УДК [517.98]:

ПОСТРОЕНИЕ БЛОЧНЫХ РАЗБИЕНИЙ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

С.Н. Кардаш
Старший научный сотрудник ОИПИ НАН Беларуси, кандидат технических наук
kardash77@gmail.com

С.Н. Кардаш

Окончил БГУ им. Ленина. Старший научный сотрудник лаборатории Логического Синтеза ОИПИ НАН Беларуси, к.т.н.

Аннотация. Рассматривается задача построения совместных (использующих общие подфункции) разложений систем булевых функций. Используются представления функций в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), полиномов Жегалкина и полиномов Рида-Малера. Предлагается эвристический алгоритм построения разложения минимальной площади. Приводятся результаты экспериментального исследования.

Ключевые слова: Дизъюнктивные нормальные формы булевых функций, связанность, полиномы Жегалкина, полиномы Рида-Малера.

Введение.

В настоящее время стремление снизить энергопотребление цифровых систем, реализуемых на элементной базе заказных комплементарных металл-оксид-полупроводниковых схем (КМОП-схем) и систем-на-кристалле стало причиной появления новых и совершенствования известных методов решения задач, связанных с проектированием логических схем.

Синтез логических схем из библиотечных элементов обычно выполняется по оптимизированным двухуровневым либо многоуровневым представлениям систем булевых функций.

Двухуровневыми (И-ИЛИ) представлениями называют представления функций в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), многоуровневыми – различные формы функциональных разложений [1, 2].

Идея использовать связанность (общность) областей определений булевых функций при синтезе многовыходных комбинационных схем предложена в [3].

По существу, выделение связанных функций является одним из приемов логической оптимизации многоуровневых представлений систем функций [4].

Для связанных подсистем функций более эффективно решаются задачи логической оптимизации, например, оптимизации в классе ДНФ [2, 3], оптимизации BDD-представлений [5] и декомпозиции различных видов, например, при построении совместных функциональных разложений.

В работе [6] для многоуровневой оптимизации предложено использовать конъюнктивно-дизъюнктивные разложения матричных форм систем функций, представленных в ДНФ, а также предлагаются алгоритмы построения таких разложений.

Эта идея может быть перенесена на матричные представления функций, заданных в виде полиномов Жегалкина или полиномов Рида-Малера.

Полином Жегалкина называется многоместная сумма по модулю 2 попарно различных положительных элементарных конъюнкций, т. е. элементарных конъюнкций, не содержащих инверсных литералов.

Полином Жегалкина является канонической формой задания булевой функции – он является единственным для любой булевой функции [7].

В случае, когда полиномы содержат литералы со знаком инверсии (и тогда только с ним), то они носят название полиномов Рида-Малера.

Длиной полинома называется число входящих в него элементарных конъюнкций.

Исходную систему ДНФ, содержащую m функций, n аргументов и l конъюнкций, будем представлять парой матриц – троичной матрицей $\boldsymbol{K}$ с размерами $l{\times}n$, нулевые и единичные элементы строк которой представляют инверсные и безынверсные литералы соответствующих конъюнкций, и булевой матрицей $\boldsymbol{B}$ с размерами $l{\times}m$, единичные элементы строк которой определяют вхождения этих конъюнкций в соответствующую ДНФ. Площадью такой системы ДНФ будем называть величину $Q = (m+n){\times}l$.

Введем также в рассмотрение булеву матрицу $\boldsymbol{A}$ с размерами $l{\times}n$, элементы которой имеют нулевое значение тогда и только тогда, когда соответствующие им (т.е. находящиеся на тех же позициях) элементы матрицы $\boldsymbol{K}$ являются неопределенными.

Аналогичным образом будем представлять и системы полиномов Жегалкина и полиномов Рида-Малера, с той только разницей, что булева матрица $\boldsymbol{B}$ будет определять вхождения конъюнкций в соответствующие полиномы.

Под *минором* матрицы будем понимать ее подматрицу, образованную элементами, находящимися на пересечении некоторого подмножества строк и некоторого подмножества столбцов этой матрицы.

