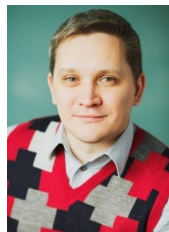


УДК 625

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕЖКОМПОНЕНТНЫХ ФАЗОВЫХ ОТНОШЕНИЙ



**Д.А. Кечик**  
Ассистент кафедры  
информационных  
радиотехнологий БГУИР,  
магистр технических наук  
[ya.dan.kechik@yandex.by](mailto:ya.dan.kechik@yandex.by)



**И.Г. Давыдов**  
Доцент кафедры  
информационных  
радиотехнологий БГУИР,  
кандидат технических наук,  
доцент  
[davydov\\_ig@bsuir.by](mailto:davydov_ig@bsuir.by)

### **Д.А. Кечик**

Окончил Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов связана с построением алгоритмов обработки сигналов вибрации с целью диагностики оборудования.

### **И.Г. Давыдов**

Окончил Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов связана с построением алгоритмов обработки сигналов вибрации с целью диагностики оборудования.

**Аннотация.** В настоящей работе представлена аппроксимация распределения межкомпонентных фазовых отношений (МКФО) составляющих полигармонического сигнала, зашумлённого гауссовским шумом. Показано, что для высоких отношений сигнал-шум закон распределения МКФО близок к нормальному.

**Ключевые слова:** межкомпонентные фазовые отношения, цифровая обработка сигналов, статистика, тест Колмогорова-Смирнова.

### **Введение.**

Неразрушающий контроль технического состояния промышленного оборудования существенно повышает эффективность его использования за счёт удлинения межремонтного интервала [1]. Одним из методов неразрушающего контроля является анализ сигналов вибрации агрегата.

Одной из распространённых проблем сборки оборудования, приводящая к значительному росту частоты отказа его узлов, является расцентровка соединяемых валов [2]. Ряд дефектов, в том числе расцентровка валов, характеризуется наличием в спектре виброускорения трёх гармонических составляющих с частотами  $F_0$ ,  $2F_0$ ,  $3F_0$ , где  $F_0$  – частота вращения вала. Помимо обнаружения расцентровки валов, остро стоит проблема определения её величины.

Для различения вида и степени расцентровки валов, в работе [3] предложено использовать межкомпонентные фазовые отношения (МКФО) узкополосных составляющих вибрации. МКФО представляют собой линейные комбинации фаз составляющих. Проанализировано распределение величин, вычисленных как усреднённые МКФО отфильтрованных компонентов вибрации. Эмпирическая плотность распределения этих величин близка к гауссовой, а их математическое ожидание зависит от величины смещения валов.

Цель данной работы – получить теоретическое распределение значений МКФО аргументов Фурье-коэффициентов, соответствующих гармоническим составляющим сигнала; построить зависимость среднеквадратического отклонения (СКО) МКФО от отношения сигнал-шум (ОСШ) и длины реализации. Это поможет в дальнейшем построить алгоритм принятия решения о виде и степени дефекта, оценить его параметры.

### Статистические распределения фазы.

Представим вибрационный сигнал диагностируемого оборудования в виде:

$$x(t) = \sum_{h=1}^H A(h) \cos(2\pi h F_0 t + \phi(h)) + n(t) = \sum_{h=1}^H A(h) \cos(2\pi h F_0 t + \hat{\phi}(h)), \quad (1)$$

$$\phi(h) = h\phi_0 + \theta(h) = E[\hat{\phi}(h)]$$

где  $H$  – число квазигармонических колебаний,  $A(h)$  – амплитуда  $h$ -го колебания,  $\phi_0$  – начальная постоянная фаза компонентов вибрации, обусловленная случайным моментом начала записи. Значения  $A(h)$  и  $\theta(h)$  считаются априори известными константами, как и дисперсия шума  $\sigma^2$ . Амплитуды составляющих сигнала вибрации при различных величинах расцентровки валов могут быть получены решением системы дифференциальных уравнений [4] или получены экспериментально [5]. Зависимость величины  $\theta(h)$  от величины расцентровки была установлена ранее экспериментально [3].

