Результаты

Постепенное уменьшение плотности костной ткани позвонка было использовано для моделирования изменений в кости при остеопорозе. Нагрузка прикладывалась к верхней концевой пластинке и верхней суставной поверхности. Прикладываемая статическая нагрузка соответствует нагрузке, приходящейся на позвонок стоящего или идущего человека массой 70 кг [3, 4]. В качестве граничных условий были использованы полное защемление поверхности нижней концевой пластинки и нижней суставной поверхности (перемещения во всех направлениях равны нулю). Модель была разбита на 6824 тетраэдра. Наибольшее перемещение наблюдалось на верхней суставной поверхности и составило (без уменьшения плотности костной ткани) 0,091 мм. Полученные результаты зависимости перемещений на верхней суставной поверхности от уменьшения плотности кости позвонка представлены на рис. 2. Сопоставление с результатами исследования [5] показало сходимость, достаточную для практического применения. При уменьшении плотности кости на 15 % перемещения увеличились на 18 %.

Заключение

Разработанная конечно-элементная модель подверглась компрессионной нагрузке для изучения поведения позвонка. Для предсказания максимальных значений перемещений элементов позвонка в различных фазах остеопороза, использовалось изменение плотности костной ткани позвонка для моделирования изменений в кости при остеопорозе.

Разработанная модель может быть полезна для оценки поведения кости позвонка на различных стадиях остеопороза.

1. Middleton, J. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering / J. Middleton, Gyan Pande, M. L. Jones. – Boca Raton: CRC Press, 1999. – 852 p.
2. Noriyasu, H. Theory and Applications of CT Imaging and Analysis – Rijeka: InTech, 2011. – 300 p.
3. White, A. A. Clinical biomechanics of the spine / A. A. White, M. M. Panjabi. – Philadelphia: J.B. Lippincott Company, 1990. – 752 p.
4. Lai, C. C. The load sharing contribution of spinal facet joint during impact loading – a porcine biomechanical model / C. C. Lai, J. L. Wang, G. L. Chang, C. H. Chung // ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition. – Washington, 2003.
5. Jovanović, J. D. Finite element modeling of the vertebra with geometry and material properties retrieve from CT-scan data / J. D. Jovanović, M. L. Jovanović // Mechanical Engineering. – 2010. – Vol. 8, No 1. – p. 19-26

$$\int_R C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dV - \int_R b_i \delta v_i dV - \int_{\partial_2 R} t_i^* \delta v_i dA = 0. \tag{4}$$

$$\int_R C_{ijkl} \frac{\partial N^b(x)}{\partial x_l} u_k^b \frac{\partial N^a(x)}{\partial x_j} \delta v_i^a dV - \int_R b_i N^a(x) \delta v_i^a dV - \int_{\partial 2R} t_i^* N^a(x) \delta v_i^a dA = 0. \tag{7}$$

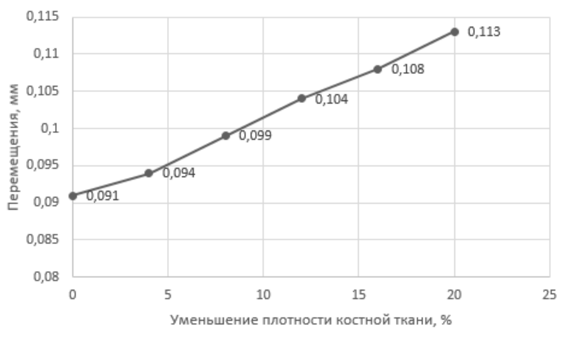

Рис. 2 – Зависимость перемещений на верхней суставной поверхности от уменьшения плотности костной ткани