Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей 1-39 01 01 «Радиотехника (по направлениям)»; 1-39 01 02 «Радиоэлектронные системы»; 1-39 01 03 «Радиоинформатика»; 1-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации»; 1-39 03 03 «Электронные и информационно-управляющие системы физических установок»; 1-41 01 02 «Микро- и наноэлектронные технологии и системы»; 1-41 01 03 «Квантовые информационные системы»; 1-41 01 04 «Нанотехнологии и наноматериалы в электронике»

Минск БГУИР 2023

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.171я73
О-75

Авторы:

Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец, Т. С. Степанова,
В. М. Метельский, И. Е. Конюх, Л. И. Василюк

Рецензенты:

кафедра общей математики и информатики
Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 25.03.2022);

доцент кафедры высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
кандидат физико-математических наук, доцент А. В. Конюх

Основы функционального анализа и теории функций : пособие / Е. А. Баркова [и др.]. – Минск : БГУИР, 2023. – 110 с. : ил.
О-75 ISBN 978-985-543-696-7.

Приводятся задачи для факультативного курса по следующим темам: функциональные ряды, ряды Фурье, интеграл Фурье, теория функций комплексного переменного.

Предлагаются задачи для самостоятельного решения и контрольные работы.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-985-543-696-7

1. Функциональные ряды

Выражение $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *функциональным рядом*. Множество всех значений x, для которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости функционального ряда*. По аналогии с числовыми рядами для функциональных рядов вводят понятия условной и абсолютной сходимости.

Для нахождения областей сходимости функциональных рядов используют признаки Даламбера, Коши, Лейбница и Вейерштрасса. Для функциональных рядов важнейшим является понятие равномерной сходимости. Сходящийся в некотором промежутке E функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в этом промежутке, если для любого $\varepsilon>0$ найдется N, не зависящее от x, и такое, что для всех $n>N$ справедливо неравенство $|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ одновременно для всех значений x.

Сумма $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящегося ряда непрерывных функций $u_n(x)$ есть функция непрерывная. Отметим, что если функциональный ряд непрерывных на отрезке функций сходится на этом отрезке к разрывной функции, то ряд сходится неравномерно.

Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать, а если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, где $u_n(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно, то $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2x+1}}$.

Решение. При $x>0$ ряд сходится абсолютно как ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha>1$. При $-0,5<x\le 0$ ряд сходится условно по признаку Лейбница. Область сходимости ряда $x\in(-0,5;+\infty)$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{(2x^2+3x+2)^n}$.

Решение. Применим признак Коши к ряду, составленному из модулей данного ряда при фиксированном x:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{(2x^2+3x+2)^n}\right|}=\frac{1}{2x^2+3x+2}.$$

Данный функциональный ряд сходится абсолютно в области $\frac{1}{2x^2+3x+2}<1\Rightarrow 2x^2+3x+1>0$, или $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Вне этого интервала, за исключением, быть может, точек $x=-1$ и $x=-\frac{1}{2}$, он расходится. В точках $x=-1$ и $x=-\frac{1}{2}$ не выполняется необходимый признак сходимости.

Ряд сходится абсолютно в области $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{27^n\sin\frac{x}{n}}{x^{3n}}$.

Решение. Очевидно, что $x\neq 0$. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{27^{n+1}\sin\frac{x}{n+1}\cdot x^{3n}}{27^n\sin\frac{x}{n}\cdot x^{3n+3}}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{27^{n+1}\cdot\frac{x}{n+1}\cdot x^{3n}}{27^n\cdot\frac{x}{n}\cdot x^{3n+3}}\right|=\frac{27}{|x^3|}.$$

Ряд сходится абсолютно в области $\frac{27}{|x^3|}<1\Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$. В области $x\in(-3;3)$ ряд расходится. Точки $x=\pm 3$ исследуем отдельно.

При $x=3$ $u_n(x)=\sin\frac{3}{n}\sim\frac{3}{n}$, $n\to\infty$. Ряд расходится.

При $x=-3$ $u_n(x)=(-1)^{n+1}\sin\frac{3}{n}\sim(-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{n}$, $n\to\infty$. Ряд сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, область сходимости ряда $x\in(-\infty;-3]\cup(3;+\infty)$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Решение. При $x<1$: $\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|\le\left|x^n\right|$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|x^n\right|$ сходится как сумма бесконечно убывающей прогрессии.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$ сходится по признаку сравнения.

При $|x|>1$: $\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \le \left|\frac{x^n}{x^{2n}}\right| = \left|\frac{1}{x^n}\right|$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x^n}\right|$ сходится как сумма бесконечно убывающей прогрессии.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ сходится по признаку сравнения.

При $x=\pm1$ получаем ряды, не удовлетворяющие необходимому признаку сходимости. Следовательно, ряд сходится, причем абсолютно, в области $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{x\cos n^2}{x-n}$.

Решение. Функции, из которых составлен ряд, определены на множестве $x\neq n$, где $n\in N$. Применим признак Коши:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{\left|\sin^n\frac{x\cos n^2}{x-n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{x\cos n^2}{x-n}\right|=0.$$

Ряд сходится, причем абсолютно, на всей числовой оси, за исключением точек $x=n,$ где $n\in N$.

Пример 6. Исследовать на равномерную сходимость следующий ряд:

$$x^2+\sum_{n=2}^{\infty}(x^{2n}-x^{2n-2}),\quad x\in[-1;1].$$

Решение. Вычислим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n(x)=x^2+(x^4-x^2+x^6-x^4+\dots+x^{2n}-x^{n-2})=x^{2n};$$

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, \text{ если } |x|<1;\\ 1, \text{ если } x=\pm1.\end{cases}$$

Ряд непрерывных на отрезке функций сходится на этом отрезке к разрывной функции, следовательно, сходимость неравномерная.

Пример 7. Исследовать на равномерную сходимость следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{\operatorname{arctg}(nx+x^3)+3^n}.$$

Решение. Для всех значений x справедливо неравенство

$$0<\frac{3+(-1)^n}{\operatorname{arctg}(nx+x^3)+3^n}\le\frac{4}{3^n-\frac{\pi}{2}}.$$

Сходящийся знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n-\frac{\pi}{2}}$ является мажорантой для данного функционального ряда.

По признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{\operatorname{arctg}(nx+x^3)+3^n}$ сходится равномерно на любом отрезке.

Пример 8. Исследовать на равномерную сходимость следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)+\sqrt{x}},\ \ x\in[0;+\infty).$$

Решение. На промежутке $x\in[0;+\infty)$ ряд сходится условно, поэтому признак Вейерштрасса неприменим. Оценим остаток ряда формулой $\left|R_n(x)\right|\le\left|U_{n+1}(x)\right|$. Отсюда получаем неравенство

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{1}{\ln(n+2)+\sqrt{x}}\le\frac{1}{\ln(n+2)}<\varepsilon.$$

Это неравенство выполняется для всех $x\in[0;+\infty)$, что свидетельствует о равномерной сходимости функционального ряда на указанном промежутке.

Пример 9. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ сходится неравномерно на промежутке $(0;1)$. Для любого $x\in(0;1)$ ряд сходится как сумма бесконечно убывающей прогрессии.

Решение. Оценим остаток ряда. $R_n(x)=x^{n+1}+x^{n+2}+\dots=\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Имеем $\lim\limits_{x\to1-0}R_n(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x^{n+1}}{1-x}=\infty$. Следовательно, нельзя добиться для любого $\varepsilon>0$ неравенства $\left|R_n(x)\right|<\varepsilon$ для всех x одновременно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ на интервале $(0;1)$ сходится неравномерно.

Пример 10. Исследовать на равномерную сходимость следующий ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right),\ \ |x|<a.$$

Решение. Так как $\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\sim\frac{x^2}{n\ln^2 n}$, $n\to\infty$, то в смысле сходимости ряды $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ и $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^2}{n\ln^2 n}$ ведут себя одинаково. Исходя из неравенства $0\le\frac{x^2}{n\ln^2 n}<\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ и сходимости знакоположительного ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$, приходим к выводу о равномерной сходимости ряда на указанном промежутке.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

Решение. При $x\ge 0$ ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

Поэтому имеем: $\lim\limits_{x\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$

Пример 12. Можно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cos nx+5\sin n^2x}{2^n}$ почленно интегрировать в промежутке $[1;10]$?

Решение. Для всех значений x справедливо неравенство

$$0\le\left|\frac{3\cos nx+5\sin n^2x}{2^n}\right|\le\frac{8}{2^n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{2^n}$ является мажорирующим для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cos nx+5\sin n^2x}{2^n}$, следовательно, искомый ряд равномерно сходится на любом конечном промежутке. Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать.

Пример 13. Возможно ли почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$?

Решение. Функции $u_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ непрерывно дифференцируемы при $|x|<\infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ сходится, т. к. $\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\sim\frac{x}{n^2}$, $n\to\infty$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$ в силу признака Вейерштрасса сходится равномерно для $x\in(-\infty;+\infty)$ $\left(\frac{n^2}{n^4+x^2}\le\frac{1}{n^2}\right)$.

Следовательно, почленное дифференцирование ряда возможно.

Пример 14. Найти сумму степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ и указать область его определения.

Решение. Ряд определен на всей числовой оси за исключением точек $x=0,-1,-2,\dots$. Разложим общий член ряда на простейшие дроби и запишем его n-ю частичную сумму:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n+1}.$$

Найдем $S=\lim_{n\to\infty}S_n$: $S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n+1}\right)=\frac{1}{x}$, $x\ne 0,-1,-2,\dots$.

Дополнительные задачи

1. Найти сумму функционального ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(2x+3)}$, $x\ge 0$. **Ответ:** $\frac{\ln(2x+3)}{\ln(2x+3)-1}$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+2)}$. **Ответ:** $\frac{2x+1}{2x(x+1)}$, $x\ne 0;-1;-2;\dots$.

2. Найти область сходимости функционального ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x^2-6x+11)^n}{(n+2)\cdot 3^n}$. **Ответ:** $x\in[2;4]$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2}$.

Ответ: ряд расходится на всей числовой оси $(x\ne 0)$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{(n-e^{x})(n+1)}$.

Ответ: областью допустимых значений x является $x \neq \ln n$, в этой области ряд сходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5x^2+4)^n}{3^n(n^3+1)}$. **Ответ:** $\varnothing$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^x}{n(n+2^x)}$. **Ответ:** $x \in R$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n\sin x}}$. **Ответ:** $2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in Z$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(3x-4)^n}{3^n}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{3}$.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{e^{n\sin x}}$. **Ответ:** $2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in Z$.

3. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость ряда на указанном промежутке:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^{\sin nx}}{n\ln^2 n}$, $(-\infty;+\infty)$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e}{n\ln^2 n}$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{\operatorname{arctg}(nx+x^2)+3n^2}$, $(-\infty;+\infty)$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{3n^2-\dfrac{\pi}{2}}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)^3\cdot(3x)^{2n}}{\ln(1+x^2)+2n}$, $\left[-\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{9}\right]$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)^3}{9^n\cdot 2n}$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n \sin^2 nx}{\sqrt[4]{n^5+x^2}}$, $\left[-4;-2\right]$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{5/4}}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{x^2+n}}{2^n\sqrt{n+1}}$, $\left[-6;-2\right]$. **Ответ:** мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

2. Степенные ряды. Ряды Тейлора

Ряд вида $c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ называется *степенным рядом*. В точке $x=0$ он сходится.

Основной теоремой теории степенных рядов является теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ сходится при $x=x_0$, то он абсолютно сходится для всех x, удовлетворяющих условиям $-|x_0|<x<|x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x=x_0$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>|x_0|$.

Таким образом, существует интервал сходимости степенного ряда $-R<x<R$.

Число R называется радиусом сходимости числового ряда. Радиус сходимости степенного ряда можно вычислять по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ или $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$, при условии, что указанные пределы существуют. Граничные точки интервала могут как входить, так и не входить в область сходимости.

На всяком отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд сходится равномерно.

Степенной ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[0;x]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости, сколько угодно раз. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в каждой точке его интервала сходимости сколько угодно раз.

Для нахождения сумм степенных рядов часто применяют и дифференцирование и интегрирование.

Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет производные всех порядков. Тогда для любого n в этой окрестности можно записать формулу Тейлора: $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$. Если при этом остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю при $n\to\infty$ в каждой точке упомянутой окрестности, то в формуле Тейлора можно перейти к пределу и записать ряд Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если $x=x_0$, то иногда ряд Тейлора называют рядом Маклорена.

Запишем основные табличные разложения функций $f(x)$ в ряд Маклорена:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\quad (|x|<\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,\quad (|x|<\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,\quad (|x|<\infty);$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad (|x|<1);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,\quad (-1<x\le 1);$$

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots,\quad (|x|\le 1).$$

При разложении функций в степенные ряды обычно применяют следующие приемы: непосредственное разложение функции в ряд Тейлора; использование сложения и вычитания рядов и умножение ряда на число; использование табличных разложений; использование дифференцирования и интегрирования рядов; использование умножения и деления рядов; метод неопределенных коэффициентов; подстановка ряда в ряд.

Отметим, что если каким-либо образом функция $f(x)$ разложена в сходящийся степенной ряд, то это разложение является рядом Тейлора.

Степенные ряды находят широкое применение при вычислении приближенных значений функций, приближенном вычислении определенных интегралов, нахождении пределов функций и решении дифференциальных уравнений.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n\sqrt{n+1}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости данного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\sqrt{n+2}}{4^n\sqrt{n+1}}=4.$$

Ряд сходится в области $-4<x+3<4$, т. е. в интервале $-7<x<1$.

При $x=-7$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x=1$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, который расходится, т. к. $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n\to\infty$. Области сходимости ряда $x\in[-7;1)$.

Пример 2. Найти область сходимости следующего степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{(1+4n)\cdot 3^n}}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости по признаку Коши:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{3^n\,(1+4n)}}{2^n}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (как известно, } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a\cdot n}=1).$$

Ряд сходится в области $-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$. При $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4n}}$, который расходится. При $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+4n}}$. Этот ряд сходится по признаку Лейбница.

Область сходимости ряда $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}(x+1)^n$.

Решение. Найдем радиус сходимости степенного ряда по признаку Даламбера: $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(2n+2)!}{(2n)!\,(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}=\infty.$

Область сходимости степенного ряда $x\in(-\infty;+\infty)$.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x+1)^n$.

Решение. Находим $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 3^{n+1}}{3^n\,(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0.$ Ряд сходится в единственной точке $x=-1$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+5)\,27^{n+2}}$.

Решение. Ряд содержит бесконечное число нулевых членов. Применим общий подход нахождения области сходимости функциональных рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3n+4}\cdot(3n+5)\cdot 27^{n+2}}{(3n+8)\,27^{n+3}\cdot x^{3n+1}}\right|=\frac{\left|x^3\right|}{27}.$$

Данный ряд сходится, причем абсолютно, если $\frac{\left|x^3\right|}{27}<1$, т. е. $-3<x<3$. При $x=-3$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,27^n\,(-3)}{(3n+5)27^n\cdot 27^2}=-\frac{3}{27^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+5}$. Он сходится по признаку Лейбница. При $x=3$ получаем расходящийся ряд $\frac{3}{27^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+5}$.

Область сходимости ряда $x\in[-3;\,3)$.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^{n^2}}{(n+3)^n}$.

Решение. Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x+4\right|^n}{n+3}=\begin{cases}0, & \text{если } \left|x+4\right|\le 1;\\ \infty, & \text{если } \left|x+4\right|>1.\end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится, если $\left|x+4\right|\le 1$, т. е. $x\in[-5;\,-3]$.

Пример 7. Исследовать на сходимость степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^{2n+1}}{(2n-1)!!}$.

Решение. Находим $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{2n+3}\cdot(2n-1)!!}{(2n+1)!!\cdot n!\,x^{2n+1}}\right|=\frac{x^2}{2}$.

Ряд сходится в области $\frac{x^2}{2}<1$, т. е. $x\in(-\sqrt{2};\,\sqrt{2})$.

При $x=\pm\sqrt{2}$ $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{2n+2}{2n+1}>1$ не выполняется необходимый признак сходимости. Область сходимости ряда $x\in(-\sqrt{2};\,\sqrt{2})$.

Пример 8. Исследовать степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ на сходимость.

Решение. Найдем радиус сходимости этого ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}\left(1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}}=\frac{1}{3}.$$

Ряд сходится абсолютно в области $|x+1|<\frac{1}{3}$, т. е. $-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$.

При $x=-\frac{4}{3}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится как сумма двух сходящихся рядов (условно). При $x=-\frac{2}{3}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ расходится. Следовательно, областью сходимости ряда является промежуток $\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right]$.

Пример 9. С помощью почленного интегрирования найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$.

Решение. Областью сходимости ряда является промежуток $|x|<1$.

Проинтегрируем этот ряд:

$$\int S(x)\,dx=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+c_1=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+c_1.$$

Положим $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=S_1(x)$.

Проинтегрируем этот ряд:

$$\int S_1(x)\,dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}(nx^{n-1})\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+c_2=\frac{x}{1-x}+c_2.$$

Находим $S_1(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, $\int S(x)\,dx=\frac{x}{(1-x)^2}+c_1$.

Проинтегрируем полученное выражение:

$$S(x)=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3},\ \ |x|<1.$$

Пример 10. С помощью почленного дифференцирования найти сумму ряда $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Решение. Легко показать, что областью сходимости ряда является промежуток $|x| \le 1$.

В области $|x|<1$ этот ряд дважды продифференцируем:

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, \quad S''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

Полученное выражение дважды проинтегрируем:

$$S'(x) = \int \frac{2}{1+x^2}\, dx = 2\operatorname{arctg} x + c_1;$$

$$S(x) = 2\int \operatorname{arctg} x\, dx + c_1 x + c_2 = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + c_1 x + c_2.$$

Учитывая, что $S(0) = S'(0) = 0$, находим $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$.

Следовательно, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$.

Так как степенной ряд сходится и на концах интервала, по теореме о непрерывности правой части можно утверждать, что полученное соотношение верно при $|x| \le 1$.

Пример 11. Найти сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

Решение. Рассмотрим степенной ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} x^{n-1}$, который сходится в области $|x| \le 1$. Легко показать, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{3x^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2}.$$

Ряды $\displaystyle S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-x} x^{n-1}}{n-1}$ и $\displaystyle S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2}$ можно почленно дифференцировать в области $|x|<1$:

$$S_1'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-2} = \frac{1}{1+x};$$

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x);$$

$$S_2'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = \frac{x^3}{1+x};$$

$$S_2(x) = \int_0^x \frac{t^3}{1+t}\, dt = \int_0^x \frac{t^3+1-1}{t+1} = \left(-\ln(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right);$$

$$S(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3x^3}\left(-\ln(1+x)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right),\ |x|<1;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}=\lim_{x\to 1-0}S(x)=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}.$$

Пример 12. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=3^x$.

Решение. Запишем табличное разложение функции e^t в ряд Маклорена:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!},\ |t|<\infty.$$

Положим в этом разложении $t=x\ln 3$. Получим

$$e^{x\ln 3}=3^x=1+x\ln 3+\frac{\ln^2 3}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n 3}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{n!}x^n,\ |x|<\infty.$$

Пример 13. Разложить в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{2x+5}$ по степеням $x+4$.

Решение. Так как $\frac{1}{2x+5}=\frac{1}{2(x+4)-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}(x+4)}$, то в разложении $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$, $|t|<1$. Заменив t на $\frac{2}{3}(x+4)$, получим

$$f(x)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n(x+4)^n,\ \left|\frac{2(x+4)}{3}\right|<1,\ \text{т. е. } -\frac{11}{2}<x<-\frac{5}{2}.$$

Пример 14. Разложить в ряд Тейлора по степеням $x+2$ функцию $f(x)=\ln(-x^2-5x-4)$.