Минор, число столбцов которого совпадает с числом столбцов содержащей его матрицы, называется *строчным*, а минор, число строк которого совпадает с числом строк содержащей его матрицы, называется *столбцовым*.

Вес минора булевой матрицы, а также веса его строк и столбцов определяются как числа содержащихся в них единичных элементов. Множество миноров булевой матрицы назовем *покрытием* этой матрицы, если каждый ее единичный элемент принадлежит хотя бы одному из этих миноров.

Столбцы и строки булевой матрицы называются *нулевыми* или *ненулевыми* в зависимости от того, все или не все их элементы имеют нулевое значение.

Минор вышеупомянутой матрицы $\boldsymbol{B}$ называется *(R,T,S)-ограниченным*, если он содержит не более R строк и не более T столбцов, а соответствующий ему (т.е. образованный строками с такими же номерами) строчный минор матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет не более S ненулевых столбцов.

Систему ДНФ будем называть *(R,T,S)-связанной*, если числа ее конъюнкций, функций и аргументов не превышают заданных величин R, T и S соответственно.

Под системой *индексированных* ДНФ будем понимать систему таких ДНФ, которым взаимно однозначно сопоставлены некоторые натуральные числа, называемые *индексами* ДНФ.

Систему индексированных ДНФ будем называть *подсистемой* другой системы индексированных ДНФ, если множества аргументов, конъюнкций и индексов первой являются подмножествами аргументов, конъюнкций и индексов другой системы.

Пусть D – исходная система индексированных ДНФ, $\{1,2,3, \ldots,m\}$ – множество индексов ДНФ этой системы. Множество W подсистем системы D назовем ее *дизъюнктивным разложением*, если каждая ДНФ системы D равняется дизъюнкции всех ДНФ с таким же индексом, имеющихся в подсистемах множества W.

Аналогичным образом определяются соответствующие разложения для систем полиномов Жегалкина и полиномов Рида-Малера.

В дальнейшем будем рассматривать только случай системы ДНФ, имея в виду, что при схемной реализации разложений полиномов Жегалкина и полиномов Рида-Малера вместо операции «дизъюнкция» используется операция «сумма по модулю 2».

Постановка задачи. Рассматриваемая задача заключается в построении дизъюнктивного разложения системы D на (R,T,S)-связанные подсистемы, где R, T и S – заданные натуральные числа, с минимальной суммарной площадью.

Эту задачу предлагается свести к нахождению покрытия матрицы $\boldsymbol{B}$ (R,T,S)-ограниченными минорами с минимальным суммарным весом. Заметим, что эта задача разрешима лишь в том случае, когда *ранг* (число литералов) каждой конъюнкции в системе не превышает S.

Описание алгоритма. Для решения сформулированной задачи предлагается циклический алгоритм, на i-м шаге которого в матрице $\boldsymbol{B}$ выбирается (R,T,S)-ограниченный минор B'_i, содержащий лишь ненулевые строки, после чего подсистема D_i системы D, определяемая этим минором и соответствующим ему строчным минором K_i матрицы K, заносится в формируемое решение, а затем единичным элементам матрицы В, принадлежащим минору B'_i, присваиваются нулевые значения.

Процесс формирования дизъюнктивного разложения заканчивается, когда в матрице $\boldsymbol{B}$ не останется единичных элементов.

Минор B_i булевой матрицы $\boldsymbol{B}$ будем называть *ненулевым*, если он содержит хотя бы один единичный элемент, а минор этой же матрицы, получаемый в результате удаления из B_i нулевых столбцов и нулевых строк, назовем *остовом* минора B_i.