Рассмотрим распределение спектральных отсчётов  $X(hF_0)$ ,  $h = 1, 2, \dots, H$ :

$$X(f) = \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \cdot \exp(-2\pi j f \cdot t). \quad (2)$$

В силу линейности преобразования Фурье (ПФ),  $X(hF_0) = A(h) + N(hF_0)$ , где  $N(hF_0)$  – ПФ шума:

$$N(f) = \sum_{t=0}^{T-1} n(t) \cdot \exp(-2\pi j f \cdot t). \quad (3)$$

Согласно [6], мнимые и действительные части спектральных отсчётов  $N(f)$  при условии стационарности  $n(t)$  распределены асимптотически по нормальному закону:

$$D(\Re[N(f)]) = D(\Im[N(f)]) = N [0, T \cdot P(f)] \quad (4)$$

где  $T$  – дискретное время,  $P(f)$  – спектральная плотность мощности, определяемая как:

$$P(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi j f \tau) \cdot c(\tau) \quad (5)$$

$$c(\tau) = \text{cov}[X(t+\tau), X(t)], \text{cov}(X, Y) = E[X - E(X)] \overline{E[Y - E(Y)]} \quad (6)$$

Т.к.  $n(t)$  – белый гауссов шум, то  $c(\tau) = \sigma^2 \delta(0)$ , соответственно,  $P(f) = P_0 = \sigma^2 / F_s$ , где  $\sigma^2$  – мощность шума,  $F_s$  – частота дискретизации, тогда:

$$D(\Re[N(f)]) = D(\Im[N(f)]) = N [0, T \cdot P_0] \quad (7)$$

Если  $X(f)$  нормировать по числу отсчётов  $T$ , дисперсия Фурье-отсчётов уменьшится в  $T^2$  раз:

$$D(\Re[N(f)]) = D(\Im[N(f)]) = N[0, \sigma_s^2], \sigma_s^2 = T^{-1} \cdot P_0 \quad (8)$$

Распределение аргумента комплексной величины  $X(hF_0)$  рассчитывается через совместное распределение мнимой и действительной частей [7]:

$$D(\Re[X(hF_0)], \Im[X(hF_0)]) = (2\pi\sigma_s^2)^{-1} \cdot \exp[-(\Re[X(hF_0)] - a)^2 + (\Im[X(hF_0)] - b)^2] / (2\sigma_s), a = A(h)\cos(\phi(h)), b = A(h)\sin(\phi(h)) \quad (9)$$

которое после преобразования декартовых координат в полярные с учётом

$$\Re[X(hF_0)] = r(h)\cos\hat{\phi}(h), \quad (10)$$

$$\Im[X(hF_0)] = r(h)\sin\hat{\phi}(h),$$

где  $r(h)$ ,  $\hat{\phi}(h)$  – амплитуда и фаза Фурье-отсчёта  $h$ -й гармоники соответственно, преобразуется в совместное распределение амплитуды и фазы:

$$D(r(h), \hat{\phi}(h)) = r(2\pi\sigma_s^2)^{-1} \cdot \exp[-(r(h)\cos\hat{\phi}(h))^2 + (r(h)\sin\hat{\phi}(h) - b)^2] / (2\sigma_s) \quad (11)$$

откуда распределение фазы получено интегрированием (11) по амплитуде:

$$D(\hat{\phi}(h)) = \int_0^\infty D(r(h), \hat{\phi}(h)) dr = \frac{\exp(-A^2(h)/2\sigma_s^2)}{2\pi} + \frac{A\cos u}{2\sigma_s\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{A\cos u}{\sqrt{2\sigma_s}}\right) \right] \cdot \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2} \sin^2 u\right), u = \hat{\phi}(h) - \phi(h) \quad (12)$$