Решение. Так как $(-x^2-5x-4)=(-1-x)(4+x)$, то, полагая $x+2=t$, получим $-x^2-5x-4=2(1-t)\left(1+\frac{t}{2}\right)$. Отсюда следует, что

$$f(x)=\varphi(t)=\ln 2+\ln(1-t)+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n\cdot 2^n}=$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}-1\right)\frac{t^n}{n}=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}-1\right)\frac{(x+2)^n}{n},\ \ x\in[-3;-1).$$

Пример 15. Функцию $f(t)=e^x\cdot\ln(1+x)$ разложить в ряд Маклорена до x^4.

Решение. Запишем табличные разложения:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots,\ |x|<\infty;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \ -1 < x \le 1.$$

Произведя умножение рядов, получим

$$e^x \cdot \ln(1+x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) =$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x^4 + \ldots =$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0x^4 + \ldots, \quad x \in (-1; 1].$$

Пример 16. Используя метод неопределенных коэффициентов, функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ разложить в ряд Маклорена до x^5.

Решение. Имеем $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \ldots}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \ldots} = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots$.

Запишем тождество

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right)\left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots\right).$$

Перемножая ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений:

$$a_1 = 1,$$

$$a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120},$$

из которой находим $a_1 = 1,\ \ a_3 = \dfrac{1}{3},\ \ a_5 = \dfrac{2}{15}$.

Имеет место разложение $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots$.

Пример 17. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \cos x$ по степеням $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Вычислим значения функции и ее производных при $x = \dfrac{\pi}{4}$:

$$y=\cos x, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad y''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y'''=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

…………………………………………………

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad y^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n+1)}=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad y^{(n+1)}\left(\xi\right)=\cos\left(\theta\right).$$

Запишем формулу Тейлора для произвольного n:

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\ldots\right)+R_n(x);$$

$$R_n(x)=\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\theta);$$

$$\left|R_n(x)\right|\le\left|\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится на промежутке $x\in(-\infty;+\infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Следовательно, полученный ряд Тейлора сходится к $\cos x$ при любом x.

Пример 18. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{1+\sin x}$ до x^7.

Решение. Разложим функцию $\dfrac{1}{1+\sin x}$ в ряд Маклорена до x^4 и полученный ряд умножим на x^3:

$$\frac{1}{1+\sin x}=1-\sin x+\sin^2 x-\sin^3 x+\sin^4 x+\ldots=$$

$$=1-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+x^4=$$

$$=1-x+\frac{x^3}{6}+x^2-\frac{1}{3}x^4-x^3+x^4+\ldots=1-x+x^2-\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{3}x^4+\ldots;$$

$$\frac{x^3}{1+\sin x}=x^3-x^4+x^5-\frac{5}{6}x^6+\frac{2}{3}x^7+\ldots.$$

Разложение справедливо в области $|\sin x|<1,$ т. е. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Пример 19. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\dfrac{1}{(4-x)^2}$ по степеням $x-2$.

Решение. Разложим по степеням $x-2$ функцию $\dfrac{1}{4-x}$.

Имеем

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4-((x-2)+2)}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x-2}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{2^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n},\quad \left|\frac{x-2}{2}\right|<1,\quad x\in(0;\,4).$$

Так как $\dfrac{1}{(4-x)^2}=\left(\dfrac{1}{4-x}\right)'$, то

$$\frac{1}{(4-x)^2}=\frac{1}{4}+\frac{2(x-2)}{2^2\cdot 2}+\frac{3(x-2)^2}{2^3\cdot 2}+\ldots=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x-2)^n}{2^n},\quad x\in(0;\,4).$$

Пример 20. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\arcsin x$.

Решение. Используя разложение функции $(1+t)^2$ в ряд Маклорена, запишем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^4+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^6+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n},\ |x|<1.$$

Так как $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то

$$\arcsin x=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}t^{2n}\right)dt=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1},\ \ |x|<1.$$

При $n=2$ получаем $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots$.

Пример 21. Вычислить $e^{\frac{2}{5}}$ с точностью до $0,01$.

Решение. При вычислении различных степеней числа e используют приближенную формулу $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

Если $|x|<n+1$, то остаток оценивается формулой $|R_n|<\frac{x^{n+1}}{n!(n+1-|x|)}$.

В разложении функции $f(x)$ полагаем $x=\frac{2}{5}$:

$$e^{\frac{2}{5}}=1+\frac{2}{5}+\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3}{6}+\ldots .$$

При $n=3$: $|R_n|<\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot 5}{6\cdot 3\cdot 18}<0,01.$

Таким образом, $e^{\frac{2}{5}}=1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25\cdot 2}+\frac{8}{125\cdot 6}\approx 1,48$.

Пример 22. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$.

Решение. Так как $\ln(1-x^2)\sim -x^2$, $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(1-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)+x+\ldots-3\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\ldots\right)}{-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\frac{3}{2}x^2+\ldots+x+\ldots-3-x+\frac{1}{3}x^2+\ldots}{-x^2}=\frac{7}{6}.$$

Пример 23. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$.

Решение. Так как $\operatorname{arctg} x^3 \sim x^3$, $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}=\frac{x^3+\ldots-2\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)+2x(1+\ldots)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x+\frac{1}{3}x^3+2x+\ldots}{x^3}=\frac{4}{3}.$$

Пример 24. С помощью ряда Маклорена вычислить с точностью $0,001$ интеграл $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

Решение. В ряде Маклорена для функции $\cos x$, заменяя x на $\sqrt{x}$, получим

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^3}{720}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{72}-\frac{x^4}{2880}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}+\ldots.$$

Остаток этого ряда оценивается первым отбрасываемым членом. Таким образом,

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}=0,764.$$

Пример 25. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y''=x^2+y^2$, удовлетворяющего условиям $y(-1)=2$, $y'(-1)=\frac{1}{2}$.

Решение. Решение можно искать в виде ряда

$$y=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+$$

$$+\frac{f^{\mathrm{IV}}(-1)}{4!}(x+1)^4+\ldots.$$

Здесь $f(-1)=2$, $f'(-1)=\frac{1}{2}$. Находим $f''(-1)$, $f'''(-1)$ и $f^{\mathrm{IV}}(-1)$:

$$f''(-1)=5,\quad f'''(x)=2x+2y\cdot y',\quad f'''(-1)=0;$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=2+2(y')^2+2y\cdot y'',\quad f^{\mathrm{IV}}(-1)=\frac{45}{2}.$$

Подставляя найденные решения в искомый ряд, получаем решение данного уравнения:

$$y=2+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{5}{2}(x+2)^2+\frac{15}{16}(x+1)^4+\ldots.$$

Пример 26. Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения уравнения $y''-3y'+2y-4x+6=0,$ удовлетворяющего условиям $y(0)=6,\ \ y'(0)=8.$

Решение. Частное решение ищем в виде степенного ряда

$$y=6+8x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots,\ \ (a_0=y(0),\ a_1=y'(0)).$$

Находим $y'(x)$ и $y''(x)$:

$$y'(x)=8+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3;$$

$$y''(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots.$$

Имеем

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2-24-6a_2x-9a_3x^2-12a_4x^3+12+16x+2a_2x^2+2a_3x^3+$$
$$+\ 2a_4x^4-4x+6+\ldots=0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2a_2-24+12+6=0, \\ x^1 & 6a_3-6a_2+16-4=0, \\ x^2 & 12a_4-9a_3+2a_2=0. \end{array}$$

Из этой системы последовательно находим: $a_2=3,\ \ a_3=1,\ \ a_4=\dfrac{1}{4}.$

Следовательно, искомое частное решение запишется в виде

$$y(x)=6+8x+3x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots.$$

Дополнительные задачи

1. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{n+3}.$ **Ответ:** $x\in(-3;-1].$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{\sqrt{(1+5n^2)\,5^n}}$. **Ответ:** $x \in \left[-\dfrac{\sqrt{5}}{3};\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right]$.

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{n^2}}{(n+4)^n}$. **Ответ:** $x \in [2;\ 4]$.

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^n+b^n}$, $a>0,\ b>0$. **Ответ:** $x \in (-R;R)$ $R=\max(a;b)$.

д) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \ln\left(\dfrac{n+4}{n-4}\right)$. **Ответ:** $x \in [0;\ 2]$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n \cdot n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$. **Ответ:** $x \in [-3;\ 3]$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} \dfrac{n^3+2}{n+1}$. **Ответ:** $x \in (-1;\ 1)$.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n+1}}{(3n+5)\,4^{n+2}}$. **Ответ:** $x \in \left[-\sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{4}\right)$.

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{(2n+3)^2} x^{2n-1}$. **Ответ:** $x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n \ln^m n}$, $m \in R$.

Ответ: $0 \le x < 2$ при $m \le 1$; $0 \le x \le 2$ при $m > 1$.

2. Найти сумму ряда, указать его область сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n}$. **Ответ:** $-\ln|1-2x|$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. **Ответ:** $(1-x)\ln(1-x)+x$, $x \in [-1;\ 1)$.

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$. **Ответ:** $\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $|x|<1$.

г) $1\cdot 2+2\cdot 3x+\ldots+n(n+1)x^{n-1}+\ldots$. **Ответ:** $\dfrac{2}{(1-x)^3}$, $|x|<1$.

3. Найти первых три отличных от нуля члена ряда Тейлора для функций:

а) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, $x_0=1$. **Ответ:** $f(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{(x-1)^2}{2}+\ldots$.

б) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$, $x_0=0$. **Ответ:** $f(x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{6}x^3+\ldots$.

в) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$, $x_0=1$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}-\dfrac{8}{\pi^2}(x-1)+\dfrac{4(\pi+2)}{\pi^3}(x-1)^2+\ldots$.

4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена, найти область сходимости полученного ряда:

а) $f(x)=\ln(1-5x+4x^2)$. **Ответ:** $f(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+4^n}{n}x^n$, $|x|<\dfrac{1}{4}$.

б) $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2-3x+2}$. **Ответ:** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(7-\dfrac{11}{2^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<1$.

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **Ответ:** $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n}$, $|x|<1$.

г) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. **Ответ:** $f(x)=(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$, $|x|<1$.

5. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $f(x)=e^{2x^2+8x+3}$, $x_0=-2$.

Ответ: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{-5}2^n}{n!}(x+2)^{2n}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

б) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$, $x_0=\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $f(x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{2n+3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^{2n+1}$, $x\in(1;2)$.

в) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$.

Ответ: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}$, $0\le x\le 2$.

6. Используя разложения в степенные ряды, вычислить с точностью до $0,001$ значение выражения:

а) $\sqrt{1,3}$. **Ответ:** $1,140$.

б) $\ln 0,8$. **Ответ:** $-0,222$.

в) $\sqrt{e}$. **Ответ:** $1,649$.

г) $\cos 10°$. **Ответ:** $0,985$.

7. Используя разложения в степенные ряды, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^3)}{x\cos x-\sin x}$. **Ответ:** 3.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x-\sin x}$. **Ответ:** 12.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x^3}{e^x-x\sqrt{1+x}-1}$. **Ответ:** 24.

8. Используя разложения в степенные ряды, вычислить с точностью до $0,001$:

а) $\int\limits_0^{0,8}\frac{1-\cos x}{x}dx$. **Ответ:** $0,156$.

б) $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$. **Ответ:** $0,508$.

в) $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$. **Ответ:** $0,098$.

г) $\int\limits_0^{1}x^2\sin x\,dx$. **Ответ:** $0,223$.

9. Методом последовательного дифференцирования найти первых три ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения:

а) $y'=x+\frac{1}{y}$, $y(0)=1$. **Ответ:** $y=1+x+\frac{x^3}{3}+\dots$.

б) $y'=2x+\cos y$, $y(0)=0$. **Ответ:** $y=x+x^2-\frac{x^3}{6}+\dots$.

10. Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти решение дифференциального уравнения $y'' = y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

Ответ: $y = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x.$

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1)^{3x+1}}.$

Ответ: $x > \frac{1}{6}.$

2. Найти область сходимости следующего функционального ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 10x + 9)^n}.$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right).$

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+4)^n}{\sqrt[3]{2n+3} \cdot 3^n}.$

Ответ: $x \in (-7; -1].$

4. Разложить функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ в ряд Тейлора по степеням $x + 1.$

Ответ: $f(x) = -9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3.$

5. Найти методом непосредственного разложения первых три отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(x) = e^x \cdot \sin x.$

Ответ: $f(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots.$

6. Функцию $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 9x + 20}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - 3).$ Указать область сходимости ряда.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - \frac{7}{2^{n+1}}\right)(x-3)^n,\ \ x \in (2; 4).$

7. Вычислить $\sqrt[3]{8,36}$ с точностью до $0,01.$

Ответ: $2,03.$

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$.

Ответ: -1.

9. Вычислить $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$ с точностью до $0,001$.

Ответ: $0,521$.

10. Методом последовательного дифференцирования найти первых четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=y^2+x^3$, $y(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+\ldots$.

Вариант 2

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[5]{n^3}+\sqrt{n}+2)^{5x+2}$.

Ответ: $x<-\dfrac{11}{15}$.

2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+2}\cdot\dfrac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\,(x+3)^n}{\sqrt[3]{3n+2}}$.

Ответ: $-3,5\le x<-2,5$.

4. Разложить функцию $f(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$.

Ответ: $f(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$.

5. Найти методом непосредственного разложения первых два отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(x)=e^{\cos x}$.

Ответ: $f(x)=e\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\ldots\right)$.

6. Функцию $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$. Указать область сходимости ряда.

Ответ: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-3(-1)^n)}{2^{n+1}}(x+1)^n$, $x\in(-3;1)$.

7. Вычислить $\sqrt[3]{80}$ с точностью до $0,01$.

Ответ: $4,31$.

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin x-x}$.

Ответ: 0.

9. Вычислить $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до $0,001$.

Ответ: $0,508$.

10. Методом последовательного дифференцирования найти первых четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x+y^2$, $y(0)=1$.

Ответ: $y=1+x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x^3+\dots$.

3. Ряды по ортогональным системам функций. Тригонометрические ряды Фурье

Бесконечная система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортогональной на отрезке $[a;b]$, если $\int\limits_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)dx=0$ $(m\neq n)$.

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ называется ортогональной на отрезке $[a;b]$с весом $\rho(x)>0$, если $\int\limits_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)dx=0$ $(m\neq n)$.

Приведем следующие примеры:

1. Система $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ ортогональна на отрезке $[0;\pi]$.

2. Множество многочленов Чебышева $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, $n=0,1,2,\dots$, образует ортогональную систему функций на отрезке $[-1;1]$ с весом $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Многочлены Лежандра являются ортогональными функциями на отрезке $[-1;1]$. Они определяются следующей формулой:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{d^n((x^2-1)^n)}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Скалярным произведением двух функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a;b]$, называется число $(f, g) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx.$

Нормой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$.

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется ортонормированной, если $(\varphi_m, \varphi_n) = \int\limits_a^b \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$

Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ – система ортогональных функций на отрезке $[a;b]$. Предположим, что функцию $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ можно представить в виде ряда $f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x).$ Ряд Фурье для функции $f(x)$ называется сходящимся к этой функции в среднем на отрезке $[a;b]$, если $\int\limits_a^b (f(x) - S_n(x))^2\,dx \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогично $\int\limits_a^b (f(x) - S_n(x))^2\,\rho(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$ означает сходимость в среднем с весом $\rho(x)$. В дальнейшем под сходимостью ряда мы будем считать сходимость в среднем.

Если ряд Фурье сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, то его коэффициенты можно найти по формуле

$$c_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int\limits_a^b f_n^2(x)\,dx} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Если система функций ортонормирована, то

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx,\quad n = 0,1,\dots .$$

Систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx,\ \cos nx,\ \dots$ будем называть основной тригонометрической системой. Она является ортогональной на отрезке $[-\pi;\pi]$. Ряд по указанной системе называется тригонометрическим и записывается в виде $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Достаточный признак сходимости тригонометрического ряда: если сходится числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_n| + |b_n|\right)$, то тригонометрический ряд сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси.

Если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся на всей числовой оси тригонометрический ряд $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, то коэффициенты этого ряда определяются следующими формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx,\quad n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\quad n = 1, 2, \dots .$$

Если 2π-периодическая функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на $[-\pi;\pi]$, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к значению $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ в точке разрыва.

Если функция $f(x)$ является четной, то ее коэффициенты можно вычислять по следующим формулам:

$$b_0 = 0,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Если функция $f(x)$ является нечетной, то $a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$

Отметим, что для 2π-периодической функции $\varphi(x)$ справедливо равенство $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx.$

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $\left[-l;l\right]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле, то на этом отрезке указанная функция может быть представлена рядом Фурье $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$, где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

Тригонометрический ряд Фурье можно записать в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx},$$

где $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,$ или $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$, $n=1,2,\ldots$.

Зная комплексный ряд Фурье, можно написать действительный ряд Фурье функции $f(x)$:

$$a_n=\operatorname{Re}2c_n,\ b_n=-\operatorname{Im}2c_n,\ \frac{a_0}{2}=c_0.$$

Пример 1. Разложить функцию $f(x)=|x|$ на отрезке $\left[-1;1\right]$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра (ограничиться членами до $P_5(x)$). Ряд Фурье для функции $f(x)$ по многочленам Лежандра имеет вид $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$, где $c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\cdot P_n(x)dx.$

Решение. Так как $f(x)\cdot P_n(x)$ при $n=1,3,5$ являются нечетными функциями, то $c_1=c_3=c_5=0.$

Как известно, $P_0(x)=1,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье – Лежандра:

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_0(x)dx=\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2};$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}|x|P_2(x)=5\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)dx=\frac{5}{2}\int_0^1(3x^3-x)dx=\frac{5}{2}\left.\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1=\frac{5}{8};$$

$$c_4=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}|x|\cdot\frac{35x^4-30x^2+3}{8}dx=\frac{9}{8}\int_{0}^{1}(35x^5-30x^3+3x)dx=$$

$$=\frac{9}{8}\left(\frac{35}{6}x^6-\frac{15}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1=-\frac{9}{48}.$$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{5}{8}P_2(x)-\frac{9}{48}P_4(x)+\dots .$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева функцию $f(x)=x^3$, $x\in(-1;1)$.

Решение. Как известно, полиномы Чебышева $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$ ортогональны на интервале $(-1;1)$ с весовой функцией $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, причем

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)\cdot T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, \text{ если } m\neq n;\\ \dfrac{\pi}{2^{2n-1}}, \text{ если } m=n.\end{cases}$$

Запишем ряд Фурье для функции $f(x)=x^3$:

$$x^3=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x).$$

Умножив обе части неравенства на весовую функцию $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и проинтегрировав по промежутку $(-1;1)$, получим $a_0=0$, ввиду нечетности функции x^3. Далее, умножив обе части равенства на $\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $(m=1,2,\dots)$ и проинтегрировав по промежутку $(-1;1)$, найдем $\int_{-1}^{1}\frac{x^3T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi a_m}{2^{2m-1}}$.

Находим $\int_{-1}^{1}\frac{x^3\cdot\cos(m\arccos x)}{2^{2m-1}\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\arccos x=t\right|$, получим

$$a_m=\frac{2^m}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^3 t\cdot\cos(mt)dt=\frac{2^m}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}\cos t\right)\cos(mt)dt.$$

При $m\neq 1$ и $m\neq 3$ ввиду ортогональности интегралы будут равны 0.

При $m=1$: $a_1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{3}{4}$.

При $m=3$: $a_3=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(1+\cos 2t\right)dt=1.$

Таким образом, при $x\in(-1;1)$ $x^3=\frac{3}{4}T_1(x)+T_3(x)$.

Пример 3. Доказать ортогональность функций $1,\cos x,\cos 2x,...,\cos nx,...$ на отрезке $\left[0;\pi\right]$.