Пусть a_j – j-я строка матрицы $\boldsymbol{A}$; A_i – некоторый строчный минор этой матрицы, не содержащий строки a_j; A_i^j– строчный минор матрицы $\boldsymbol{A}$, являющийся результатом включения строки a_j в минор A_i, а B_i, B'_i и b_j – соответствующие минорам A_i , A_i^j и строке a_j строчные миноры и строка матрицы $\boldsymbol{B}$. Строку a_j будем называть S-совместимой с минором A_i, если строка b_j является ненулевой, а число ненулевых столбцов минора A_i^j не превышает S. ***Базой*** минора A_i называется булев вектор длины n, помечающий своими единичными компонентами ненулевые столбцы этого минора. Через a_{ij} будем обозначать число пар одноименных элементов строки a_j и базы минора A_i, имеющих различные значения, а через b_{ij} – разность между суммой весов T наиболее "тяжелых" (большего веса) столбцов минора B_i^j и суммой весов Т наиболее "тяжелых" столбцов минора B_i.

Формирование минора B'_i начинается с выделения в матрице $\boldsymbol{B}$ минора B_i, образованного той из ее ненулевых строк, которой соответствует наиболее "тяжелая" строка матрицы $\boldsymbol{A}$, и выделения в матрице $\boldsymbol{A}$ соответствующего ему строчного минора A_i.

Далее осуществляется итерационный процесс, каждая итерация которого заключается в выполнении следующих действий. В начале производятся построчные наращивания минора A_i S-совместимыми с ним строками матрицы $\boldsymbol{A}$ и соответствующие им построчные наращивания минора B_i, причем критерием выбора номера j очередных включаемых в миноры строк является максимум величины $(b_{ij} + 1) / (a_{ij} + 1)$. Эти наращивания заканчиваются, когда либо в матрице $\boldsymbol{A}$ не окажется S-совместимых с минором A_i строк, либо число его строк станет равным R.

Затем в матрице $\boldsymbol{B}$ выделяется минор B'_i, образованный T наиболее "тяжелыми" столбцами минора B_i, после чего из B'_i удаляются нулевые строки, а соответствующие им строки матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ удаляются из миноров A_i и B_i. Описанный процесс выполняется до тех пор, пока вес вновь построенного минора B'_i не окажется равным весу одноименного минора, сформированного на предыдущей итерации, после чего из этих двух миноров в качестве результата выбирается тот, которому соответствует строчный минор матрицы $\boldsymbol{A}$ большего веса.

Экспериментальное исследование.

Предложенный алгоритм реализован на языке программирования C++ с использованием библиотеки классов «булев вектор» и «троичный вектор». Для проверки эффективности предложенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент.

Примеры матричных SF-описаний систем полностью определенных булевых функций были взяты из набора промышленных тестовых примеров, входящих в библиотеку примеров *Berkeley PLA TestSet* [8]. Для каждого них с помощью программ, входящих в систему FLC логической оптимизации [9], были построены матричные представления в виде полиномов Жегалкина и полиномов Рида-Малера.

В ходе эксперимента исследовалось применение предложенного алгоритма для трех форм представления матричных описаний – системы ДНФ (SDF), систем полиномов Жегалкина (PG) и систем полиномов Рида-Малера (PRM). Оценивалась суммарная площадь получаемых разложений.

Результаты эксперимента представлены в таблице, где n – число переменных, m – число функций, k – число элементарных конъюнкций исходной системы ДНФ булевых функций. Через Q_{ISX} обозначена площадь исходного матричного представления систем булевых функций, через Q_{PG} обозначена площадь для полиномов Жегалкина. Жирным шрифтом выделены лучшие решения.

В ходе экспериментов для каждого примера осуществлялся автоматический подбор параметра T (числа функций в блоках разложения) при фиксированных параметрах $R = k$, $S = n$. При этом перебирались последовательные значения $T = 1,2,3, \ldots,n$ и каждый раз оценивалась число N блоков и площадь полученного разложения. Процесс останавливался, когда на очередном шаге площадь полученного разложения возрастала. В этот момент и фиксировались параметры T и N.

