

ИНСТРУМЕНТЫ WOLFRAM MATHEMATICA ДЛЯ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ БАКЛЕЯ–ЛЕВЕРЕТТА

В. В. Жиленкова

Механико-математический факультет, Белорусский государственный университет

Минск, Республика Беларусь

E-mail: vallery95@open.by

Рассматривается классическая задача Баклея-Левретта о моделировании процесса вытеснения нефти водой в крупномасштабном приближении. Приведена информация о разработанном в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica интерактивном программном приложении, которое позволяет получать аналитические непрерывные и разрывные решения.

ВВЕДЕНИЕ

Модель Баклея-Левретта описывает процесс вытеснения нефти водой в крупномасштабном приближении. В ней принято, что имеет место фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде, капиллярный скачок давления между фазами не учитывается. Неполнота вытеснения нефти водой учитывается путем введения функций относительных фазовых проницаемостей f_i . Эти функции определяются экспериментально, при математическом описании считаются известными функциями насыщенностей фаз s_i . В модели фильтрации двух несмешивающихся жидкостей, обозначая параметры вытесняемой жидкости индексом 1, а вытесняющей – 2, для их насыщенностей имеем $s_1 + s_2 = 1$, поэтому обычно приводят зависимости $f_i(s)$, где s – насыщенность воды.

Пример аналитического задания фазовых проницаемостей для двухфазной системы нефть – вода, следуя [1]:

$$f_1(s) = \left(\frac{s^* - s}{s^* - s_*} \right)^p, \quad 0 \leq s \leq s^*;$$

$$f_1(s) = 0, \quad s^* \leq s \leq 1;$$

$$f_2(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq s_*;$$

$$f_2(s) = \left(\frac{s - s_*}{s^* - s_*} \right)^q, \quad s_* \leq s \leq 1.$$

В выражениях выше s_* – насыщенность связанной воды, $1 - s^*$ – остаточная нефтенасыщенность, p и q – постоянные величины, которые не меньше 1.

Математическая модель процесса вытеснения строится на основе уравнений неразрывности фаз и обобщенного закона фильтрации Дарси ([1, 2]).

Общие свойства решения задачи о вытеснении при отмеченных предположениях изучаются в одномерном линейном случае, когда считается известной суммарная скорость фильтрации. В [1, 2] приведен вывод уравнения для насыщенности, дана постановка задачи Баклея-Левретта:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial F(s)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где t – время ($t \geq 0$), x – координата ($x \geq 0$), пористость m и суммарная скорость фильтрации u известны (m и u для анализа качественных особенностей решения считают заданными постоянными), $s(t, x) \equiv s_2(t, x)$ – подлежащая определению насыщенность вытесняющей фазы, вязкости фаз μ_i считаются известными (постоянными), функция Левретта

$$F(s) = \frac{f_2(s)/\mu_2}{f_1(s)/\mu_1 + f_2(s)/\mu_2}. \quad (2)$$

В начальный момент задается начальное распределение насыщенности, на границе – постоянное граничное значение

$$s(0, x) = s_0(x), \quad (3)$$

$$s(t, 0) = s^0, \quad (4)$$

где $s_0(x)$ – монотонно убывающая функция или постоянная (в задаче о “распаде разрыва”), s^0 – постоянная.

Классическое решение задачи (1) – (4) подробно описано, поясняются особенности и, почему при характерных условиях не существует непрерывных решений, изложено в [1, 2].

Однако, задача Баклея-Левретта имеет ряд и других особенностей: неединственность решений в случае условий типа “распада разрыва” [3], неустойчивость решений с “плато” [4]. Соответствующие выкладки, преобразования, получение решений и их визуализация реализованы в программном приложении, написанном на языке Wolfram Language в системе компьютерной алгебры Mathematica. Основные компоненты приложения и некоторые из получаемых иллюстраций приведены ниже.

О ПРОГРАММНОМ ПРИЛОЖЕНИИ, ПРИМЕРЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Формулы задания относительных проницаемостей, графические элементы определения традиционного решения Баклея-Левретта показаны на рисунке 1:

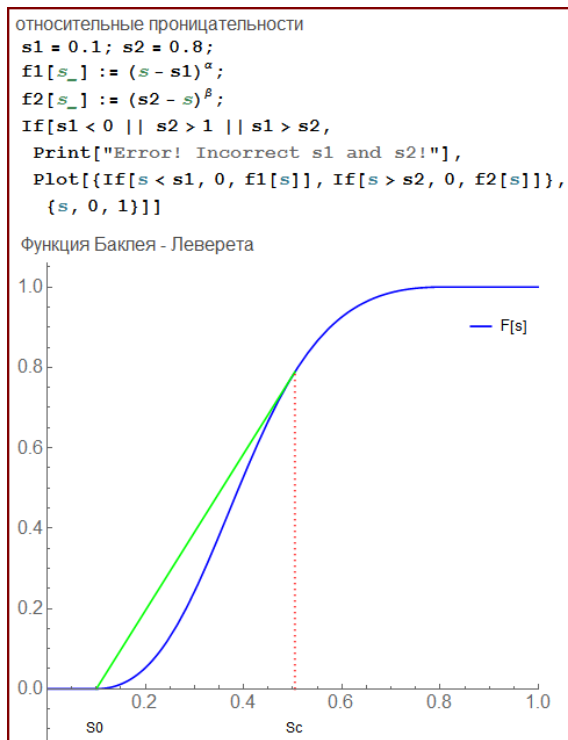


Рис. 1 – Функция Леверетта, определение скачка по традиционному алгоритму

Код программы интерактивного формирования начального распределения насыщенности с использованием динамических локаторов, подключённым алгоритмом интерполяции многочленом по опорным точкам (контрольные точки на профиле) и проверки корректности (монотонность), а также соответствующий график показаны на рисунке 2:

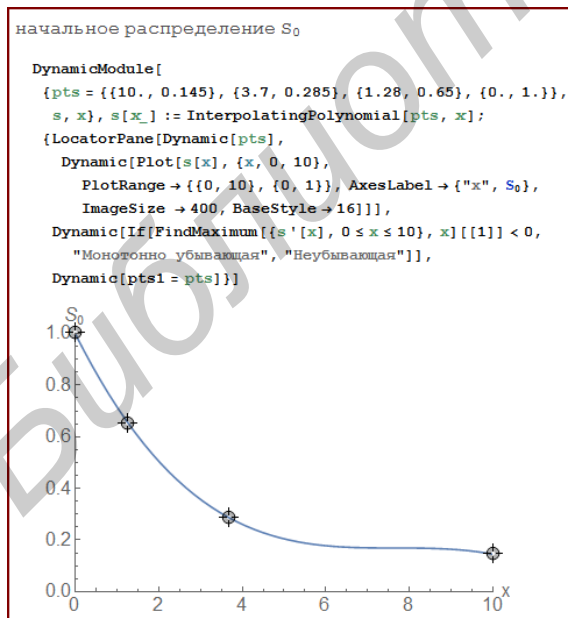


Рис. 2 – Начальные условия и их задание с проверкой корректности

Рисунок 3 иллюстрирует эволюцию профиля водонасыщенности, распределения даны в начальный и 3 момента времени. Причем зафиксирован (решается соответствующее уравнение)

момент образования разрыва $t=0.9148$, начиная с которого решение должно строиться как разрывное:

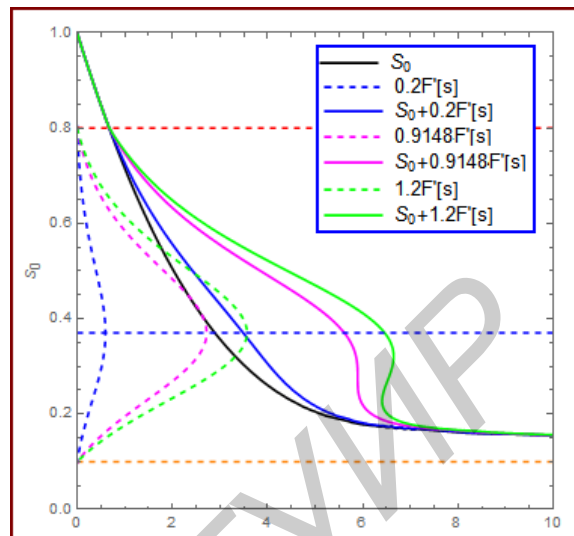


Рис. 3 – Профили распределения насыщенности и вспомогательные кривые графо-аналитической техники построения решений

На рисунке 4 показаны рассчитанные для двух моментов времени классическое и решение с “плато”:

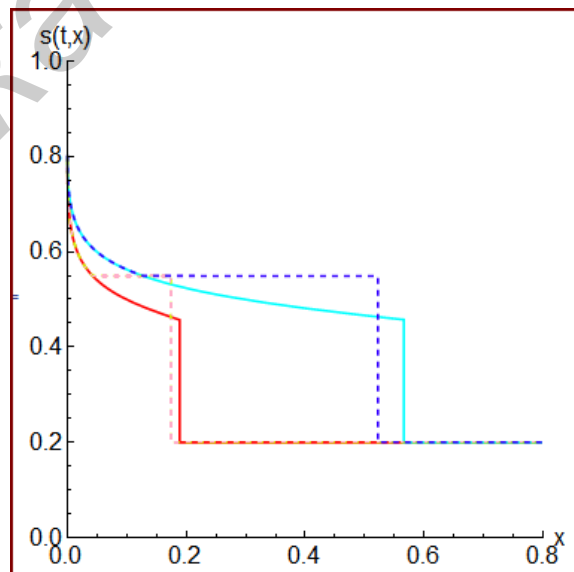


Рис. 4 – Решения задачи типа “распада разрыва”

1. Баренблатт, Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик // М.: Недра, 1972. – 288 с.
2. Коновалов, А. Н. Задачи фильтрации многофазной жидкости / А. Н. Коновалов // Новосибирск, Наука: 1988. – 166 с.
3. Sheldon, J. W. One-dimensional, incompressible, non-capillary, two-phase fluid flow in a porous medium / J. W. Sheldon, B. Zondek, W. T. Cardwell // SPE AIME. – Vol. 216 (1959). – P. 290-296.
4. Олейник, О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения / О. А. Олейник // Успехи математических наук. – 1959. –Т. 14, вып. 2(86). – С. 165-170.