Решение. Для $n\neq m$ $\left(n=0,1,2...,\ m=0,1,2...\right)$:

$$\int\limits_0^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos\left(m+n\right)xdx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos(m-n)\,xdx=$$

$$=\frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Bigg|_0^{\pi}=0+0=0.$$

Пример 4. Функцию $f(x)=\cos^4 x$ разложить в ряд Фурье.

Решение. Используя известные формулы тригонометрии, получим

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

Пример 5. Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } -\pi<x<\pi,\\ \ \ 0, \text{ если } \ \ 0\leq x<\pi.\end{cases}$$

Построить график функции и график ряда Фурье.

Решение. Данная функция является кусочно-гладкой в интервале $(-\pi;\pi)$, а ее периодическое продолжение удовлетворяет всем условиям теоремы Дирихле.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{-\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{-\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\pi} x\cos nx dx = \begin{vmatrix} x=u & du=dx \\ \cos nx dx = dv & v=\frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx \Big|_0^{-\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{-\pi}\sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx \Big|_0^{-\pi} = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1) =$$

$$= -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}, \quad k = 0, 1, \dots ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\pi} x\sin nx dx = \begin{vmatrix} x=u & du=dx \\ \sin nx dx = dv & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\cos nx \Big|_0^{-\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{-\pi}\cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}(-1)^n + 0 = \frac{1}{n}(-1)^n .$$

Поэтому для $x \in (-\pi; \pi)$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n}.$$

Графики функции ряда Фурье изображены на рис. 1 и 2.

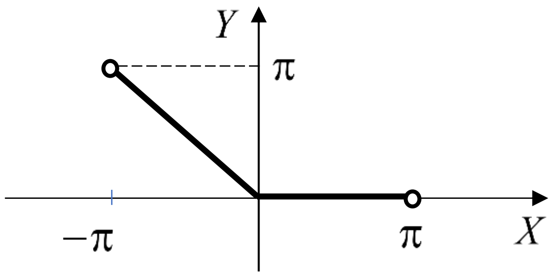

Рис. 1

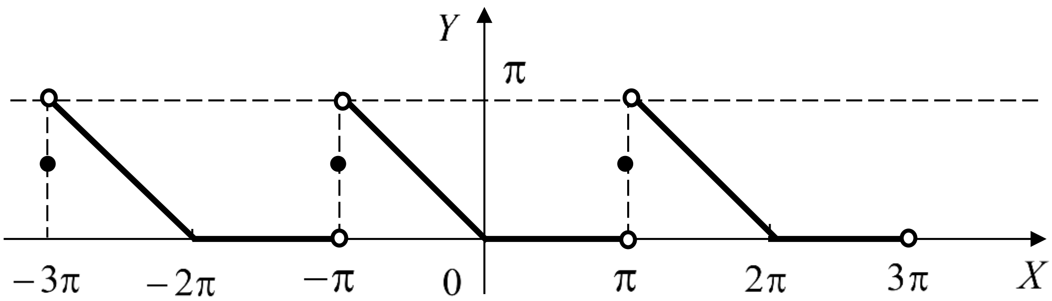

Рис. 2

Пример 6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, имеет кусочно-непрерывную производную и является 2π-периодической. Следовательно, ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке $x \in (-\infty; +\infty)$. Функция $f(x)$ является четной и на отрезке $\left[0;\pi\right]$ $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$.

Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$b_n = 0, \ \ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Итак, $\arcsin(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$ $\ (x \in (-\infty; +\infty))$.

Пример 7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sin ax$ в интервале $(-\pi; \pi)$ (a − не целое).

Решение. Осуществив периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю числовую ось, получим функцию $f_1(x)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы Дирихле. Найдем коэффициенты ряда Фурье. Ввиду нечетности функции $f_1(x)$, $a_n = 0$. В свою очередь

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x - \cos(a+n)x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x - \frac{1}{a+n}\sin(a+n)x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n \sin a\pi}{a-n} - \frac{(-1)^n \sin a\pi}{a+n}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n \cdot n}{a^2 - n^2}\sin a\pi.$$

Тогда $\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sin nx}{a^2 - n^2}$ $\ (|x| < \pi)$.

Пример 8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^{ax}$, $x \in (-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$.

Решение. Функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на всей числовой оси, за исключением точек $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Как известно,

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} + c;$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x} + c.$$

Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{1}{\pi a}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{a\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\cdot a}{\pi(a^2+n^2)};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\frac{a\sin nx - n\cos nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-(-1)^n n(e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{\pi(a^2+n^2)}.$$

Тогда $f(x) = \dfrac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx\right).$

Значения суммы ряда совпадают со значениями функции во всех точках непрерывности. В точках $x = n\pi$ значения суммы ряда равны $\dfrac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2}$.

Пример 9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, если $f(x) = x^2$ при $-\pi \le x \le \pi$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда:

а) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots$; б) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \ldots$.

Решение. Вычисляем коэффициенты ряда. Так как данная функция является четной, то $b_n = 0$. В свою очередь

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{4}{\pi n^2}(x\cos nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx dx =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n\frac{4}{n^2},\ n \ne 0,\ \text{при } n = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2.$$

По найденным коэффициентам записываем искомое разложение:

$$f(x)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении x, т. е. полученный ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси. Графики данной функции и суммы ее ряда полностью совпадают (рис. 3).

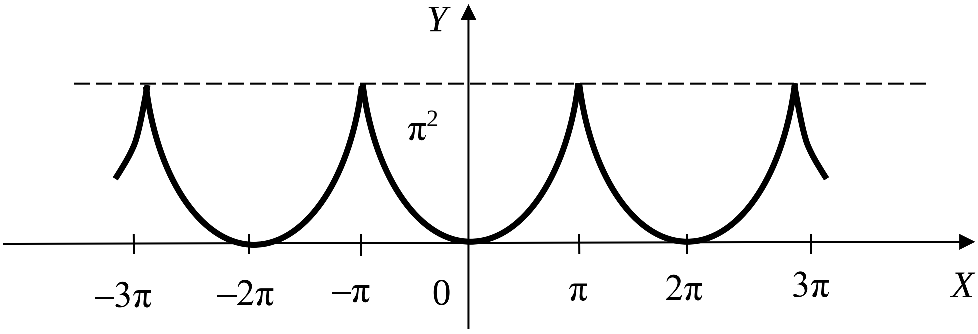

Рис. 3

Полагая в полученном разложении $x=0$, найдем

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{12}$$

и, полагая $x=\pi$, найдем $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$. ▲

Пример 10. Не вычисляя коэффициентов Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} x+5, \text{ если } x[-3;-1]; \\ 3, \text{ если } x\in(-1;2); \\ -2x+6, \text{ если } x\in(2;3), \end{cases}$$

найти значение суммы ряда Фурье в точках $-45,\ -32,\ 23,\ 50,\ 55,\ 63$.

Решение. Сумма ряда Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f_1(x)=\begin{cases} x+5, \text{ если } x[-3;-1]; \\ 3, \text{ если } x\in(-1;2); \\ -2x+6, \text{ если } x\in(2;3); \\ f(-3)=f(3)=1,\ f(-1)=3,5,\ f(2)=2,5. \end{cases} \qquad T=6.$$

Находим:

$f_1(-45)=f_1(-3)=1;\quad f_1(-32)=f_1(-2)=3;\quad f_1(23)=f_1(-1)=3,5;$
$f_1(50)=f_1(2)=2,5;\quad f_1(55)=f_1(1)=3;\quad f_1(63)=f_1(3)=1.$

Пример 11. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x$, заданную в интервале $(0; 2\pi)$. Изобразить график функции и график суммы ряда.

Решение. Функция $f(x)$ является функцией общего вида. Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \begin{vmatrix} x = u & du = dx \\ \cos nx dx = dv & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = \begin{vmatrix} x = u & du = dx \\ \sin nx dx = dv & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{-2\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{n}.$$

Для $x \in (0; 2\pi)$

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Графики функции $y = f(x)$ и суммы ряда изображены на рис. 4 и 5.

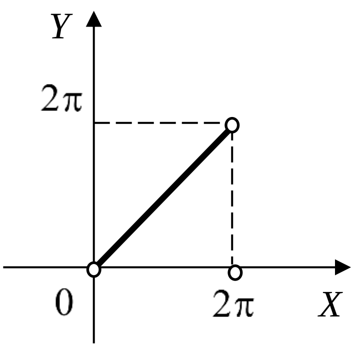

Рис. 4

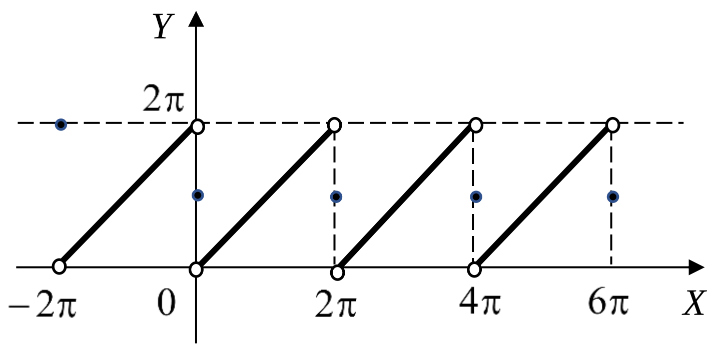

Рис. 5

Пример 12. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } 0<x<2;\\ x \text{ при } 2<x<4.\end{cases}$

Решение. Здесь $l=2$. Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 2dx+\int_2^4 xdx\right)=\frac{1}{2}\left(2x\Big|_0^2+\frac{x^2}{2}\Big|_2^4\right)=\frac{1}{2}(4+8-2)=5;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\begin{vmatrix} x=u & du=dx \\ \cos\frac{n\pi x}{2}dx=dv & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^4-\frac{2}{n\pi}\int_2^4\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^4=\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)=\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2};$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 2\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\begin{vmatrix} x=u & du=dx \\ \sin\frac{n\pi x}{2}dx=dv & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^4+\frac{1}{n\pi}\int_2^4\cos\frac{n\pi x}{2}=\left|\int_2^4\cos\frac{n\pi x}{2}dx=0\right|=$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{4}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\cos n\pi=-\frac{2}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Пример 13. Разложить в ряд Фурье функцию $y=|\sin x|$. Используя полученное разложение, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Решение. Очевидно, $|\sin x|$ есть четная функция с периодом π. Так как $2l=\pi$, то ряд Фурье имеет вид

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx, \text{ где } a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2n-1)x dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Следовательно, $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

Отсюда при $x=0$ получаем $0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что если положить $T = 2\pi$, то мы получим тот же результат.

Пример 14. Функция $f(x)$ задана на полупериоде

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < x < 0,5; \\ -1 \text{ при } 0,5 < x < 1. \end{cases}$$

Представить ее рядом Фурье.

Решение. Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения:

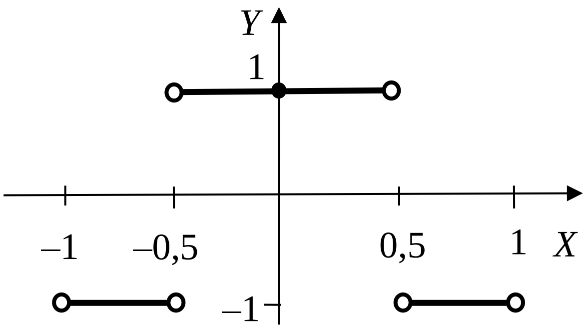

Рис. 6

1. Доопределим функцию $f(x)$ на интервале $(-1;0)$ четным образом (рис. 6).

Найдем коэффициенты ряда Фурье.

Имеем

$b_n = 0;$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^{0,5} 1\cdot\cos n\pi x dx + 2\int_{0,5}^1 (-1)\cdot\cos n\pi x dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^{0,5} - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{0,5}^1 = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0;$$

$$a_0 = 2\left(\int\limits_0^{0,5} dx - \int\limits_{0,5}^{1} dx\right) = 2\left(x\Big|_0^{0,5} - x\Big|_{0,5}^{1}\right) = 0.$$

Следовательно, искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы, будет следующим:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos n\pi x = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\pi x}{1} - \frac{\cos 3\pi x}{3} + \frac{\cos 5\pi x}{5} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1}.$$

2. Для разложения данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, доопределим ее на интервале $(-1;0)$ нечетным образом (рис. 7).

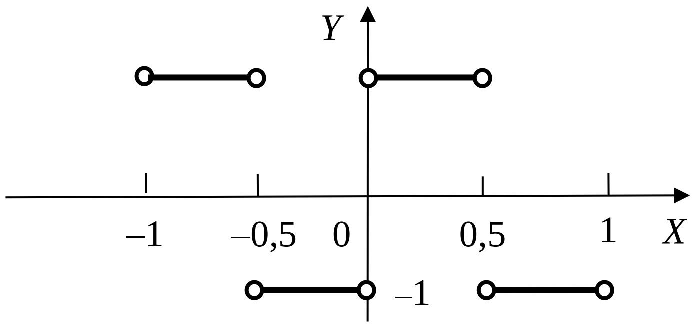

Рис. 7

Найдем коэффициенты ряда Фурье.

Имеем

$a_n = 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots);$

$$b_n = 2\int\limits_0^{0,5}\sin n\pi x dx - 2\int\limits_{0,5}^{1}\sin n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^{0.5} + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{0,5}^{1} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - 2\cos\frac{n\pi}{2} + 1\right).$$

Искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы, будет следующим:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos n\pi - 2\cos\frac{n\pi}{2} + 1\right)\sin n\pi x =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \frac{\sin 10\pi x}{5} + \ldots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\cdot(2k-1)\pi x)}{2k-1}.$$

Пример 15. Записать разложение функции $f(x)=x$ в интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме. Преобразовать полученный ряд в действительный ряд Фурье.

Решение. Вычислим коэффициенты c_n:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}dx=\left|\begin{matrix} x=u,\ dv=e^{-inx}dx \\ du=dx,\ v=-\dfrac{1}{in}e^{-inx}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-x}{in}e^{-inx}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{in}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\pi}{in}e^{-in\pi}-\frac{\pi}{in}e^{in\pi}+\frac{1}{n^2}\left(e^{-in\pi}-e^{in\pi}\right)\right)=\frac{-1}{2i\pi}(\cos n\pi-i\sin n\pi+\cos n\pi+i\sin n\pi)=$$

$$=-\frac{(-1)^n\cdot 2}{2in}=\frac{(-1)^n\cdot i}{n},\ n\neq 0.$$

При $n=0$ $c_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}xdx=0.$

Получим разложение $x=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\,i}{n}e^{inx},\ n\neq 0,\ -\pi<x<\pi.$

Чтобы записать действительный ряд Фурье, воспользуемся тем, что $\dfrac{a_0}{2}=c_0$, $a_n=\operatorname{Re}2c_n$, $b_n=-\operatorname{Im}2c_n$. Следовательно, $\dfrac{a_0}{2}=0,\ a_n=0,\ b_n=\dfrac{2(-1)^{n+1}}{2}$.

Действительный ряд Фурье имеет вид

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ -\pi<x<\pi.$$

Пример 16. Разложить в комплексный ряд Фурье функцию $f(x)=e^{-x}$, заданную в интервале $(-\pi;\pi)$. Записать действительный ряд Фурье.

Решение. Вычислим коэффициент c_n:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-(1+in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{-1}{1+in}e^{-(1+in)x}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi(1+in)}\left(e^{-\pi(1+in)}-e^{\pi(1+in)}\right)=\frac{1}{2\pi(1+in)}\left(e^{\pi}\cdot e^{in\pi}-e^{-\pi}\cdot e^{-\pi in}\right)=$$

$$=\left|e^{\pm i\pi n}=(-1)^n\right|=\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1+in)}=\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})(1-in)}{2\pi(1+n^2)}.$$

Получим разложение $e^{-x}=\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+in}e^{inx}$, $-\pi<x<\pi$.

Так как $\dfrac{a_0}{2}=c_0=\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$, $a_n=\operatorname{Re}2c_n=\dfrac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}$, $b_n=-\operatorname{Im}2c_n=$

$=\dfrac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})n}{\pi(1+n^2)}$, то $e^{-x}=\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(\cos nx+n\sin x)}{1+n^2}\right)$, $-\pi<x<\pi$.

Пример 17. Представить рядом Фурье в комплексной форме *T*-периодическую (с периодом $T=6$) функцию $f(x)=\begin{cases}4-x, & -3<x<3;\\ 4, & x=-3;3.\end{cases}$

Решение. Вычислим коэффициенты c_n:

$$6c_n=\int_{-3}^{3}(4-x)e^{\frac{-in\pi x}{3}}dx=\left|\begin{matrix}4-x=u & du=-dx\\ e^{\frac{-in\pi x}{3}}dx=dv & v=\dfrac{3i}{n\pi}e^{\frac{-in\pi x}{3}}\end{matrix}\right|=$$

$$=(4-x)\frac{3i}{n\pi}e^{-\frac{in\pi x}{3}}\Bigg|_{-3}^{3}+\frac{3i}{n\pi}\int_{-3}^{3}e^{-\frac{in\pi x}{3}}dx=\left|e^{-in\pi}-e^{in\pi}=0\right|=\frac{3i}{n\pi}e^{-in\pi}-7\frac{3i}{n\pi}e^{in\pi}=$$

$$=-\frac{18i}{n\pi}(-1)^n;$$

$$c_n=\frac{3i}{n\pi}(-1)^{n+1},\ \ n\neq 0;$$

$$c_0=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}(4-x)dx=-\frac{1\cdot(4-x)^2}{6\cdot 2}\Bigg|_{-3}^{3}=4.$$

Искомое разложение имеет вид $f(x)=4+\dfrac{3i}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{\frac{in\pi x}{3}}$, $n\neq 0$.

Пример 18. Найти частное решение дифференциального уравнения в виде тригонометрического ряда Фурье:

$y''-y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sign}x, & x\in(-\pi;\pi)\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$:

$$a_0=0,\ \ a_n=0,\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nx dx=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)=$$

$$=\frac{4}{\pi}(2k-1),\ \ k=1,2,\dots .$$

Решение данного дифференциального уравнения будем искать в виде тригонометрического ряда $y=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$

Тогда $y''=\sum\limits_{n=1}^{\infty}-n^2a_n\cos nx-n^2b_n\sin nx.$ Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получим

$$-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2-1)a_n\cos nx+(-n^2-1)b_n\sin nx=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)}{2k-1},$$

из которого следует, что $a_0=0,\ \ a_n=0,\ \ n=2k-1.$ Отсюда

$$-((2k-1)^2+1)b_k=\frac{4}{\pi(2k-1)},\ \ b_k=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{((2k-1)^2+1)(2k-1)}.$$

Полученные коэффициенты подставляем в тригонометрический ряд:

$$y=-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{((2k-1)^2+1)(2k-1)}.$$

Дополнительные задачи

1. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, построить график функции и график ее ряда Фурье, если

$$f(x)=\begin{cases}5, & -\pi<x<0;\\ 3, & 0<x<\pi;\\ 0, & x=-\pi;0;\pi.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=4-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

2. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2$) функцию, определенную на всей числовой оси и заданную на отрезке $[-1;1]$ равенством

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0;\\ 0,5 & \text{при } x=0;\\ x, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$, построить график функции и график ее ряда Фурье при следующих условиях:

а) $f(x)=x-6,\ 3\le x\le 9.$ **Ответ:** $f(x)=\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{\pi nx}{3}.$

б) $f(x)=\begin{cases}1, & 3\pi<x<4\pi;\\ 3, & 4\pi<x<5\pi.\end{cases}$ **Ответ:** $f(x)=2+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

в) $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Ответ: $f(x)=\dfrac{\pi+10}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}-\dfrac{\pi+10}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+$

$+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k}.$

г) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\dfrac{3}{2};\\ -1, & \dfrac{3}{2}<x<3.\end{cases}$ **Ответ:** $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{3}}{2n+1}.$

4. Разложить по синусам на отрезке$[0;\pi]$ функцию $f(x)=\cos 2x.$

Ответ: $f(x)=-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{2^2-1}+\dfrac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\dfrac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right).$

5. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=e^{-3x}$, $0\le x\le 1$, заданную на отрезке $[0;1]$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{1-e^{-3}}{3}-6\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{-3}-1}{\pi^2 n^2+9}\cos\pi nx.$

6. Используя разложение функции $f(x)=\dfrac{n-x}{2}$ на интервале $(0;2\pi)$ по синусам, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2n+1}.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}.$

7. Найти многочлены Лежандра для $n=0,1,2,3$. Разложить в ряд Фурье по многочленам Лежандра на отрезке $[-1;1]$ функцию $f(x)=x^3-2x^2$.