Таблица 1. Результаты работы программы построения функциональных разложений

					SDF				PG				PRM		
Имя	n	m	k	Q_{ISX}	T	N	Q_{DSF}	Q_{ISX}	T	N	Q_{PG}	Q_{ISX}	T	N	Q_{PRM}
Mp2d	14	14	123	3444	4	4	1855	9 884	1	14	5 768	2 660	3	5	**1655**
TIAL	14	8	640	14080	1	8	**8843**	96 932	4	2	82 926	81 026	4	8	74488
IN2	19	10	137	**3 973**	10	1	3973	183 135	9	2	108 630	10 295	4	1	9942
IN0	15	11	138	3 588	11	1	**3510**	177 190	10	1	144 140	9 074	11	1	9074
ADD6	12	7	1092	20748	1	7	13480	2 508	1	7	1 572	2 508	1	7	**1572**
B2	16	17	110	3630	17	1	**3630**	101 970	17	1	101 970	35 178	17	1	35178
T3	12	8	152	3040	1	1	1845	18 140	4	2	14 798	1 020	8	1	**1020**
RADD	8	5	120	1560	5	1	1008	442	5	1	**272**	546	5	1	349

Заключение.

Уменьшить площадь получаемых в процессе синтеза комбинационных нерегулярных логических схем можно с помощью логической оптимизации исходных описаний. Хорошим средством для улучшения конечных схемных решений может служить предварительная обработка исходных систем с помощью программ построения функциональных разложений. Предложенный в работе алгоритм построения таких разложений является быстродействующим и позволяет в ряде случаев получать более эффективные схемные решения. Результаты экспериментального исследования показали, что использование разработанных программных средств может сократить площадь получаемых решений до полутора раз.

Список литературы

[1] Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М.: Физматлит, 2007. – 592 с.

[2] Бибило, П. Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений / П. Н. Бибило. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 211 с.

[3] Кузнецов, О. П. О программной реализации логических функций и автоматов / О. П. Кузнецов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 7. – С. 63–74.

[4] Бибило, П.Н. Дизъюнктивно-конъюнктивные разложения систем полностью определенных булевых функций / П.Н. Бибило, С.Н. Кардаш / Доклады Восьмой Международной научной конференции «Танаевские чтения», 27–30 марта 2018 г. – Минск, ОИПИ НАН Беларуси, 2018 г. – С. 28–32.

[5] Akers, S. B. Binary decision diagrams / S. B. Akers // IEEE Trans. on Computers. – 1978. – Vol. C-27, no. 6. – P. 509–516.

[6] Кардаш, С. Н. Функциональные разложения систем булевых функций / С. Н. Кардаш // VIII Международная научно-практическая конференция «BIG DATA and Advanced Analytics» (BIG DATA 2022): Материалы междунар. науч. конф., (Республика Беларусь, Минск, 11-12 мая 2022 г.). – Минск: БГУИР, 2022. – С. 142–150.

[7] Закревский, А. Д., Торопов Н.Р. Полиномиальная реализация частичных булевых функций. – Минск: Минск: Ин-т техн. Кибернетики НАН Беларуси, 2001. – 200 с.

[8] Berkeley PLA test set [Electronic resource]. Mode of access: http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis/espresso-examples/. Date of access: 9.12.2015.

[9] Бибило П.Н., Романов В.И. Логическое проектирование дискретных устройств с использованием продукционно-фреймовой модели представления знаний. Изд. 2-е, испр. – М.: ЛЕНАНД, 2014, 256 с.6. Бибило, П.Н. Кремниевая компиляция заказных СБИС. - Минск: Институт технической кибернетики АН Беларуси, 1996. - 268 с.

CONSTRUCTION OF BLOCK PARTITIONS OF SYSTEMS OF BOOLEAN FUNCTIONS BASED ON THE PROBLEM OF COVERING BOOLEAN MATRIXES

S.N.Kardash

Senior Research Fellowofthe United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, phD

Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Republic of Belarus
E-mail: kardash77@gmail.com

Abstract. The problem of constructing joint (using common subfunctions) expansions of systems of Boolean functions is considered. Representations of functions in the form of disjunctive normal forms (DNF), Zhegalkin polynomials and Reed-Mahler polynomials are used. Algorithms for constructing the decomposition of the minimum area are proposed. The results of an experimental study are presented.

Keywords: Disjunctive normal forms of Boolean functions, connectedness, polynomas Zhegalkin, polynomas of Reed-Maler.