Согласно [8], при условии  $(A/\sigma_s)\cos(\phi - \hat{\phi}(h)) > 3$  возможно аппроксимировать распределение (12):

$$D(\hat{\phi}(h)) \approx \frac{A}{\sigma_s\sqrt{2\pi}} \cdot \cos u \cdot \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma_s^2} \sin^2 u\right]. \quad (13)$$

При условии малого отклонения фазы этот закон приближается нормальным распределением с СКО  $\sigma_\phi(h)$  и средним  $\phi(h)$ :

$$D(\hat{\phi}(h)) \approx \frac{A(h)}{\sigma_{\phi} \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{A(h)^2}{2\sigma_{\phi}^2} (\hat{\phi}(h) - \phi(h))^2\right], \quad (14)$$

$$\sigma_\phi(h) = \sigma_s / A(h) = P_0 / (\sqrt{T} \cdot A(h)). \quad (15)$$

### Статистические распределения МКФО аргументов Фурье-коэффициентов.

Существуют линейные комбинации фаз составляющих сигнала (1), не зависящие от момента начала отсчёта  $t_0$ . Такие комбинации называются межкомпонентными фазовыми отношениями (МКФО). Запишем общее выражение МКФО:

$$\begin{aligned}\Theta(k) &= \sum_{h=0}^H k(h) \cdot \hat{\phi}(h) = \sum_{h=1}^H k(h) \cdot (h\phi_0 + \theta(h) + \gamma(h)) = \\ &= \phi_0 \cdot \sum_{h=1}^H k(h)h + \sum_{h=1}^H k(h) \cdot (\theta(h) + \gamma(h))\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь  $k \in Z$  – коэффициенты линейной комбинации,  $\gamma(h) = \hat{\phi}(h) - \phi(h)$ . Выражение (16) не зависит от  $\phi_0(h) = 2\pi \cdot hF_0 \cdot t_0$  при условии

$$\sum_{h=1}^H k(h)h = 0 \quad (17)$$

Известно, что распределение суммы  $Z$  независимых нормальных случайных величин  $X, Y$  также нормальное с дисперсией, равной сумме дисперсий исходных величин:  $D(Z) = D(X) + D(Y)$ . Кроме того,  $D(C \cdot X) = C^2 D(X)$ . Отсюда распределение  $\Theta(k)$ :

$$D(\Theta(k)) = \frac{1}{\sigma_{\Theta}(k)\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(\Theta(k) - \Theta_0(k))^2}{2\sigma_s^2}\right], \quad (18)$$

$$\Theta_0(k) = \sum_{h=1}^H k(h) \cdot \theta(h), \quad (19)$$

при этом СКО  $\Theta(k)$  выражается через длину реализации, значения амплитуд гармоник и спектральной плотности мощности шума:

$$\sigma_{\Theta}(k) = \sqrt{\sum_{h=1}^H \sigma_{\phi}^2(h)} = \sqrt{\sum_{h=1}^H P_0^2 / (T \cdot A(h))^2} = \sqrt{P_0 / (T) \cdot \sum_{h=1}^H A^{-2}(h)} \quad (20).$$

### Результаты.

Эмпирические распределения МКФО фаз компонентов сигнала (1) были получены путём моделирования. Сигналы вида (1) генерировались при заданных значениях амплитуд, фаз, уровня шума,  $H = 3$ . Эмпирические и теоретические распределения  $\hat{\phi}(h), \Theta(k)$  при  $k = \{2, -1, 0\}$  и  $k = \{1, 1, -1\}$  приведены на рисунках 1-3 а-в соответственно. СКО теоретического распределения  $\phi(h)$  рассчитывалось по формуле (15), распределения  $\Theta(k)$  – по формуле (20).