Ответ: $P_0(x)=1;\ P_1(x)=x;\ P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1);\ P_3(x)=\dfrac{1}{2}(5x^3-3x);$

$$f(x)=-\frac{2}{3}P_0(x)+\frac{3}{5}P_1(x)-\frac{4}{3}P_2(x)+\frac{2}{5}P_3(x).$$

Остальные коэффициенты ряда Фурье равны нулю.

8. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+y=\frac{\pi-x}{2}$, $x\in(0;2\pi)$, в виде тригонометрического ряда.

Ответ: $y=-\frac{x}{2}\cos x-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n^2-1)}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Функцию $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x<1;\\ 0 \text{ при } 1<x<\pi,\end{cases}$ заданную в интервале $(0;\pi)$, разложить по косинусам. Начертить график функции и график ряда Фурье.

Ответ: $\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx\right)$.

2. Функцию $f(x)=x\ (0<x<2)$ разложить в неполные ряды Фурье: а) по синусам; б) по косинусам. Начертить график функции и графики рядов Фурье.

Ответ: а) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{n}$; б) $1-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)nx}{2}}{(2n-1)^2}$.

3. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\begin{cases}3, & -3<x<0;\\ \frac{3}{2}, & x=0;\\ -x, & 0<x<3,\end{cases}$ где $l=3$.

Ответ: $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}-\frac{9}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{2n-1}+\frac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k\pi x}{3}}{2k}$.

Вариант 2

1. Функцию $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x<2;\\ 0 \text{ при } 2<x<\pi,\end{cases}$ заданную в интервале $(0;\pi)$, разложить по синусам. Начертить график функции и график ряда Фурье.

Ответ: $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos 2n}{n}\sin nx.$

2. Функцию $f(x)=x\ (0<x<3)$ разложить в неполные ряды Фурье: а) по синусам; б) по косинусам. Начертить график функции и графики рядов Фурье.

Ответ: а) $\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi x}{3}}{n}$; б) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{12}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2n-1)\,x\pi}{3}}{(2n-1)^2}.$

3. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<0;\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0;\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\end{cases}$ где $2l=4$.

Ответ: $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2n-1)nx}{2}}{(2n-1)^2}+\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{(2n-1)nx}{2}}{2n-1}-\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\pi x}{2n}.$

4. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является кусочно-гладкой в каждом конечном промежутке, абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty;+\infty)$, то в формуле Фурье можно осуществить предельный переход при $l\to\infty$ и получить следующее интегральное представление функции $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)\,dt\right)d\omega,$$

или

$$f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\big)d\omega,$$

где $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$, $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$.

По-прежнему в точках разрыва функции $f(x)$ интеграл Фурье сходится к числу $\frac{1}{2}(f(x_i-0)+f(x_i+0))$.

Если функция $f(x)$ четная, то $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos xd\omega,$ где

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt.$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\sin\omega x d\omega,$ где

$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$. Интеграл Фурье можно записать в комплексной форме

$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}\,dt\right)d\omega,$ или $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega x}d\omega,$ где

$$F(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Функция $F(i\omega)$ называется прямым преобразованием Фурье, а функция $f(x)$ – обратным преобразованием Фурье. Иногда преобразование Фурье записывают в следующем виде:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega.$$

Здесь $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ также называют прямым преобразованием Фурье.

Тогда $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$ называют обратным преобразованием Фурье. Если функция $f(x)-$четная, то

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x d\omega.$$

Положим здесь $F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$, тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x d\omega.$$

Функция $F_c(\omega)$ называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(t)$. Пусть функция $f(x)$ нечетная. Тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(x)\sin\omega t dt\right)\sin\omega x d\omega.$$

Положим здесь $F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$, тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x d\omega.$$

Функция $F_s(\omega)$ называется синус-преобразованием функции $f(t)$.

Пример 1. Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$F(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 2\le x\le 6;\\ 0 \text{ при } x<2 \text{ и } x>6.\end{cases}$$

Решение. Запишем интеграл Фурье в виде

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega,$$

где $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt,\ \ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt.$

Находим $A(\omega)$ и $B(\omega)$:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_2^{\infty}\cos\omega t dt=\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega t\Bigg|_2^6=\frac{1}{\pi\omega}(\sin 6\omega-\sin 2\omega)=\frac{2}{\pi\omega}\sin 2\omega\cdot\cos 4\omega;$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_2^{6}\sin\omega t dt=-\frac{1}{\pi\omega}\cos\omega t\Bigg|_2^6=\frac{1}{\pi\omega}(\cos 2\omega-\cos 6\omega)=\frac{2}{\pi\omega}\sin 4\omega\cdot\sin 2\omega.$$

Интеграл Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\left(\sin 2\omega\cos 4\omega\cos\omega x+\sin 4\omega\sin 2\omega\sin\omega x\right)d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\omega}{\omega}\cdot\cos\omega(x-4)\,d\omega.$$

Пример 2. Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$F(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } 0<x<\pi;\\ 0 \text{ при } x\ge\pi.\end{cases}$$

Решение. На промежутке $(-\infty;0)$ функцию $f(x)$ можно доопределить различными способами. Ограничимся двумя частными случаями. Доопределим функцию $f(x)$ четным образом (рис. 8).

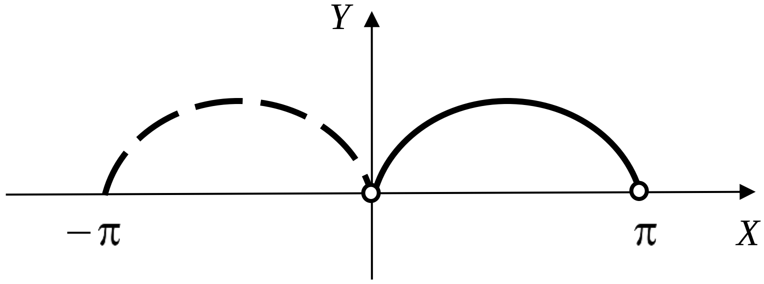

Рис. 8

Находим $F_c(\omega)$:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin t\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}(\sin(1+\omega)t+\sin(1-\omega)t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\cos(1+\omega)t}{1+\omega}-\frac{\cos(1-\omega)t}{1-\omega}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1-\omega^2}-\frac{\cos(1+\omega)\pi}{1+\omega}-\frac{\cos(1-\omega)\pi}{1-\omega}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

Если функцию $f(x)$ доопределить нечетным образом (рис. 9), то

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin t\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

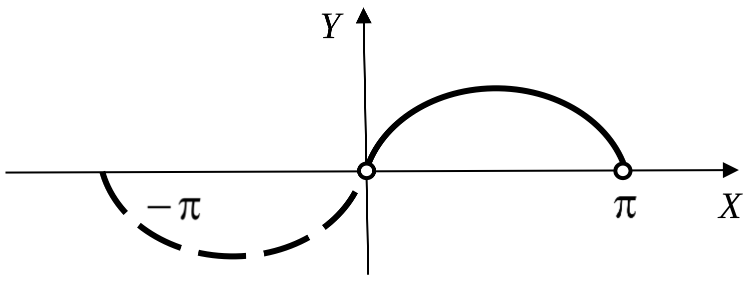

Рис. 9

Тогда $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}\cos\omega x d\omega\ (x\geq 0)$

или $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}F_c(\omega)\sin\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega x d\omega\ (x\geq 0).$

Пример 3. Представить интегралом Фурье следующую функцию (рис. 10):

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}|x| \text{ при } |x|\leq 2;\\ 0 \text{ при } |x|>2.\end{cases}$$

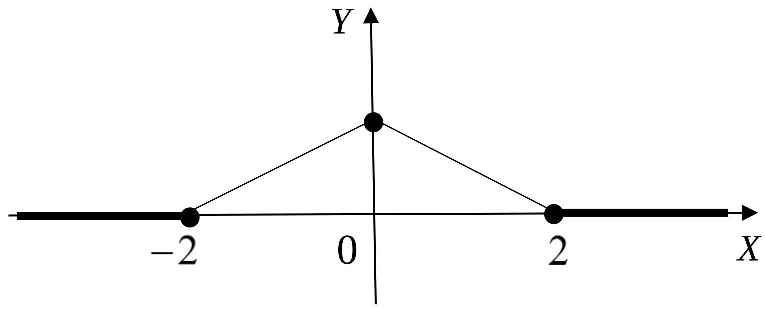

Рис. 10

Решение. Функция четная, поэтому $B(\omega)=0$.

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}f(t)\cos\omega t dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2}\left(1-\frac{1}{2}t\right)\cos\omega t dt=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}t=u & du=-\frac{1}{2}dt\\ \cos\omega t dt=dv & v=\frac{1}{\omega}\sin\omega t\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left(1-\frac{1}{2}t\right)\cdot\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^2+\frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{1}\sin\omega t dt\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2\omega^2}\cos\omega t\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi\omega^2}(1-\cos 2\omega)=\frac{2\sin^2\omega}{\pi\omega^2}.$$

Тогда $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2\cos\omega x d\omega.$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то интеграл Фурье при всех x совпадает с $f(x)$.

Пример 4. Найти косинус- и синус-преобразование Фурье для функции $f(x)=e^{-2x}$ $(x>0)$.

Решение. Продолжим функцию $f(x)$ на отрицательную полуось четным образом.

Найдем $F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-2t}\cos\omega t dt=$

$$=\left|\int e^{ax}\cos bx dx=e^{ax}\cdot\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+c\right|.$$

Следовательно,

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-2t}\,\frac{-2\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{4+\omega^2}\Bigg|_0^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2}{4+\omega^2}.$$

Продолжим функцию $f(x)$ $(x>0)$ на отрицательную полуось нечетным образом.

Найдем $F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-2t}\sin\omega t dt=$

$$=\left|\int e^{ax}\sin bx dx=e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+c\right|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-2t}\,\frac{-2\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{4+\omega^2}\Bigg|_0^{\infty}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{4+\omega^2}.$$

Применяя обратные преобразования Фурье, получим

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2}{4+\omega^2}\cos\omega x d\omega\ (x\geq 0)\ \text{ или }\ e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2}{4+\omega^2}\sin\omega x d\omega\ (x>0).$$

Пример 5. Функцию $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \pi x & \text{при } 0\leq x\leq 1;\\ 0 & \text{при } x>1\end{cases}$ представить интегралом Фурье в комплексной форме.

Решение. Запишем интеграл Фурье в следующем виде:

$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$ (выбрана другая форма записи интеграла Фурье).

Найдем внутренний интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt=\pi\int\limits_0^1 te^{i\omega t}dt=\pi\left(\frac{te^{i\omega t}}{i\omega}-\frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^2}\right)\Bigg|_0^1=\pi\frac{e^{i\omega}(1-i\omega)-1}{\omega^2}.$$

Следовательно, $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega}(1-i\omega)-1}{\omega^2}e^{-i\omega x}d\omega.$

В радиотехнической литературе интеграл Фурье в комплексной форме часто записывают так:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}S(i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega,$$

где $S(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ называется спектральной плотностью или спектральной характеристикой, а ее модуль $S(\omega)-$ спектром функции $f(t)$. При этом $S(i\omega)=a(\omega)-ib(\omega),\ a(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt,\ b(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt,$ $S(\omega)=\sqrt{(a(\omega))^2+(b(\omega))^2},\ \alpha(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{b(\omega)}{a(\omega)}.$

Пример 6. Найти спектральную плотность, модуль и фазу спектральной плотности импульса $f(x)=\begin{cases}ce^{-\beta t} & \text{при } t\geq 0;\\ 0 & \text{при } t<0.\end{cases}$

Решение. $S(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}ce^{-(\beta+i\omega)t}dt=\frac{c}{\beta+i\omega}=\frac{c(\beta-i\omega)}{\beta^2+\omega^2}=$

$$=\frac{c\beta}{\beta^2+\omega^2}-\frac{c\omega}{\beta^2+\omega^2}i;$$

$$a(\omega)=\frac{c\beta}{\beta^2+\omega^2},\ b(\omega)=-\frac{c\omega}{\beta^2+\omega^2};$$

$$S(\omega)=\sqrt{(a(\omega))^2+b(\omega))^2}=\frac{c}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}};$$

$$\alpha(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\beta(\omega)}{a(\omega)}=-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\beta}.$$

Пример 7. Решить интегральное уравнение $\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt=\frac{1}{1+\alpha^2}.$

Решение. Запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt.$$

В полученном уравнении $F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}$, тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}F_c(\alpha)\cdot\cos\alpha x d\alpha=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha.$$

Воспользуемся табличным интегралом $\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}$ $(a>0, m\geq 0)$.

Следовательно, $f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-x}=e^{-x}$ $(x\geq 0)$.

Дополнительные задачи

1. Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0;1);\\ 0, & x\in(-\infty;0]\bigcup[1;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}(\sin\omega\cos\omega x+(1-\cos\omega)\sin\omega x)d\omega.$

2. Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2} \text{ при } x\in[-\pi;\pi];\\ 0 \quad \text{при } x<-\pi \text{ и } x>\pi.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\pi\omega}{1-4\omega^2}\cos\omega x d\omega.$

3. Представить комплексной формой интеграла Фурье следующую функцию: $f(x)=e^{-a|x|}$, $a>0$.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$

4. Найти преобразование Фурье для следующей функции:

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, \text{ если } x\in[0;+\infty);\\ 0, \quad \text{если } x\in(-\infty;0).\end{cases}$$

Ответ: $F(i\omega)=\frac{1}{(1+i\omega)^2}$.

5. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье для функции $f(x)=e^{-5x}$, $x>0$.

Ответ: $F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2+25}$, $F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+25}$.

6. Решить интегральное уравнение $\int\limits_0^\infty f(t)\sin\alpha t dt=e^{-\alpha}$, $\alpha>0$.

Ответ: $f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{1+x^2}$, $x\ge 0$.

5. Последовательности комплексных чисел. Кривые и области на комплексной плоскости

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1=3-2i$ и $z_2=5+4i$. Найти:

а) $z_1-\overline{z}_2$; б) $\overline{z_1+z_2}$; в) $\overline{z}_1\cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. а) Находим $\overline{z}_2=\overline{5+4i}=5-4i$. Тогда

$z_1-\overline{z}_2=(3-2i)-(5-4i)=(3-5)+i(-2-(-4))=-2+2i.$

б) $z_1+z_2=(3-2i)+(5+4i)=(3+5)+i(-2+4)=8+2i.$ Следовательно, $\overline{z_1+z_2}=\overline{8+2i}=8-2i.$

в) Найдем $\overline{z}_1$: $\overline{z}_1=\overline{3-2i}=3+2i.$ Тогда имеем

$\overline{z}_1\cdot z_2=(3+2i)(5+4i)=15+12i+10i+8i^2=15+22i-8=7+22i.$

г) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-2i}{5+4i}=\frac{(3-2i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)}=\frac{15-12i-10i+8i^2}{25-16i^2}=\frac{15-22i-8}{25+16}=$

$=\frac{7-22i}{41}=\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i.$

Пример 2. Найти значения выражения $z=\frac{z_1^2+z_1\cdot\overline{z}_2}{\overline{z_2-z_1}}$, если $z_1=2+5i$, $z_2=3-4i$.

Решение. Последовательно находим:

$z_2-z_1=(3-4i)-(2+5i)=1-9i$, следовательно,

$\overline{z_2-z_1}=1+9i$; $z_1^2=(2+5i)^2=4+20i+25i^2=-21+20i$;

$\overline{z}_2=3+4i$, $z_1\cdot\overline{z}_2=(z+5i)(3+4i)=6+8i+15i+20i^2=-14+23i$;

$z_1^2+z_1\cdot\overline{z}_2=(-20+21i)+(-14+23i)=-34+44i$;

$z=\frac{-34+44i}{1+9i}=\frac{(-34+44i)(1-9i)}{(1+9i)(1-9i)}=\frac{-34+306i+44i-396i^2}{1-81i^2}=$

$$=\frac{362+350i}{82}=\frac{181}{41}+\frac{175}{41}i.$$

Пример 3. Вычислить:

а) $(\sqrt{3}-i)^{30}$; б) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$.

Решение. а) Представим число $z=\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме: $x=\operatorname{Re} z=\sqrt{3}$, $y=\operatorname{Im} z=-1$, следовательно, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$; $\varphi-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=$ $=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$. Тогда $z=\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

По формуле Муавра находим:

$$z^{30}=(\sqrt{3}-i)^{30}=2^{30}(\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi))=2^{30}(1+0)=2^{30}.$$

б) Числа $z_1=1+\sqrt{3}i$ и $z_2=1-i$ запишем в показательной форме. Для z_1 имеем: $x_1=1$, $y_1=\sqrt{3}\Rightarrow|z_1|=2$; $\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$. Значит, $z_1=1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Для числа z_2 имеем: $z_2=1$, $y_2=-1\Rightarrow|z_2|=\sqrt{2}$; $\varphi_2=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

Тогда $z_2=1-i=\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Выполняем деление z_1 на z_2:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+3i}{1-i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{5}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Используя формулу Муавра $z^n=r^n\cdot e^{in\varphi}$, $n\in\mathbb{Z}$, находим

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20}=2^{10}\cdot e^{i\frac{140\pi}{12}}=2^{10}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Переходя к тригонометрической форме записи, получим

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}=2^{10}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}=2^{10}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=2^{10}\left(\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=2^{9}(1-\sqrt{3}i).$$

Пример 4. Найти все значения корня из комплексного числа:

а) $\sqrt[6]{1+i}$; б) $\sqrt[4]{1-7i}$.

Решение. а) Запишем число $z=1+i$ в тригонометрической форме:

$x=\operatorname{Re} z=1, \quad y=\operatorname{Im} z=1 \Rightarrow |z|=\sqrt{2}, \ \varphi=\dfrac{\pi}{4}.$

Следовательно, $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Далее воспользуемся формулой Муавра:

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Имеем

$$z_k=\sqrt[6]{1+i}=\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{6}\right), \quad k=0,1,2,3,4,5.$$

Полагая последовательно $k=0,1,2,3,4,5,$ получим шесть значений корня:

$k=0$: $\quad z_0=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+i\sin\dfrac{\pi}{24}\right);$

$k=1$: $\quad z_1=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right);$

$k=2$: $\quad z_2=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{24}+i\sin\dfrac{17\pi}{24}\right);$

$k=3$: $\quad z_3=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{25\pi}{24}+i\sin\dfrac{25\pi}{24}\right);$

$k=4$: $\quad z_4=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{33\pi}{24}+i\sin\dfrac{33\pi}{24}\right);$

$k=5$: $\quad z_5=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{41\pi}{24}+i\sin\dfrac{41\pi}{24}\right).$

б) Аналогично пункту а) для числа $z=1-7i$ находим:

$x=1, \quad y=-7 \Rightarrow |z|=\sqrt{50}, \ \varphi=\operatorname{arctg}(-7).$

Следовательно, $z=1-7i=\sqrt{50}\left[\cos(\operatorname{arctg}(-7))+i\sin(\operatorname{arctg}(-7)\right].$

По формуле Муавра

$$z_k=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{1-7i}=\sqrt[8]{50}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}(-7)+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}(-7)+2\pi k}{4}\right),$$

$k=0,1,2,3.$

В показательной форме $z_k=\sqrt[4]{1-7i}=\sqrt[8]{50}\cdot e^{i\frac{\operatorname{arctg}(-7)+2\pi k}{4}}, \quad k=0,1,2,3.$

Пример 5. Вычислить $(\sqrt{3}+i)^3 \cdot (1-i)^2$.

Решение. Воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел: $z_1 = \sqrt{3}+i \Rightarrow x = \sqrt{3},\ y = 1$. Значит, $z_1 = 2,\ \varphi = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = 1-i \Rightarrow x = 1,\ y = -1.$

Следовательно, $|z_2| = \sqrt{2},\ \varphi = -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Тогда $(\sqrt{3}+i)^3 \cdot (1-i)^2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2^3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2^4 \cdot e^0 = 16.$

Пример 6. Выяснить, будут ли ограниченными следующие последовательности:

а) $z_n = \left(\dfrac{i}{\sqrt{5}}\right)^n$; б) $z_n = \left(2-3i\right)^n$.

Решение. Учитывая, что $|z_n| = \left|\dfrac{i}{\sqrt{5}}\right|^n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$, то для любого номера $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|z_n| < 1$. Следовательно, по определению, последовательность z_n – ограничена.

Для последовательности w_n имеем: $|w_n| = \left(|2-3i|\right)^n = \left(\sqrt{13}\right)^n$. Очевидно, что для любого числа $M > 0$, каким бы большим оно не было, найдется такой номер N, что для всех номеров $n > \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $\left(\sqrt{13}\right)^n > M$. А это и означает, что последовательность w_n является неограниченной.

Пример 7. Показать, пользуясь определением предела, что число $\alpha = -3i$ является пределом последовательности $z = \dfrac{1-3ni}{n+1}$.

Решение. Согласно определению надо показать, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что неравенство $|z_n - (-3i)| = |z_n + 3i| < \varepsilon$ будет выполнено, как только $n > \mathbb{N}$.

Так как $|z_n + 3i| = \left|\dfrac{1-3ni}{n+1} + 3i\right| = \left|\dfrac{1-3ni+3ni+3i}{n+1}\right| = \left|\dfrac{1+3i}{n+1}\right| = \dfrac{\sqrt{10}}{n+1}$, то неравенство $|z_n + 3i| < \varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{\sqrt{10}}{n+1} < \varepsilon$, т. е. при $n > \dfrac{\sqrt{10}}{\varepsilon} - 1$. Поэтому в качестве числа N можно взять $N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\sqrt{10}}{n+1} - 1\right]$.

Пример 8. Доказать, что последовательность $z_n = \dfrac{(-i)^n + i^n}{3}$ является ограниченной, но при этом расходится.

Решение. Так как $z_n = \left| \dfrac{(-i)^n + i^n}{3} \right| \le \dfrac{\left|(-i)^n\right| + \left|i^n\right|}{3} = \dfrac{2}{3}$, то исходная последовательность ограничена.

Найдем z_{4n} и z_{4n+1}:

$$z_{4n} = \frac{(-i)^{4n} + i^{4n}}{3} = \frac{2}{3}, \quad z_{4n+1} = \frac{(-i)^{4n+1} + i^{4n+1}}{3} = \frac{-i+i}{3} = 0.$$

Следовательно, последовательность z_n расходится.

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-5ni}{n+2i}$.

Решение. 1-й способ. Предел будем искать как в действительном анализе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-5ni}{n+3i} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{2}{n} - 5i\right)}{n\left(1 + \frac{3i}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - 5i}{1 + \frac{3i}{n}} = -5i,$$

т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, $\lim \dfrac{3i}{n} = 0$.

2-й способ. Пусть $z_n = \dfrac{2-5ni}{n+2i}$. Найдем $x_n = \operatorname{Re} z_n$ и $y_n = \operatorname{Im} z_n$:

$$z_n = \frac{2-5ni}{n+2i} = \frac{(2-5ni)(n-2i)}{(n+2i)(n-2i)} = \frac{2n - 4i - 5n^2 i - 10n}{n^2+4} = \frac{-8n}{n^2+4} + i\,\frac{-4-5n^2}{n^2+4}.$$

Имеем: $x_n = \dfrac{-8n}{n^2+4}$, $y_n = \dfrac{-4-5n^2}{n^2+4}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-8n}{n^2+4} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4-5n^2}{n^2+4} = -5$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 - 5i = -5i$.

Пример 10. Найти предел последовательности $z_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n + in^2 \sin \dfrac{1}{n}$.

Решение. В данном случае $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$, $y_n = n^2 \sin \dfrac{1}{n^2}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin \dfrac{1}{n^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1, \text{ то } \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{e} + i.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (2+5i)^n$.

Решение. Представим число $2+5i$ в тригонометрической форме:

$$2+5i = \sqrt{29}\left(\cos \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + i \sin \operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right).$$

Тогда

$$z_n = (2+5i)^n = = \sqrt{29^n}\left(\cos n \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + i \sin n \operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{29^n} = +\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$ не существуют, то и исходный предел также не существует.

Пример 12. Определить вид множеств, заданных следующими соотношениями:

а) $\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le 2; \\ 0 \le \operatorname{Im} z < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-3i| < 2; \\ \frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |\operatorname{Im} i\, z| \le 3; \\ 0 \le \arg(z+3-2i) < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Решение:

а) Так как $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(x+iy)| = |x|$, то первому множеству системы принадлежат только те точки, которые расположены в полосе $|x| \le 2$ или $-2 \le x \le 2$.

Так как $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x+iy) = y$, то второму множеству системы принадлежат все точки полосы $0 \le y < 3$.

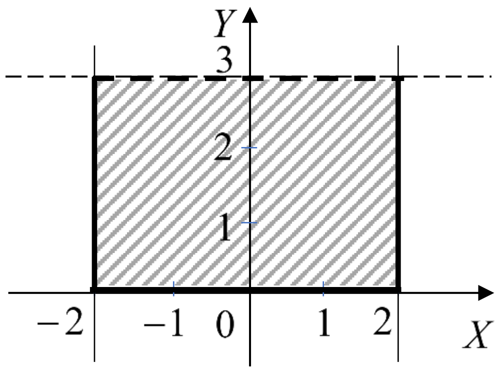

Рис. 11

Следовательно, система $\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le 2; \\ 0 \le \operatorname{Im} z < 3 \end{cases}$ описывает прямоугольник, изображенный на рис. 11.

б) Первое неравенство системы представляет собой круг с центром в точке $z_0 = 3i\,(x_0 = 0,\ y_0 = 3)$ и радиусом $R = 2$ (при этом окружность $|z - 3i| = 2$ не принадлежит искомой области). Второе неравенство $\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ – это сектор между лучами $\arg z = \frac{\pi}{3}$ и $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

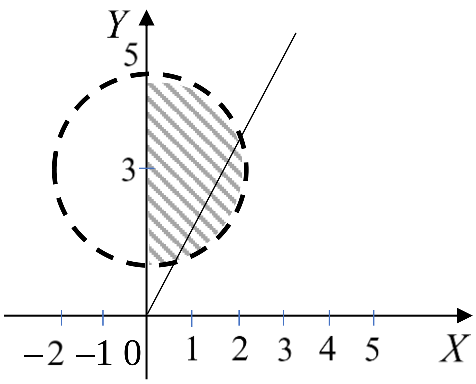

Рис. 12

Искомая область изображена на рис. 12.

в) $|\operatorname{Im} iz| = |\operatorname{Im} i\,(x + iy)| = |\operatorname{Im}(ix - y)| = |x|$.

Следовательно, множеству $|\operatorname{Im} iz| \le 3$ принадлежат все точки плоскости, расположенные внутри полосы $-3 \le x \le 3$. Комплексное число $z + 3 - 2i = z - (-3 + 2i)$ изображается вектором с началом в точке $-3 + 2i$ и концом в точке z. Угол между этим вектором и осью OX должен изменяться в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Область, соответствующая системе, изображена на рис. 13.

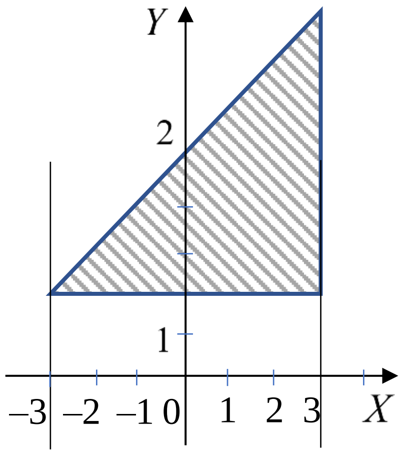

Рис. 13

Пример 13. Определить вид кривой, заданной уравнением:

а) $z = t^2 - 2t + 3 + i\,(t^2 - 2t - 4)$;

б) $z = 5e^{it} - 2e^{-it}$;

в) $z = t + 1 + i\,(t^2 - 3t + 2)$.

Решение. а) Так как $z = x + iy$, то из уравнения $z = t^2 - 2t + 3 + i\,(t^2 - 2t - 4)$ получаем параметрическое уравнение линии: $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3; \\ y = t^2 - 2t - 4. \end{cases}$

Исключим из системы параметр t, для чего вычтем из первого уравнения второе: $x - y = 7$, откуда получаем $y = x - 7$ – уравнение прямой.

б) Учитывая, что $e^{it} = \cos t + i \sin t$, а $e^{-it} = \cos t - i \sin t$, получим $z = 5(\cos t + i \sin t) - 2(\cos t - i \sin t) = 3\cos t + 7\sin t$. Следовательно, параметрическое уравнение кривой будет иметь вид $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 7\sin t. \end{cases}$ Это уравнение эллипса. Исключая параметр t, получим $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$.

в) В данном уравнении $x=t+1,\quad y=t^2-3t+2.$ Отсюда

$$\begin{cases} t=x-1; \\ y=(x-1)^2-3(x-1)+2,\ y=x^2-5x+6. \end{cases}$$

На плоскости OXY это уравнение определяет параболу.

Пример 14. Выяснить кривую, которая задана соотношениями:
а) $|z-3-2i|=|z+i|$; б) $|z-5+3i|=|z-1-i|$.

Решение. а) Представим числа в алгебраической форме:

$$z-3-2i=x+iy-3-2i=(x-3)+i(y-2);$$

$$z+i=x+iy+i=x+i(y+1).$$

Тогда исходное равенство примет вид $|(x-3)+i(y-2)|=|x+i(y+1)|$. Отсюда получаем $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$. Возводим в квадрат обе части: $(x-3)^2+(y-2)^2=x^2+(y+1)^2$ или $x^2-6x+9+y^2-4x+4=x^2+y^2+2y+1,$ $6y=-6x+12 \Rightarrow y=-x+2$ – прямая.

б) Задачу можно решать аналогично пункту а), но можно решить и геометрически, воспользовавшись геометрическим смыслом модуля $|z_2-z_1|$ как расстоянием между точками. На плоскости OXY нанесем точки $A(5;-3)$ и $B(1;1)$. Тогда условие задачи сформулируется следующим образом: найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B. Очевидно, что это множество точек определяет прямую, проходящую через середину отрезка AB и перпендикулярную этому отрезку. Запишем уравнение этой прямой. Середина отрезка AB есть точка $C(3;-1)$. Нормальный вектор искомой прямой: $\vec{\text{n}}=\overrightarrow{AB}=(-4;4)$. Тогда уравнение прямой будет иметь вид

$$-4(x-3)+4(y+1)=0,\ -x+3+y+1=0,\ y=x-4.$$

Пример 15. Определить кривую, которая задается уравнением $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{-y}{x^2+y^2}$. Отсюда $\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$, т. е. $x^2+y^2+4y=0$ или $x^2+(y+2)^2=4$ – уравнение окружности с центром в точке $O'(0;-2)$ и радиусом $R=2$.

6. Элементарные функции комплексной переменной

Пример 1. Найти действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функций:

а) $w=(\bar{z})^2-iz;$ б) $w=\dfrac{z+1}{z-i};$ в) $w=\sin(2\bar{z}).$

Решение. а) Так как $z=x+iy,\ \bar{z}=x-iy,$ то

$$w=(\bar{z})^2-iz=(x-iy)^2-i(x+iy)=x^2-2ixy+i^2y^2-ix-i^2y=$$
$$=x^2-2ixy-y^2-ix+y=(x^2-y^2+y)+i(-2xy-x).$$

Таким образом, $u(x, y)=x^2-y^2+y,\ v(x, y)=-2xy-x.$

б) $w=\dfrac{z+1}{z-i}=\dfrac{x+iy+1}{x+iy-1}=\dfrac{(x+1)+iy}{x+i(y-1)}=\dfrac{((x+1)+iy)(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}=$

$$=\frac{(x+1)x-i(x+1)(y-1)+ixy+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}=\frac{(x^2+y^2+x-y)+i(x-y+1)}{x^2+(y-1)^2},$$

т. е. $u(x, y)=\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2},\ v(x, y)=\dfrac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}.$

в) Воспользуемся формулой $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$:

$$\sin(2\bar{z})=\frac{e^{2i\bar{z}}-e^{-2i\bar{z}}}{2i}=\frac{1}{2i}(e^{2i(x-iy)}-e^{-2i(x-iy)})=\frac{1}{2i}(e^{2ix+2y}-e^{-2ix-2y})=$$
$$=\frac{1}{2i}(e^{2y}(\cos 2x+i\sin 2x)-e^{-2y}(\cos(-2x)+i\sin(-2x))=$$
$$=-\frac{i}{2}(\cos 2x(e^{2y}-e^{-2y})+i\sin 2x(e^{2y}+e^{-2y}))=-i\cos 2x\cdot\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{2}+$$
$$+\sin 2x\cdot\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}=\sin 2x\cdot \mathrm{ch}\,2y-i\cos 2x\cdot \mathrm{sh}\,2y,$$ т. е. $u(x, y)=\sin 2x\cdot \mathrm{ch}\,2y,$ $v(x, y)=-\cos 2x\cdot \mathrm{sh}\,2y.$

Пример 2. Найти значение функций $f(z)$ в точке z_0:

а) $f(z)=|z|\cdot\bar{z},\ z_0=1-i;$

б) $f(z)=\ln(iz),\ z_0=-1;$

в) $f(z)=\mathrm{ch}z,\ z_0=\ln 3+i\dfrac{\pi}{2}.$

Решение. а) Имеем: $f(1-i)=|1-i|\cdot(1+i)=\sqrt{2}\cdot(1+i)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i.$

б) Воспользуемся формулой $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, $-\pi<\arg z\le\pi$. Тогда $\ln(iz)=\ln|iz|+i\arg(iz)$, а значение функции $f(z)=\ln(iz)$ в точке $z_0=-1$ $f(-1)=\ln(-i)=\ln|-i|+i\arg(-i)$.

в) Используем формулу $\mathrm{ch}z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$. Тогда

$$f(z_0)=f\left(\ln 3+i\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{ch}\left(\ln 3+i\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\ln 3+i\frac{\pi}{2}}+e^{-\ln 3-i\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

Вычислим $e^{\ln 3+i\frac{\pi}{2}}$ и $e^{-\ln 3-i\frac{\pi}{2}}$:

$$e^{\ln 3+i\frac{\pi}{2}}=e^{\ln 3}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}=3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot(0+i)=3i;$$

$$e^{-\ln 3-i\frac{\pi}{2}}=e^{-\ln 3}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot(0-i)=-\frac{1}{3}i.$$

Окончательно получаем

$$\mathrm{ch}\left(\ln 3+i\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3i-\frac{1}{3}i}{2}=\frac{\frac{8}{3}i}{2}=\frac{4}{3}i.$$

Пример 3. Найти образ отрезка AB при отображении $w=3iz+2i$, если $A(2-i)$, $B(1+i)$.

Решение. Отображение $w=3iz+2i$ – линейное. Образом прямой при таком отображении является прямая. Учитывая, что любая прямая определяется двумя точками, достаточно найти образы концов отрезка AB. Образом точки $A(2-i)$ является точка A_1, для которой $w=3i(2-i)+2i=6i+3+2i=3+8i$, а образом точки B – точка B_1, для которой $w=3i(1+i)+2i=3i-3+2i=-3+5i$. Итак, образом отрезка AB комплексной плоскости z является отрезок A_1B_1 комплексной плоскости w, где $A_1(3+8i)$, $B_1(-3+5i)$.

Пример 4. Найти образ окружности $|z-1|=1$ при отображении $w=3iz+2i$.

Решение. Выразим z из уравнения $w=3iz+2i$: $z=\dfrac{w-2i}{3i}$, подставим полученное для z выражение в уравнение $|z-1|=1$:

$$\left|\frac{w-2i}{3i}-1\right|=1\Rightarrow|w-5i|=3.$$

Итак, образом окружности $|z-1|=1$ при отображении $w=3iz+2i$ является окружность $|w-5i|=3$ с центром в точке $O'(0;-3)$ и радиусом $R=3$.

Пример 5. Найти образ квадрата при отображении $w=z^2$, определяемого системой $\begin{cases} 0\le \operatorname{Re} z\le 1; \\ 0\le \operatorname{Im} z\le 1. \end{cases}$

Решение. Имеем: $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xy$. Отсюда $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

Система $\begin{cases} 0\le \operatorname{Re} z\le 1; \\ 0\le \operatorname{Im} z\le 1 \end{cases}$ равносильна $\begin{cases} 0\le x\le 1; \\ 0\le y\le 1. \end{cases}$

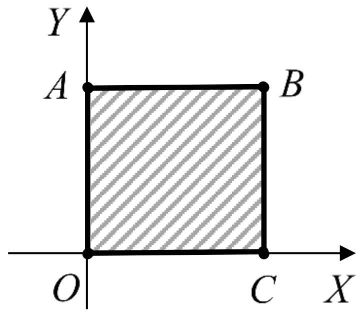

Рис. 14

Найдем образы вершин квадрата (рис. 14):

O: $x=0,\ y=0 \Rightarrow u=0,\ v=0;$

A: $x=0,\ y=1 \Rightarrow u=-1,\ v=0;$

B: $x=1,\ y=0 \Rightarrow u=0,\ v=2;$

C: $x=1,\ y=0 \Rightarrow u=1,\ v=0.$

Далее найдем образы сторон квадрата.

OA: $x=0,\ u=-y^2,\ v=0,$ т. е. $u\le 0,\ v=0$ – это отрезок OA_1 оси абсцисс Ou.

OC: $y=0,\ u=x^2,\ v=0,$ т. е. $u\ge 0,\ v=0$ – отрезок OC_1 оси абсцисс Ou.

AB: $y=1,\ u=x^2-1,\ v=2x \Rightarrow x=\frac{v}{2},\ u=\frac{v^2}{4}-1$ – часть параболы, соединяющая точки $A_1(-1;0)$ и $B_1(0;2)$.

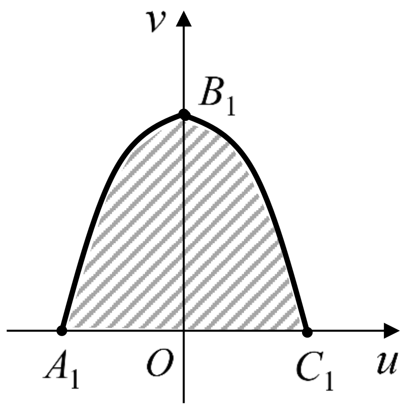

Рис. 15

CB: $x=1,\ u=1-y^2,\ v=2y$. Исключая y, получим $u=1-\frac{v^2}{4}$ – часть параболы, соединяющая точки $C_1(1;0)$ и $И_1(0;2)$.

Итак, образом квадрата $OABC$ при отображении $A_1B_1C_1$ ограниченным прямой $v=0$ и параболами $u=\frac{v^2}{4}-1$ и $u=1-\frac{v^2}{4}$, является заштрихованная область (рис. 15).

Пример 6. Найти образ полукруга $x^2+y^2=4,\ x\ge 0,$ при отображении $w=z^2$.