Соответствие эмпирического и теоретического распределений проверялась при помощи теста Колмогорова-Смирнова. Суть теста заключается в оценке статистики

$$S_n = \sup_{|x| < \infty} |\hat{F}(x) - F(x)|, \quad (21)$$

где  $\hat{F}(x)$  – эмпирическая функция распределения,  $F(x)$  – теоретическая. Нулевая гипотеза не отвергается, если выполняется неравенство  $p = P(S > S_n) > \alpha$ , где  $S$  – критическое значение статистики для уровня значимости  $\alpha$ . Нулевая гипотеза была

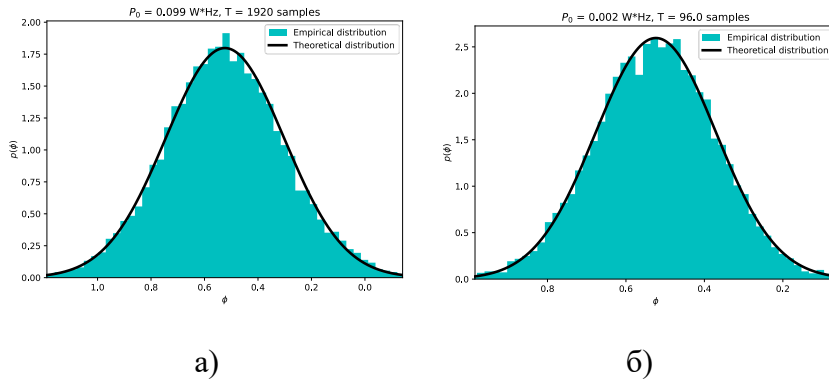


Рисунок 5 – Распределения начальной фазы первой гармоники: а)  $P_0 = 0.099$ ,  $T = 1920$ ; б)  $P_0 = 0.002$ ,  $T = 96$

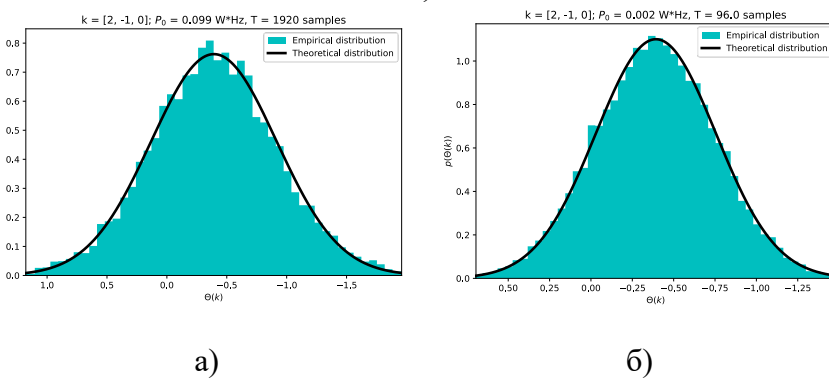


Рисунок 6 – Распределения  $\Theta(k)$ ,  $k = [2, -1, 0]$ : а)  $P_0 = 0.099$ ,  $T = 1920$ ; б)  $P_0 = 0.002$ ,  $T = 96$

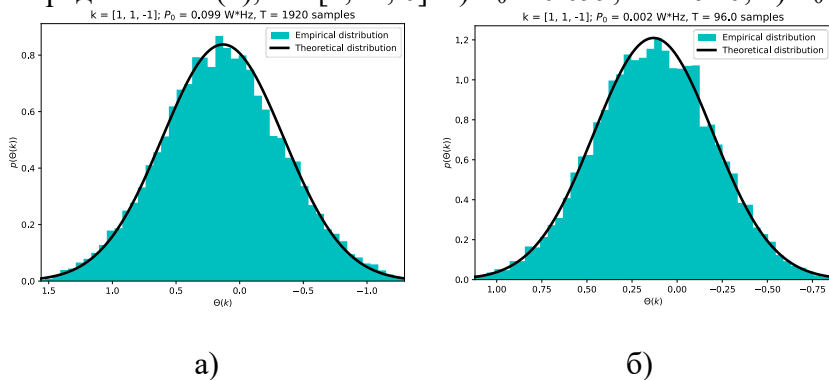


Рисунок 7 – Распределения  $\Theta(k)$ ,  $k = [1, 1, -1]$ : а)  $P_0 = 0.099$ ,  $T = 1920$ ; б)  $P_0 = 0.002$ ,  $T = 96$

сформулирована как:

- $D(\hat{\phi}(h)) = N [\phi(h), \sigma_{\phi}^2(h)]$
- $D(\Theta(k)) = N [\Theta_0(k), \sigma_{\Theta}^2(k)]$

Проверялась нулевая гипотеза при  $A = \{1, 0.8, 0.7\}$ ,  $F_0 = 10$  Гц,  $F_s = 960$  Гц. Проводилось два теста: при постоянной СПМ  $P_0 = 0.002$  Вт/Гц и  $T = [96 \dots 960]$  отсчётов,  $T = 1920$ ,  $P_0 = [0.002 \dots 0.2]$  Вт/Гц. При спектральной плотности мощности шума  $P_0 \leq 0.1$  Вт/Гц и  $T = 1920$   $p \geq 0.05$ , что не позволяет отвергнуть  $H_0$  в этих случаях. Полученный результат

свидетельствует о том, что при высоких ОСШ распределение МКФО можно считать нормальным со средним (19) и СКО (20).

#### **Заключение.**

Межкомпонентные фазовые отношения аргументов Фурье-коэффициентов сигнала вибрации, при высоких ОСШ распределены по нормальному закону. Соответствие эмпирического распределения теоретическому закону проверялась тестом Колмогорова-Смирнова. Получены аналитические выражения расчёта среднего и дисперсии МКФО, учитывающие длину реализации, значения амплитуд и уровень шума.

#### **Список литературы**

- [1] Абрамов, И.Л. Вибродиагностика энергетического оборудования / И.Л. Абрамов. – Кемерово : КузГТУ, 2011. – 81 с.
- [2] Hariharan, Dr.V. Vibration analysis of misaligned shaft – ball bearing system / Dr.V. Hariharan // Indian J. Sci. Technol. – 2009. – Т. 2. – С. 45-50.
- [3] Кечик, Д.А. Различение неисправностей оборудования при помощи межкомпонентной фазовой обработки сигналов / Д.А. Кечик, И.Г. Давыдов // Информационные радиосистемы и радиотехнологии 2022 : материалы научно-технической конференции, Минск, 29–30 ноября 2022 г. / БГУИР. – Минск : БГУИР, 2022. – С. 232-237.
- [4] Dynamic Response of a Rotating Assembly under the Coupled Effects of Misalignment and Imbalance / M. Desouki [et al.] // Shock Vib. – 2020. – Vol. 2020. – P. 26.
- [5] Kumar, A. Vibration characteristics of a rotor-bearing system caused due to coupling misalignment – a review / A. Kumar, P. Sathujoda, V. Ranjan // Vibroengineering PROCEDIA. – 2021. – Vol. 39. – P. 1-10.
- [6] Brillinger, D.R. Time Series: Data Analysis and Theory / D.R. Brillinger. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. – 564 p.
- [7] Bennett, W. Methods of Solving Noise Problems / W. Bennett // Proc. IRE. – 1956. – Vol. 44, № 5. – P. 609-638.
- [8] Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – Изд. 3. – М. : Радио и связь, 1989.

### **PROBABILITY DENSITIES OF INTER-COMPONENT PHASE RELATIONS**

***D.A. Kechik***

*Assistant of Department of Information Radiotechnologies, Belarusian State University of computer science and Radio Electronics, master of technical sciences  
ya.dan.kechik@yandex.by*

***I.G. Davydov***

*Associate professor of Department of Information Radiotechnologies, Belarusian State University of computer science and Radio Electronics, PhD  
davydov\_ig@bsuir.by*

*Department of Information Radiotechnologies  
Faculty of Radiotechnics and Electronics  
Belarusian State University of computer science and Radio Electronics, Republic of Belarus  
E-mail: ya.dan.kechik@yandex.by*

**Abstract.** Approximation of inter-component phase relations (ICPR) of components of corrupted by additive gaussian noise polyharmonic signal has been presented in this paper. ICPR probability distribution law has been shown to be close to normal.

**Key words:** inter-component phase relations, digital signal processing, statistics, Kolmogorov-Smirnov test.