Решение. Запишем число z в показательной форме $z=|z|e^{i\varphi}$, где $\varphi=\arg z$, причем $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Тогда $w=z^2=|z|^2 e^{2i\varphi}=|z|^2\cdot(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)\Rightarrow$ $\Rightarrow u=|z|^2\cos 2\varphi,\ v=|z|^2\sin 2\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Исключая параметр φ, получаем $u^2+v^2=|z|^4$, где $0\le|z|\le 2$ – это уравнение окружности на плоскости w с центром в начале координат и радиусом $R=|z|^2$. Так как этот радиус изменяется от 0 до 2, то получаем $u^2+v^2\le 4$ – круг с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R=2$ на комплексной плоскости w.

Пример 7. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$ для следующих чисел:

а) e^{1-2i}; б) $-e^{-3+i}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой Эйлера:

$e^{1-2i}=e'\cdot e^{-2i}=e(\cos(-2)+i\sin(-2))=e\cdot\cos 2-ie\sin 2.$

Отсюда $\operatorname{Re} z=e\cos 2, \operatorname{Im} z=-e\sin 2.$ Далее,

$|z|=\left|e^{1-2i}\right|=\left|e^1\cdot e^{-2i}\right|=e,\ \arg z=-2.$

б) Представим z в показательной форме:

$z=-e^{-3+i}=-1\cdot e^{-3+i}=e^{\pi i}\cdot e^{-3+i}=e^{-3}\cdot e^{i(\pi+1)}.$

Тогда $|z|=e^{-3}$, $\arg z=\pi+1$, или $\arg z=-\pi+1$, т. к. $-\pi<\arg z\le\pi$. Запишем число z в тригонометрической форме: $z=-e^{-3+i}=e^{-3}\cdot e^{i(\pi+1)}=$ $=e^{-3}(\cos(\pi+1)+i\sin(\pi+1))=e^{-3}(-\cos 1-i\sin 1)=-e^{-3}\cos 1-ie^{-3}\sin 1.$ Отсюда $\operatorname{Re} z=-e^{-3}\cos 1, \operatorname{Im} z=-e^{-3}\sin 1.$

Пример 8. Найти $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$, если:

а) $f(z)=z\cdot e^{\bar z}$; б) $f(z)=\cos z$; в) $f(z)=\operatorname{sh} z$.

Решение. а) Имеем:

$z\cdot e^{\bar z}=(x+iy)e^{x-iy}=(x+iy)e^x e^{-iy}=x\cdot e^x\cdot e^{-iy}+iy\cdot e^x\cdot e^{-iy}=$ $=x\cdot e^x(\cos y-i\sin y)+iy\cdot e^x\cos y-i\sin y)=x\cdot e^x\cos y-ixe^x\sin y+iye^x\cos y+$ $+ye^x\sin y=e^x(x\cos y+y\sin y)+ie^x(y\cos y-x\sin y).$ Таким образом, $\operatorname{Re} f(z)=e^x(x\cos y+y\sin y),\ \operatorname{Im} f(z)=e^x(y\cos y-x\sin y).$

б) $\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cdot\cos iy-\sin x\cdot\sin iy=\cos x\cdot\operatorname{ch} y-\sin x\cdot i\operatorname{sh} y=$ $=\cos x\cdot\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y.$

Следовательно, $\operatorname{Re} f(z)=\cos x\cdot\operatorname{ch} y,\ \operatorname{Im} f(z)=-\sin x\cdot\operatorname{sh} y.$

в) $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\dfrac{e^{x+iy}-e^{-(x+iy)}}{2}=\dfrac{e^{x}\cdot e^{iy}-e^{-x}\cdot e^{-iy}}{2}=$

$=\dfrac{e^{x}(\cos y+i\sin y)-e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}=\dfrac{e^{x}\cos y-e^{-x}\cos y}{2}+i\dfrac{e^{x}\sin y+e^{-x}\sin y}{2}=$

$=\cos y\cdot\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}+i\sin y\cdot\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cos y\cdot\operatorname{sh}x+i\sin y\cdot\operatorname{ch}x$, поэтому $\operatorname{Re} f(z)=$ $=\cos y\cdot\operatorname{sh}x,\ \operatorname{Im} f(z)=\sin y\cdot\operatorname{ch}x.$

Пример 9. Исследовать на периодичность функцию $w=\operatorname{ch} iz$.

Решение. Функция $w=\operatorname{ch} iz$ будет периодической, если найдется такое число T, что для любого z будет выполняться условие $\operatorname{ch} i(z+T)=\operatorname{ch} iz$.

Воспользуемся определением функции $\operatorname{ch} z$: $\operatorname{ch} z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

Тогда $\operatorname{ch} iz=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, а

$$\operatorname{ch} i(z+T)=\frac{e^{i(z+T)}+e^{-i(z+T)}}{2}=\frac{e^{iz+iT}+e^{-iz-iT}}{2}=\frac{e^{iz}\cdot e^{iT}+e^{-iz}\cdot e^{-iT}}{2}.$$

Очевидно, что равенство $\operatorname{ch} i(z+T)=\operatorname{ch} i(z+T)=\operatorname{ch} iz$ будет выполнено, если число T будет удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} e^{iT}=1; \\ e^{-iT}=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos T+i\sin T=1; \\ \cos T-i\sin T=1, \end{cases} \Rightarrow T=2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Пример 10. Доказать, что $\cos(z_1-z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2+\sin z_1\sin z_2$.

Решение. Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos z_1\cdot\cos z_2+\sin z_1\sin z_2=\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}+\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2}=$$

$$=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{4}+\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{-4}=$$

$$=\frac{e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}}{2}=\cos(z_1-z_2).$$

Пример 11. Найти $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$, если:

а) $f(z)=\cos z$; б) $f(z)=\operatorname{sh} z$.

Решение. а) $f(z)=\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=$ $=\cos x\cdot\operatorname{ch}y-\sin x i\operatorname{sh}y=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y$. Следовательно,

$\operatorname{Re} f(z)= =\cos x\operatorname{ch}y,\ \ \operatorname{Im} f(z)=\sin x\operatorname{sh}y.$

б) $f(z)=\operatorname{sh} z=-i\sin iz=-i\sin(ix-y)=-i(\sin ix\cdot\cos y-\cos ix\sin y)=$
$=\operatorname{sh} z=-i(\operatorname{sh}x\cos y-\sin y\operatorname{ch}x)=\operatorname{sh}\cos y+i\sin y\operatorname{ch} x,$ поэтому

$\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{sh}x\cos y,\ \ \operatorname{Im} f(z)=\sin y\operatorname{ch}x.$

Пример 12. Найти $|f(i)|$ и $\arg f(i)$, если $f(z)=\sin 3z.$

Решение. $f(i)=\sin 3i=i\operatorname{sh}3,$ значит $\operatorname{Re} f(i)=0,\ \operatorname{Im} f(i)=\operatorname{sh}3.$ Так как $\operatorname{sh}3=\dfrac{e^3-e^{-3}}{2}>0,$ то $\operatorname{Im} f(i)>0$ и, следовательно, $|f(i)|=\operatorname{sh}3=\dfrac{e^6-1}{2},$ $\arg f(i)=\dfrac{\pi}{2}.$

Пример 13. Для числа $z=1+i$ найти значения $\ln z$ и $\operatorname{Ln} z$.

Решение. Находим $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \arg z=\dfrac{\pi}{4}.$ Для нахождения главного значения логарифма $\ln z$ воспользуемся формулой $\ln z=\ln|z|+i\arg z,$ $-\pi<\arg z\le\pi.$ Имеем: $\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\dfrac{\pi}{4}.$ $\operatorname{Ln} z$ находим по формуле $\ln z=\ln|z|+i\arg z+2\pi ki,\ k\in\mathbb{Z}.$ Следовательно, $\operatorname{Ln}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\dfrac{\pi}{4}+2\pi ki,\ k\in\mathbb{Z}.$

Пример 14. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ числа $z=\ln(-2).$

Решение. Находим модуль и аргумент числа $z_1=-2$:

$|z_1|=2,\ \arg z_1=\pi.$

Следовательно, $\ln(-2)=\ln 2+i\pi.$ Значит $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}\ln(-2)=\ln 2,$ $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}\ln(-2)=\pi;$ $|z|=|\ln(-2)|=\sqrt{\ln^2 2+\pi^2}$, $\arg z=\arg\big(\ln(-2)\big)=\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{\ln 2}.$

Пример 15. Решить уравнение $\cos z=2.$

Решение. Множество решений данного уравнения определяется равенством $z=\arccos 2.$ Известно, что $\arccos z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$ следовательно, $z=\arccos 2=-i\operatorname{Ln}\left(2+\sqrt{3}\right).$ Для числа $z_1=2+\sqrt{3}$ имеем: $|z_1|=2+\sqrt{3},$ $\arg z_1=0,$ поэтому $\operatorname{Ln}(2+\sqrt{3})=\ln(2+\sqrt{3})+i(0+2\pi k)=\ln(2+\sqrt{3})+2\pi ki,$ $a-i\operatorname{Ln}(2+\sqrt{3})=2\pi k-i\ln(2+\sqrt{3}).$

Таким образом, множество решений исходного уравнения имеет вид $z_k=2\pi k-i\ln(2+\sqrt{3}).$

Пример 16. Найти значение выражения $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{6i}.$

Решение. Общая показательная функция $f(z)=a^z$ определяется следующим образом: $a^z=e^{z\mathrm{Ln}a}$. Следовательно, $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{6i}=e^{6i\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)}$.

Найдем модуль и аргумент числа $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$:

$\left|\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right|=1,\ \arg\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$

Тогда $\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=-\frac{\pi i}{3}+2\pi ki.$

Окончательно имеем

$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{6i}=e^{6i\left(-\frac{\pi i}{3}+2\pi ki\right)}=e^{2\pi-12\pi k}.$

7. Аналитические функции

Пример 1. Доказать, что линейная функция $f(z)=az+b$, где a и b – комплексные постоянные, непрерывна во всех точках комплексной плоскости.

Решение. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и любую точку z_0 комплексной плоскости. Так как $\left|f(z)-f(z_0)\right|=\left|(az+b)-(az_0+b)\right|=\left|a(z-z_0)\right|=$ $=|a|\cdot|z-z_0|$, то в качестве $\delta=\delta(\varepsilon)$ выберем число $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$. Таким образом, из неравенства $|z-z_0|<\delta\frac{\varepsilon}{|a|}$ следует, что $\left|f(z)-f(z_0)\right|=|a|\cdot|z-z_0|<|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon,$ а это означает, что функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0. Так как точка z_0 была выбрана произвольно, то функция $f(z)=az+b$ является непрерывной на всей комплексной плоскости.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функции $w_1=\frac{4z^2-3}{3z-1}$ и $w_2=\frac{5z+2}{z^2+3}$.

Решение. Обе функции являются элементарными и, следовательно, непрерывны в области их определения. Поэтому функция $w_1=\frac{4z^2-3}{3z-1}$ непрерывна во всех точках комплексной плоскости, за исключением точки $z=\frac{1}{3}$, а функция $w_2=\frac{5z+2}{z^2+3}$ – за исключением точек $z_{1,2}=\pm\sqrt{3}\,i$.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию $w=z^3(\operatorname{Re} z)^2-iz\cdot\operatorname{Im}(z^2)$.

Решение. Выделим действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части функции:

$$w=(x+iy)^3\cdot\left(\operatorname{Re}(x+iy)\right)^2-i\,(x+iy)\cdot\operatorname{Im}(x+iy)^2=$$

$$=\left(x^3+3ix^2+3x(iy)^2+(iy)^3\right)\cdot x^2-i\,(x+iy)\cdot\operatorname{Im}(x^2+2ixy-y^2)=$$

$$=x^5+3ix^4y-3x^3y^2-ix^2y^3-i\,(x+iy)\cdot 2xy=$$

$$=x^5+3ix^4y-3x^3y^2-ix^2y^3-2i\,x^2y+2xy^2=(x^5-3x^3y^2+2xy^2)+$$

$$+i\,(3x^4y-x^2y^3-2x^2y).$$

Значит, $u(x,y)=x^5-3x^3y^2+2xy^2$, $v(x,y)=3x^4y-x^2y^3-2x^2y$.

Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны во всех точках плоскости Oxy, то и исходная функция $w=u(x,y)+iv(x,y)$ является непрерывной на всей комплексной плоскости z.

Пример 4. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{z\to 2-i}\frac{2z-4+2i}{z^2-2}$; б) $\lim\limits_{z\to 2i}\frac{z^2-5iz-6}{z-2i}$; в) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ch}iz+i\operatorname{sh}iz}{\cos 2z}$.

Решение. а) Функция $\frac{2z-4-2i}{z^2-2}$ непрерывна в точке $2-i$, поэтому

$$\lim_{z\to 2-i}\frac{2z-4+2i}{z^2-2}=\frac{2(2-i)-4+2i}{(2-i)^2-2}=\frac{4-2i-4+2i}{4-4i-1-2}=\frac{0}{1-4i}=0.$$

б) В точке $2i$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, т. е. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель дроби на множители: $z^2-5iz-6=(z-2i)(z-3i)$. Тогда

$$\lim_{z\to 2i}\frac{z^2-5iz-6}{z-2i}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)(z-3i)}{z-2i}=\lim_{z\to 2i}(z-3i)=-i.$$

в) Воспользуемся равенствами: $\operatorname{ch}iz=\cos z$, $\operatorname{sh}iz=i\sin z$. Следовательно,

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ch}iz+i\operatorname{sh}iz}{\cos 2z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos z-\sin z}{\cos 2z}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos z-\sin z}{\cos^2 z-\sin^2 z}=\frac{1}{\cos z+\sin z}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 5. Доказать, что функция $w=\cos z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости и найти ее производную.

Решение. Возьмем произвольную точку z_0 комплексной плоскости и дадим ей приращение Δz. Тогда функция $w=\cos z$ получит приращение Δw:

$$\Delta w=\cos(z_0+\Delta z)-\cos z_0=-2\sin\left(z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)\sin\frac{\Delta z}{2}.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-2\sin\left(z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)\sin\frac{\Delta z}{2}}{\Delta z}=-\lim_{\Delta z\to 0}\sin\left(z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\sin\left(z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)=-\sin z,\ \text{т. к. }\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}}=1.$$

Предел отношения существует, следовательно, исходная функция является дифференцируемой в точке z_0. Учитывая, что z_0 – произвольная точка комплексной плоскости, то функция $w=\cos z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости, причем $(\cos z)'=-\sin z$.

Пример 6. Доказать, что функция $w=z\cdot\operatorname{Re}z$ дифференцируема только в точке $z=0$. Найти ее производную в этой точке.

Решение. Так как $w=(x+iy)\cdot\operatorname{Re}(x+iy)=(x+iy)\cdot x=x^2+ixy$, то $u(x,y)=x^2$, $v(x,y)=x\cdot y$.

Находим частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=x$.

Проверяем выполнение условий Коши – Римана:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\\[4pt] \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x=x;\\ 0=-y.\end{cases}$$

Очевидно, что система имеет единственное решение: $x=0$, $y=0$. Значит, функция $w=z\cdot\operatorname{Re}z$ дифференцируема в единственной точке $z=0$. Находим производную в этой точке:

$$w'(z)\Big|_{z=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=2x\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}+iy\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=0.$$

Пример 7. Найти точки, в которых существует производная функции и вычислить производную в этих точках:

а) $f(z)=i\bar{z}$; б) $f(z)=(\bar{z})^2$; в) $f(z)=e^{3z}$.

Решение. а) Так как $f(z)=i\bar{z}=i(x-iy)=ix+y$, то $u(x,y)=y$, $v(x,y)=x$. Находим частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=1$, $\frac{\partial v}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0.$ Очевидно, что одно из условий Коши – Римана, а именно $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, не выполняется ни в одной точке, поэтому исходная функция не является дифференцируемой на всей комплексной плоскости.

б) Находим действительную и мнимую части функции:

$$f(z)=(\bar{z})^2=(x-iy)^2=x^2-2ixy-y^2=(x^2-y^2)-2ixy.$$

Имеем: $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=-2xy$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-2x$. Условия Коши – Римана выполняются только в одной точке $(0;0)$. Следовательно, функция $f(z)=(\bar{z})^2$ дифференцируема только в точке $z=0$. Находим:

$$f'(z)\Big|_{z=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=2\cdot 0+i\cdot 2\cdot 0=0.$$

в) $f(z)=e^{3z}=e^{3(x+iy)}=e^{3x}\cdot e^{3iy}=e^{3x}(\cos 3y+i\sin 3y)\Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y)=e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y)=e^{3x}\sin 3y$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3e^{3x}\cos 3y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-3e^{3x}\sin 3y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=3e^{3x}\sin 3y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=3e^{3x}\cos 3y.$$

Частные производные непрерывны на всей комплексной плоскости и удовлетворяют условиям Коши – Римана. Следовательно, функция $f(z)=e^{3z}$ дифференцируема и аналитична на всей комплексной плоскости. Находим производную:

$$f'(z)=\left(e^{3z}\right)'=3e^{3z}.$$

Пример 8. Проверить условия Коши – Римана в произвольной точке. В случае их выполнения найти производную $f'(z)$ для следующих функций:

а) $f(z)=\sin(iz)$; б) $f(z)=(z+i)e^{3z}$.

Решение. Найдем $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$f(z)=\sin(iz)=\sin i(x+iy)=\sin(ix-y)=\sin(ix)\cdot\cos y-\cos(ix)\sin y=$$

$= i\,\mathrm{sh}\,x\cos y - \mathrm{ch}\,x\sin y$. Отсюда $u(x,y) = -\mathrm{ch}\,x\sin y$, $v(x,y) = \mathrm{sh}\,x\cos y$.

Находим частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{sh}\,x\sin y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{ch}\,x\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{ch}\,x\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\mathrm{sh}\,x\sin y.$$

Так как на всей комплексной плоскости частные производные непрерывны и удовлетворяют условиям Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то функция $f(z) = \sin(iz)$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости, причем $f'(z) = \left(\sin(iz)\right)' = i\cos iz$.

б) $f(z) = (z+i)e^{3z} = \left(x + i(y+1)\right)e^{3x+3iy} = \left(x+i(y+1)\right)e^{3x}\cdot(\cos 3y + i\sin 3y) =$
$= e^{3x} = \left(x\cos 3y - (y+1)\sin 3y\right) + ie^{3x}\left((y+1)\cdot\cos 3y + x\sin 3y\right)$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\left(x\cos 3y - (y+1)\sin 3y\right) + e^{3x}\cos 3y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{3x}\left(-3x\sin 3y - \sin 3y - 3(y+1)\cos 3y\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x}\left((y+1)\cos 3y + x\sin 3y\right) + e^{3x}\sin 3y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{3x}\left(\cos 3y - 3(y+1)\sin 3y + 3x\cos 3y\right).$$

Частные производные непрерывны на всей комплексной плоскости и удовлетворяют условиям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, значит, функция $f(z) = (z+i)e^{3z}$ дифференцируема на всей комплексной плоскости z:

$$f'(z) = \left((z+i)e^{3z}\right)' = e^{3z} + 3(z+i)e^{3z} = e^{3z}\left(1 + 3(z+i)\right).$$

Пример 9. Найти угол поворота и коэффициент растяжения любой гладкой кривой в точке z_0 при отображении $f(z)$:

а) $f(z) = z^3$, $z_0 = 1 - i$; б) $f(z) = \frac{z+2i}{z-i}$, $z_0 = 2i$.

Решение. а) При отображении функции $w = f(z)$ угол поворота в точке z_0 равен аргументу производной, т. е. $\alpha = \arg f'(z_0)$, а коэффициент растяжения – модулю производной, т. е. $k = \left|f'(z_0)\right|$.

Находим производную:

$$f'(z)=3z^2, \quad f'(z_0)=f'(1-i)=3(1-i)^2=3(1-2i-1)=-6i.$$

Следовательно, $\alpha=\arg f'(z_0)=-\dfrac{\pi}{2}$, $k=\left|f'(z_0)\right|=6.$

б) Находим:

$$f'(z)=\frac{z-i-(z+2i)}{(z-i)^2}=\frac{-3i}{(z-i)^2};$$

$$f'(z_0)=f'(2i)=\frac{-3i}{(2i-i)^2}=3i.$$

Значит, $\alpha=\arg f'(z_0)=\dfrac{\pi}{2}$, $k=\left|f'(z_0)\right|=3.$

Пример 10. Найти точки, в которых коэффициент растяжения равен 1 при отображении $f(z)=z^2-4z$.

Решение. Находим $f'(z)=2z-4$, $k=\left|f'(z)\right|=1 \Rightarrow \left|2z-4\right|=1$, $2\left|z-2\right|=1$, $\left|z-2\right|=\dfrac{1}{2}$ – уравнение окружности с центром в точке $z=2$ и радиусом $\dfrac{1}{2}$.

Пример 11. Показать, что функция $\varphi(x,y)$ является гармонической на всей плоскости $\mathbb{R}^2$:

а) $\varphi(x,y)=3x^2y+5x-y^3$; б) $\varphi(x,y)=\operatorname{sh}x\cdot\cos y$.

Решение. а) Функция $\varphi(x,y)$ будет гармонической в некоторой области D, если она удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=6xy+5, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=6y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=3x^2-3y^2, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-6y.$$

Так как $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ для любой точки плоскости, то исходная функция является гармонической на всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

б) Имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\operatorname{ch}x\cos y, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\operatorname{sh}x\cos y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\operatorname{sh}x\sin y, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\operatorname{sh}x\cos y.$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ во всех точках плоскости. Следовательно, функция $\varphi(x,y)=\operatorname{sh}\cos y$ – гармоническая на всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пример 12. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x,y)=e^{-x}\sin y-y,\quad f(0)=2i$;

б) $v(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+2y$.

Решение. а) Проверим, что функция $u(x,y)$ является гармонической на всей плоскости. Для этого найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-x}\sin y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}\cos y-1,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{-x}\sin y.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ для любой точки плоскости, то функция $u(x,y)$ – гармоническая на всей плоскости. Следовательно, существует аналитическая в $\mathbb{C}$ функция $f(z)$, такая, что $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin y$, то в силу первого из условий Коши – Римана $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ имеем $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-e^{-x}\sin y$.

Интегрируя последнее равенство, находим $v(x,y)=\displaystyle\int\frac{\partial v}{\partial y}dy+\varphi(x)=$ $=e^{-x}\cos y+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция переменной x.

Воспользуемся вторым условием Коши – Римана $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^{-x}\cos y+\varphi'(x)$, то $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}\cos y-\varphi'(x)$. Но при проверке функции $u(x,y)$ на гармоничность было найдено, что $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}\cos y-1$.

Значит, $e^{-x}\cos y-\varphi'(x)=e^{-x}\cos y-1$, откуда $\varphi'(x)=1$, $\varphi(x)=x+c$. Следовательно, $v(x,y)=e^{-x}\cos y+x+c$, а искомая функция имеет вид

$$f(z)=u+iv=e^{-x}\sin y-y+i(e^{-x}\cos y+x+c)$$

или

$$f(z)=e^{-x}(\sin y+i\cos y)-y+ix+ic=e^{-x}\cdot i(\cos y-i\sin y)+i(x+iy)+ic=$$
$$=e^{-x}\cdot ie^{-iy}+i(x+iy)+ic=ie^{-z}+iz+ic=i(e^{-z}+z+c).$$

Так как $f(0)=2i$, то $2i=i(e^{0}+0+c)$, откуда $c=1$.

Окончательно получаем $f(z)=i(e^{-z}+z+1)$.

б) Находим:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=y\cdot(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+2=-\frac{x}{x^2+y^2}+2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-x(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Очевидно, что равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ выполняется, значит, функция $v(x,y)$ гармоническая.

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$, а $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, то $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{x^2+y^2}+2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2}$. Из первого равенства находим

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(y)=\int\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+2\right)dx+\varphi(y)=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+2x+\varphi(y).$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y+\varphi'(y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $\varphi'(y)=0$, $\varphi(y)=c$.

Таким образом, $u(x,y)=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+2x+c$. Искомая функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+2x+c+i\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+2y\right)$, или, переходя к переменной z, $f(z)=-\ln|z|+2z+c+i\arg\frac{1}{z}$.

8. Интегрирование ФКП

Пример 1. Вычислить $\int\limits_l \mathrm{Re}(z^2)dz,$ где l: а) отрезок прямой между точками $z_1=0$ и $z_2=1-2i$; б) ломаная *OBA*, где $O(0;0)$, $B(1;0)$, $A(1;-2)$.

Решение. а) Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $z_1=0$ и $z_2=1-2i$. Прямая проходит через начало координат, следовательно, ее уравнение имеет вид $y=kx$. Подставив в это уравнение координаты точки $z_2=(1;-2)$, получим $-2=k\cdot 1$, откуда $k=-2$.

Таким образом, уравнение прямой будет иметь вид $y=-2x$, где $0\le x\le 1$, $dy=-2dx$.

Запишем подынтегральную функцию в алгебраической форме:

$f(z)=\mathrm{Re}(z^2)=\mathrm{Re}(x+iy)^2=\mathrm{Re}(x^2+2ixy-y^2)=x^2-y^2$.

Следовательно, $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=0$.

Воспользуемся формулой $\int\limits_l f(z)dz=\int\limits_l (u+iv)(dx+idy)$.

Находим

$$\int\limits_l \mathrm{Re}(z^2)dz=\int\limits_l (x^2-y^2)(dx+idy)=\int\limits_0^1 (x^2-4x^2)(dx+i(-2dx))=$$

$$=\int\limits_0^1 (-3x^2)(dx-2idx)=-3\int\limits_0^1 x^2dx+6i\int\limits_0^1 x^2dx=-3\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+6i\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=-1+2i.$$

б) Путь интегрирования состоит из двух отрезков: OB и BA. Поэтому исходный интеграл запишем в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_l \mathrm{Re}(z^2)dz=\int\limits_{OB} \mathrm{Re}(z^2)dz+\int\limits_{BA} \mathrm{Re}(z^2)dz.$$

Вычислим каждый интеграл так же, как и в пункте а).

Функция $f(z)=\mathrm{Re}(z^2)$ в алгебраической форме запишется следующим образом:

$f(z)=\mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2$, $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=0$.

Используя формулу $\int\limits_l f(z)dz=\int\limits_l (u+iv)(dx+idy)$, получим

$$\int\limits_l \mathrm{Re}\,z^2dz=\int\limits_{OB} (x^2-y^2)(dx+idy)+\int\limits_{BA} (x^2-y^2)(dx+idy).$$

В случае отрезка OB имеем: $y=0$, $0\le x\le 1$; для отрезка BA: $x=1$, а переменная y изменяется от 0 до -2.

Следовательно,

$$\int_l \operatorname{Re}(z^2)\,dz=\int_0^1 x^2dx+\int_0^{-2}(1-y^2)\,idy=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+i\left.\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^{-2}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i.$$

Пример 2. Вычислить $\int_l \operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}(z^2)\,dz$, где $l-$ дуга параболы $y=2x^3$ от точки $z_1=-2-16i$ до точки $z_2=1+2i$.

Решение. Уравнение параболы задано в явном виде $y=2x^3$, где $x\in[-2;1]$, $dy=6x^2dx$.

Запишем функцию $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}(z^2)$ в алгебраической форме:

$$f(z)=\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}(z^2)=x\cdot\operatorname{Im}(x+iy)^2=x\cdot\operatorname{Im}(x^2+2ixy-y^2)=x\cdot 2xy=$$
$$=2x^2y\Rightarrow u(x,y)=2x^2y,\ \ v(x,y)=0.$$

Следовательно,

$$\int_l \operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}(z^2)\,dz=\int_{-2}^{1}2x^2y(dx+idy)=\int_{-2}^{1}2x^2\,2x^3\,(dx+i\cdot 6x^2dx)=$$

$$=4\cdot\left.\frac{x^6}{6}\right|_{-2}^{1}+24i\left.\frac{x^8}{8}\right|_{-2}^{1}=4\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{64}{6}\right)+24i\left(\frac{1}{8}-\frac{256}{8}\right)=-42-765i.$$

Пример 3. Вычислить $\int_l z\cdot\operatorname{Im}(z^2)\,dz$, где $l-$ дуга окружности $|z|=1$ от точки $z_1=-1$ до точки $z_2=1$.

Решение. Для вычисления интеграла в данном случае удобнее использовать формулу

$$\int_l f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt.$$

Уравнение окружности $|z|=1$ в параметрической форме имеет вид $z=e^{it}$, $t\in[0;2\pi]$. Так как интегрирование осуществляется по дуге этой окружности, заключенной между точками $z_1=-1$ и $z_2=1$, то параметр t будет изменяться от $-\pi$ до 0, т. е. $-\pi\le t\le 0$.

Находим dz: $dz=(e^{it})'dt=ie^{it}dt$. Для $z=e^{it}$ находим

$$f(z)=z\cdot\operatorname{Im}(z^2)=e^{it}\cdot\operatorname{Im}e^{2it}=e^{it}\cdot\operatorname{Im}(\cos 2t+i\sin 2t)=e^{it}\cdot\sin 2t.$$

Имеем

$$\int_l z\cdot\operatorname{Im}(z^2)\,dz=\int_{-\pi}^{0}e^{it}\cdot\sin 2t\cdot ie^{it}dt=i\int_{-\pi}^{0}e^{2it}\cdot\sin 2t\,dt=$$

$$=i\int\limits_{-\pi}^{0}(\cos 2t+i\sin 2t)\sin 2t dt=i\int\limits_{-\pi}^{0}\cos 2t\cdot\sin 2t dt-\int\limits_{-\pi}^{0}\sin^2 2t dt=$$

$$=\frac{i}{2}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin 4t dt-\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{0}(1-\cos 4t)\,dt=-\frac{i}{8}\cos 4t\,\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}=$$

$$=-\frac{i}{8}(\cos 0-\cos(-4\pi))-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{4}\sin 0-\left(-\pi-\frac{1}{4}\sin(-4\pi)\right)\right)=$$

$$=-\frac{i}{8}(1-1)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{4}\cdot 0-\left(-\pi-\frac{1}{4}\cdot 0\right)\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_{l}(z\cdot\sin z+iz^3)\,dz$ по дуге l параболы $y=-x^2+1$ от точки $z_1=i$ до точки $z_2=1$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(z)=z\sin z+iz^3$ является аналитической на всей комплексной плоскости, то интеграл от этой функции не зависит от вида кривой, соединяющей начальную и конечную точки, и может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_{l}(z\cdot\sin z+iz^3)\,dz=\int\limits_{i}^{1}(z\sin z+iz^3)\,dz=\int\limits_{i}^{1}z\sin z dz+i\int\limits_{i}^{1}z^3 dz.$$

Второй интеграл находится следующим образом:

$$\int\limits_{i}^{1}z^3 dz=\frac{z^4}{4}\Bigg|_{i}^{1}=\frac{1}{4}(1^4-i^4)=\frac{1}{4}(1-1)=0.$$

Первый интеграл вычисляется методом интегрирования по частям:

$$\int\limits_{i}^{0}z\cdot\sin z dz=\begin{bmatrix}u=z, & du=dz\\ dv=\sin z dz & v=-\cos z\end{bmatrix}=-z\cdot\cos z\,\Bigg|_{i}^{0}+\int\limits_{i}^{0}\cos z dz=$$

$$-z\cdot\cos z\Big|_{i}^{0}+\sin z\Big|_{i}^{0}=0+i\cos i+0-\sin i=i\cos i-\sin i=i\,\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}-\frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}=$$

$$=i\,\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}-\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\,\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}+i\,\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}=ie.$$

Таким образом, $\int\limits_{l}(z\cdot\sin z+iz^3)\,dz=ie.$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{l}(3z^2+\cos^2 z)\,dz$, где l – произвольная кривая, соединяющая точки $z_1=0$ и $z_2=2i$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=3z^2+\cos^2 z$ аналитична на всей комплексной плоскости, и, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования. Вычисляем его по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_{l}(3z^2+\cos^2 z)\,dz=\int\limits_{0}^{2i}(3z^2+\cos^2 z)\,dz=3\int\limits_{0}^{2i}z^2dz+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2i}(1+\cos z)=$$

$$=3\cdot\frac{z^3}{3}\Bigg|_{0}^{2i}+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)\Bigg|_{0}^{2i}=-8i+\frac{1}{2}\left(2i+\frac{1}{2}\sin 4i\right)=-7i+\frac{1}{4}\sin 4i=$$

$$=-7i+\frac{1}{4}i\,\mathrm{sh}\,4=\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}\,4-7\right)i.$$

Пример 6. Вычислить $\oint\limits_{l}\frac{l^{3z}}{z^2-4z}dz$, где l – контур, образованный кривыми $y=x^2+1$ и $y=2$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=\frac{l^{3z}}{z^2-4z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_1=0$ и $z_2=4$. Эти точки расположены вне контура l, следовательно, по интегральной теореме Коши $\oint\limits_{l}\frac{l^{3z}}{z^2-4z}dz=0.$

Пример 7. Вычислить $\oint\limits_{l}\frac{\mathrm{ch}\,iz}{z^2-5z+4}dz$, где l – окружность $|z-i|=1$.

Решение. Находим нули знаменателя – особые точки подынтегральной функции: $z^2-5z+4=0,\ (z-1)(z-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1;\\ z_2=4.\end{array}\right.$

Область, ограниченная контуром l, – это круг с центром в точке $z_0=i$ и радиусом $R=1$. Выясним, какие из особых точек лежат в этом круге. Для этого найдем расстояния от точек z_1 и z_2 до точки z_0:

$$|z_1-z_0|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}>1;$$

$$|z_2-z_0|=|4-i|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{2}17>1.$$

Таким образом, ни одна из особых точек не лежит в круге $|z-i|\le 1$, а значит, подынтегральная функция является аналитической в этом круге и в силу интегральной теоремы Коши $\oint\limits_l \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2-5z+4}=0.$

Пример 8. Вычислить $\oint\limits_l \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2-5z+4}dz$, где $l-$ окружность $|z+2i|=3.$

Решение. В круге $|z+2i|\le 3$ лежит одна особая точка подынтегральной функции $z_0=1$. Функцию $\frac{\operatorname{ch} iz}{z^2-5z+4}$ перепишем в следующем виде:

$$\frac{\operatorname{ch} iz}{z^2-5z+4}=\frac{\operatorname{ch} iz}{(z-1)(z-4)}=\frac{\frac{\operatorname{ch} iz}{z-4}}{z-1}=\frac{f(z)}{z-1},$$

где $f(z)=\frac{\operatorname{ch} iz}{z-4}-$ аналитическая функция в круге $|z+2i|\le 3$.

Применим интегральную формулу Коши $\oint\limits_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot f(z_0)$:

$$\oint\limits_l \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2-5z+4}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{\operatorname{ch} iz}{z-4}\right|_{z=1}=2\pi i\cdot\cos 1.$$

Пример 9. Вычислить $\oint\limits_l \frac{l^z}{z^3+9z}dz$, где $l-$ окружность: а) $|z|=2$; б) $|z-3i|=1$; в) $|z+1-i|=3$.

Решение. Находим особые точки подынтегральной функции:

$$z^3\,9z=0\Leftrightarrow z(z-3i)(z+3i)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_1=0; \\ z_2=3i; \\ z_3=-3i. \end{array}\right.$$

Выясним, какие из них лежат внутри круга, ограниченного соответствующей окружностью.

а) Внутри круга $|z|\le 2$ находится точка $z_1=0$. Запишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{l^z}{z^3+9z}=\frac{l^z}{z(z^2+9)}=\frac{\frac{l^z}{z^2+9}}{z}=\frac{f(z)}{z},$$

где $f(z)=\dfrac{l^z}{z^2+9}$ – аналитическая функция в этом круге. Используя интегральную формулу Коши, находим

$$\oint_l \frac{l^z}{z^3+9z}\,dz=2\pi i\cdot\left.\frac{l^z}{z^2+9}\right|_{z=0}=\frac{2}{9}\pi i.$$

б) Внутри круга $|z-3i|\le 1$ находится точка $z_2=3i$. Для этого случая подынтегральную функцию перепишем в виде

$$\frac{l^z}{z^3+9z}=\frac{l^z}{z(z-3i)(z+3i)}=\frac{\dfrac{l^z}{z+3i}}{z-3i}=\frac{f(z)}{z-3i},$$

где $f(z)=\dfrac{l^z}{z+3i}$ – функция, аналитическая в круге $|z-3i|=1$.

Вычислим интеграл:

$$\oint_l \frac{l^z}{z^3+9z}\,dz=2\pi i\cdot\left.\frac{l^z}{z+3i}\right|_{z=3i}=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{l^{3i}}{6i}=\frac{1}{3}\pi l^{3i}.$$

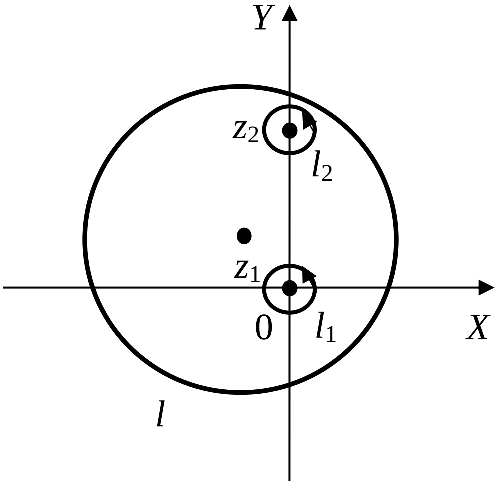

Рис. 16

в) В круг $|z+1-i|\le 3$ попадают две точки: $z_1=0$ и $z_2=3i$. Построим две окружности l_1: $|z|=r$ и l_2: $|z-3i|=r$ с центрами в точках $z_1=0$ и $z_2=3i$ достаточно малого радиуса r так, чтобы эти окружности лежали внутри круга $|z+1-i|\le 3$ и не пересекались между собой (рис. 16).

В результате получим трехсвязную область с границами l, l_1 и l_2. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint_l \frac{l^z}{z^3+9z}\,dz=\oint_{l_1}\frac{l^z}{z^3+9z}\,dz+\int_{l_2}\frac{l^z}{z^3+9z}\,dz.$$

Но очевидно, $\displaystyle\int_{l_1}\frac{l^z}{z^3+9z}\,dz$ равен интегралу $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{l^z}{z^3+9z}\,dz$, вычисленному в пункте а), т. е. $\displaystyle\int_{l_1}\frac{l^z}{z^3+9z}\,dz=\frac{2}{9}\pi i$. Второй интеграл $\displaystyle\int_{l_2}\frac{l^z}{z^3+9z}\,dz$ равен интегралу, вычисленному в пункте б), т. е. $\displaystyle\int_{l_2}\frac{l^z}{z^3+9z}\,dz=\frac{1}{3}\pi e^{3i}$.

Следовательно, $\int\limits_l \frac{l^z}{z^3+9z}dz = \frac{2}{9}\pi i + \frac{1}{3}\pi e^{3i} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}+e^{3i}\right).$

9. Нули и изолированные особые точки аналитических функций

<u>Нули функции</u>. Точка z_0 является нулем порядка (или кратности) k $(k \geq 1)$ аналитической функции $f(z)$, если выполняется одно из условий:

1) $f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0, \ldots\ f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0;$

2) разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots=\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ \ c_k \neq 0;$$

3) в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z)=(z-z_0)^k\cdot\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Нуль первого порядка $(k=1)$ называется *простым нулем*.

Если точка z_0 является нулем порядка k аналитической функции $f(z)$ и нулем порядка m аналитической функции $g(z)$, то z_0 является нулем порядка $k+m$ функции $f(z)\cdot g(z)$, нулем порядка $k-m$ (если $k>m$) функции $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z)=z^6+9z^4$ и определить их порядки.

Решение. Найдем нули функции, решив уравнение $f(z)=0$:

$$z^6+9z^4=0 \Leftrightarrow z^4(z^2+9)=0 \Leftrightarrow z^4(z-3i)(z+3i)=0.$$

Получим $z_1=0,\ z_2=3i,\ z_3=-3i.$

Поскольку $f(z)=z^4(z-3i)^1(z+3i)^1$, то согласно третьему условию, точка $z_1=0$ является нулем четвертого порядка, точки $z_2=3i$ и $z_3=-3i$ – нулями первого порядка (или простыми нулями).

Пример 2. Найти нули функции $f(z)=\cos 5z$ и определить их порядки.

Решение. Решим уравнение $f(z)=0$:

$\cos 5z=0, \Leftrightarrow 5z=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \Leftrightarrow z_n=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n,\ n\in\mathbb{Z}$ – нули функции $f(z)$. Определим порядки нулей z_n:

$$f'(z_n)=-5\sin 5z_n=-5\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=\pm 5\neq 0.$$

Следовательно, точки z_n – нули первого порядка (простые нули) функции $f(z)$.

Пример 3. Найти порядок нуля $z_0=3\pi$ для функции $f(z)=4\sin^3 z-\cos z-1.$

Решение. Вычислим значения функции и ее производных в точке z_0:

$f(3\pi)=0;$

$f'(z)=12\sin^2 z\cos z+\sin z,\ f'(3\pi)=0;$

$f''(z)=24\sin z\cos^2 z-12\sin^3 z+\cos z,\ f''(3\pi)=-1\neq 0.$

Следовательно, точка $z_0=3\pi$ – нуль второго порядка функции $f(z)$.

Пример 4. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функции $f(z)=(z^5+2z^4+3z^3)(1-\cos z)^3$.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)$, используя разложение $\cos z$ в ряд Тейлора:

$$f(z)=(z^5+2z^4+3z^3)(1-\cos z)^3=z^3(z^2+2z+3)\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)\right)^3=$$

$$=z^9\cdot(z^2+2z+3)\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+...\right)^3.$$

Положим $\varphi(z)=(z^2+2z+3)\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+...\right)^3$.

Тогда $f(z)=z^9\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=\frac{3}{2}\neq 0.$ Следовательно, $z_0=0$ – нуль девятого порядка функции $f(z)$.

Пример 5. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функции $f(z)=\sin^3 z\cdot(e^{z^2}-1)^4$.

Решение. Обозначим $\varphi_1(z)=\sin z,\ \varphi_2(z)=e^{z^2}-1.$

Тогда $f(z)=\varphi_1^3(z)\cdot\varphi_2^4(z).$

Так как $\varphi_1(z)=\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+...$ и $\varphi_2(z)=e^{z^2}-1=z^2+\frac{z^4}{2!}+...,$ то точка

$z_0 = 0$ является нулем первого порядка для функции $\varphi_1(z)$ и нулем второго порядка для функции $\varphi_2(z)$. Следовательно, точка $z_0 = 0$ – это нуль третьего порядка $(k_1 = 3)$ для функции $\varphi_1^3(z)$ и нуль восьмого порядка $(k_2 = 8)$ для функции $\varphi_2^4(z)$. Значит, для функции $f(z) = \varphi_1^3(z)\cdot\varphi_2^4(z)$ точка $z_0 = 0$ является нулем одиннадцатого порядка $(k = k_1 + k_2 = 3+8 = 11)$.

Пример 6. Найти порядок нуля $z_0 = \dfrac{3}{2}$ для функции $f(z) = \dfrac{\cos^4 \pi z}{(4z^2-9)(z^2+1)}$.

Решение. Обозначим $\varphi_1(z) = \cos^4 \pi z$, $\varphi_2(z) = (4z^2-9)(z^2+1)$.

Тогда $f(z) = \dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$.

Поскольку точка $z_0 = \dfrac{3}{2}$ является нулем первого порядка для функции $\cos \pi z$ (т. к. $\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$; $(\cos \pi z)'\Big|_{z=\frac{3}{2}} = -\pi\cdot\sin\dfrac{3\pi}{2} = \pi \neq 0$), то она является нулем четвертого порядка $(k_1 = 4)$ для функции $\varphi_1(z) = \cos^4 \pi z$.

Для функции $\varphi_2(z) = 4\left(z-\dfrac{3}{2}\right)\left(z+\dfrac{3}{2}\right)\left(z^2+1\right)$ точка $z_0 = \dfrac{3}{2}$ является нулем первого порядка $(k_2 = 1)$.

Следовательно, точка $z_0 = \dfrac{3}{2}$ является нулем третьего порядка $(k = k_1 - k_2 = 4-1 = 3)$ для функции $f(z) = \dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$.

Пример 7. Найти порядок нуля z_0 функции $h(z) = af(z) + bg(z)$, где $ab \neq 0$, если известно, что точка z_0 является нулем порядка k для функции $f(z)$ и нулем порядка m для функции $g(z)$, причем $k > m$.

Решение. Учитывая условие, представим функции $f(z)$ и $g(z)$ следующим образом:

$f(z) = (z-z_0)^k \cdot \varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z_0) \neq 0$;

$g(z) = (z-z_0)^m \cdot \varphi_2(z)$, где $\varphi_2(z_0) \neq 0$;

$\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ – аналитические в точке z_0 функции.

Тогда $h(z)=a\,(z-z_0)^k\cdot\varphi_1(z)+b\,(z-z_0)^m\cdot\varphi_2(z)=$
$=(z-z_0)^m\left(a(z-z_0)^{k-m}\varphi_1(z)+b\varphi_2(z)\right).$

Обозначим $\varphi(z)=a(z-z_0)^{k-m}\varphi_1(z)+b\varphi_2(z).$

Очевидно, функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке z_0 $(k-m>0)$, причем $\varphi(z_0)=b\varphi_2(z_0)\neq 0.$

Таким образом, для функции $h(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ точка z_0 является нулем порядка m.

<u>Изолированные особые точки</u>. Точка $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если функция $f(z)$ аналитична всюду в некоторой окрестности точки z_0, кроме самой этой точки.

Изолированная особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется:

1) *устранимой особой точкой*, если предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и конечен;

2) *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

3) *существенно особой точкой*, если предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Для того чтобы точка z_0 являлась *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержало главной части, т. е.:

а) если z_0 – конечная точка, то

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots;$$

б) если $z_0=\infty$, то $f(z)=c_0+\dfrac{c_1}{z}+\dfrac{c_2}{z^2}+\ldots+\dfrac{c_n}{z^n}+\ldots$.

Для того чтобы точка z_0 являлась *полюсом порядка* k $(k\geq 1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

1) точка z_0 является нулем порядка k для функции $h(z)=\dfrac{1}{f(z)}$;

2) функция $f(z)$ может быть представлена в виде:

а) если z_0 – конечная точка, то $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$;

б) если $z_0=\infty$, то $f(z)=z^k\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке $z=\infty$, $\varphi(\infty)\neq 0$.

3) главная часть разложения функции $\varphi(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит конечное число членов и имеет следующий вид:

а) если z_0 – конечная точка, то $f(z)=\dfrac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\dfrac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, $c_{-k}\neq 0$;

б) если $z_0=\infty$, то $f(z)=c_k z^k+\ldots+c_1 z+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_{-n}}{z^n}$, $c_k\neq 0$.

Для того чтобы точка z_0 являлась существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ее разложения в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержала бесконечное число членов, т. е. если z_0 – конечная точка, то бесконечное число отрицательных степеней – $z-z_0$, а если $z_0=\infty$, то бесконечное число положительных степеней – z.

Пример 8. Определить тип особой точки $z_0=0$ для функции $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z}$.

Решение. Функция $f(z)$ аналитична при $0<|z|<\infty$. Вычислим предел:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(2z-\frac{(2z)^2}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-\ldots\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(2-\frac{4z}{3!}+\frac{2^5z^4}{5!}-\ldots\right)=2.$$

Предел существует и конечен, следовательно, $z_0=0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$.

Пример 9. Определить тип особой точки $z_0=3$ для функции $f(z)=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z-3}}$.

Решение. Точка $z_0=3$ является особой. Чтобы определить ее тип, рассмотрим все особые точки данной функции. Решив уравнение $\cos\dfrac{1}{z-3}=0$, получим точки $z_k=3+\dfrac{2}{\pi+2\pi k}$.

Очевидно, $\lim\limits_{z\to z_k} f(z)=\lim\limits_{z\to 3+\frac{2}{\pi+2\pi k}} \dfrac{1}{\cos\frac{1}{z-3}}=\infty$, т. е. точки z_k являются полюсами.

Вычислим предел последовательности точек z_k при $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty} z_k=\lim_{k\to\infty}\left(3+\frac{2}{\pi+2\pi k}\right)=3=z_0.$$

Итак, в любой окрестности точки $z_0=3$ имеются другие особые точки, следовательно, точка $z_0=3$ является неизолированной особой точкой.

Пример 10. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}2z-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $h(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}{\operatorname{ch}2z-1}$.

Точка $z=0$ является нулем пятого порядка для числителя $\varphi_1(z)=\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}$, т. к.

$$\varphi_1(z)=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)-z+\frac{z^3}{6}=\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots.$$

Точка $z=0$ является нулем второго порядка для знаменателя $\varphi_2(z)=\operatorname{ch}2z-1$, т. к.

$\varphi_2(0)=0,\ \varphi_2'(0)=2\operatorname{sh}(2\cdot 0)=0,\ \varphi''(0)=4\operatorname{ch}(2\cdot 0)=4\neq 0.$

Таким образом, точка $z=0$ является нулем порядка $5-2=3$ для функции $h(z)=\dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$.

Следовательно, точка $z=0$ является полюсом третьего порядка для функции $f(z)$.

Пример 11. Найти конечные особые точки и определить их типы для функции $f(z)=\dfrac{\cos 3z}{(4z^2-\pi^2)(z^2+2)}$.

Решение. Числитель данной функции определен для всех $z\in\mathbb{C}$, поэтому ее конечными особыми точками являются корни знаменателя: $z=\pm\dfrac{\pi}{2}$, $z=\pm i\sqrt{2}$.

Рассмотрим точку $z=\dfrac{\pi}{2}$.

Вычислим предел:

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3z}{(2z-\pi)(2z+\pi)(z^2+2)}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3z}{(2z-\pi)\cdot 2\pi\left(\frac{\pi^2}{4}+2\right)}=$$

$$=\frac{2}{\pi(\pi^2+8)}\cdot\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos 3z)'}{(2z-\pi)'}=\frac{2}{\pi(\pi^2+8)}\cdot\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3z}{2}=\frac{2}{\pi(\pi^2+8)}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{\pi(\pi^2+8)}.$$

Таким образом, точка $z=\frac{\pi}{2}$ является устранимой особой точкой.

Аналогично точка $z=-\frac{\pi}{2}$ тоже является устранимой особой точкой.

Рассмотрим точки $z=\pm i\sqrt{2}$. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{\cos 3z}{(4z^2-\pi^2)(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})}.$$

Так как точки $z=\pm i\sqrt{2}$ являются нулями первого порядка для функции $h(z)=\frac{1}{f(z)}$, то они являются полюсами первого порядка (простыми полюсами) для функции $f(z)$.

Пример 12. Найти конечные особые точки и определить их характер для функции $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{e^z-1}$.

Решение. Конечными особыми точками функции $f(z)$ является точка $z=0$ и корни знаменателя $z=2\pi ki,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Рассмотрим точки $z_k=2\pi ki,\ k\neq 0.$ Так как для числителя функции $f(z)$ эти точки не являются особыми, а для знаменателя выполняются условия $(e^z-1)\Big|_{z=2\pi ki}=0,\ (e^z-1)'\Big|_{z=2\pi ki}=e^{2\pi ki}=1\neq 0,$ то точки $z_k=2\pi ki,\ k\neq 0,$ являются простыми полюсами.

Рассмотрим точку $z=0$. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{e^z-1}=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots}=\frac{1}{z\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)}\cdot e^{\frac{1}{z}}=$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+..}\cdot\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+...\right)=\varphi(z)\cdot h(z),$$

где $\varphi(z)=\dfrac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...}$ – аналитическая функция в точке $z=0$, причем $\varphi(0)=1\neq 0$;

$$h(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^4}+...\,.$$

Так как $\varphi(0)\neq 0$ и разложение $h(z)$ содержит бесконечное число отрицательных степеней z, то точка $z=0$ является существенно особой для функции $f(z)$.

Пример 13. Определить характер особой точки $z=\infty$ для функции $f(z)=\dfrac{2z^4-z^3}{z+1}$.

Решение. Характер особой точки $z=\infty$ для функции $f(z)$ совпадает с характером особой точки $\xi=0$ для функции $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$.

Рассмотрим функцию $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{\xi}\right)^4-\left(\frac{1}{\xi}\right)^3}{\frac{1}{\xi}+1}=\frac{1}{\xi^3}\cdot\frac{2-\xi}{\xi+1}.$$

Для функции $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ точка $\xi=0$ является полюсом третьего порядка. Следовательно, точка $z=\infty$ является полюсом третьего порядка для функции $f(z)$.

Пример 14. Определить характер особой точки $z=\infty$ для следующей функции:

$$f(z)=z^5+\frac{3z^8-2z^9+4}{2z^4+1}+\cos\frac{5iz+1}{3iz+2}.$$

Решение. Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z)=g(z)+h(z)$, где $g(z)=z^5+\dfrac{3z^8-2z^9+4}{2z^4+1}=\dfrac{3z^8+z^5+4}{2z^4+1}$, $h(z)=\cos\dfrac{5iz+1}{3iz+2}$.

Для функции $g(z)$ точка $z=\infty$ является полюсом четвертого порядка, т. к. $g(z)=z^4\cdot\dfrac{3+\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{4}{z^8}}{2+\dfrac{1}{z^4}}=z^4\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в точке $z=\infty$, $\varphi(\infty)=\dfrac{3}{2}$.

Для функции $h(z)$ точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой, т. к. $\lim\limits_{z\to\infty}h(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\cos\dfrac{5iz+1}{3iz+2}=\lim\limits_{z\to\infty}\cos\dfrac{5i+\dfrac{1}{z}}{3i+\dfrac{2}{z}}=\cos\dfrac{5}{3}$.

Таким образом, для функции $f(z)=g(z)+h(z)$ точка $z=\infty$ является полюсом четвертого порядка.

Дополнительные задачи

1. Найти все нули функции $f(z)=(z^4+2z^2+1)(z^2-2z+2)$ и определить их порядок.

Ответ: $\pm i$ – нули второго порядка; $z=1\pm i$ – простые нули.

2. Для функции $f(z)=(e^{z^2}-1-z^2)^2\cdot\sin^3 z$ определить порядок нуля в точке $z_0=0$.

Ответ: 11.

3. Для функции $f(z)=\dfrac{\sin z^4-z^4}{\operatorname{sh}z-z-\dfrac{z^3}{6}}$ определить порядок нуля в точке $z_0=0$.

Ответ: 7.

4. Для следующих функций определить порядок нулей в указанных точках:

а) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z(z+\pi)}$, $z=-\pi$; б) $f(z)=\dfrac{1}{z^6}-\dfrac{z^2+z+1}{z^8}$, $z=\infty$;

в) $f(z)=(e^z-1)^2-\sin^2 z$, $z=0$.

Ответ: а) нуль первого порядка; б) нуль седьмого порядка; в) нуль третьего порядка.

5. Для функции $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}5z-1}{e^{2}-1-z}$ определить тип особой точки $z=0$.

Ответ: устранимая особая точка.

6. Для функции $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$ найти конечные особые точки и определить их тип.

Ответ: $z=0$ – полюс второго порядка; $z=\pi k$ $(k\neq 0)$ – полюс первого порядка.

7. Для функции $f(z)=\dfrac{\sin 2\pi z}{z^{4}-1}e^{\frac{1}{z}}$ найти конечные особые точки и определить их тип.

Ответ: $z=0$ – существенно особая точка; $z=\pm 1$ – устранимые особые точки; $z=\pm i$ – простые полюсы.

8. Для функции $f(z)=z^{7}-\dfrac{z^{11}+5z^{7}-2z}{z^{4}+5}+e^{\frac{iz+3}{2z-4}}$ определить характер бесконечно удаленной точки.

Ответ: устранимая особая точка.

10. Вычеты. Приложения вычетов

__**Вычет функции в конечной точке**__. Вычет функции $f(z)$ в конечной изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} в ее разложении в ряд Лорана в окрестности точки $z=z_0$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}.$$

Другие обозначения вычета: $\operatorname{res} f(z_0)$, $\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]$.

Имеет место равенство

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz,$$

где γ – любая замкнутая кривая, окружающая точку z_0, внутри которой нет других особых точек функции $f(z)$, и проходимая в положительном направлении (против часовой стрелки).

Если z_0 – *устранимая особая точка* или *точка аналитичности* функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=0.$$

Если z_0 – *полюс порядка* m функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^m\right)^{(m-1)}.$$

Если z_0 – *полюс порядка* m функции $f(z)$ и функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\varphi^{(m-1)}(z_0).$$

Если z_0 – *простой полюс* (полюс первого порядка) функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0).$$

Если z_0 – *простой полюс* функции $f(z)$ и функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Пример 1. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{\sin^4 2z}{z^2(\cos z-1)}$ в точке $z_0=0$.

Решение. Точка $z_0=0$ является особой точкой функции $f(z)$. Определим ее характер. Вычислим

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin^4 2z}{z^2(\cos z-1)}=\begin{bmatrix}\sin 2z\sim 2z,\ z\to 0\\ \cos z-1\sim -\frac{1}{2}z^2,\ z\to 0\end{bmatrix}=\lim_{z\to 0}\frac{(2z)^4}{z^2\cdot\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}=-32.$$

Точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой. Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0.$

Пример 2. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2-2z-8}$ в ее конечных особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются корни знаменателя $z_1=-2$ и $z_2=4$. Так как $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z+2)(z-4)}$, то $z_1=-2$ и $z_2=4$ – простые полюсы.

Найдем вычет функции $f(z)$ в точке $z_1=-2$:

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z)=\lim_{z\to-2} f(z)(z+2)=\lim_{z\to-2}\frac{2z+3}{z-4}=\frac{1}{6}.$$

Найдем вычет функции $f(z)$ в точке $z_2=4$ другим способом. Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z)=\dfrac{(2z+3)/(z+2)}{z-4}=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)=\dfrac{2z+3}{z+2}$, $\psi(z)=z-4$, причем $\varphi(z_2)=\varphi(4)=\dfrac{11}{6}\neq 0$; $\psi(z_2)=\psi(4)=0$, $\psi'(z_2)=1\neq 0$.

Тогда $\operatorname*{res}_{z=4} f(z)=\operatorname*{res}_{z=4}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\varphi(4)}{\psi'(4)}=\dfrac{11}{6}$.

Пример 3. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{4z-1}{z\cdot\sin 5z}$ в точке $z=0$.

Решение. Точка $z_0=0$ является полюсом второго порядка данной функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot f(z)\right)^{(2-1)}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{4z^2-z}{\sin 5z}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(8z-1)\sin 5z-(4z^2-z)\cdot 5\cos 5z}{\sin^2 5z}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(8z-1)\left(5z-\dfrac{(5z)^3}{3!}+o(z^3)\right)-(20z^2-5z)\left(1-\dfrac{(5z)^2}{2!}+o(z^2)\right)}{25z^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{40z^2-5z+o(z^3)-20z^2+5z+o(z^3)}{25z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{20z^2+o(z^3)}{25z^2}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.$$

Пример 4. Найти вычет функции $f(z)=(2z^2+3z-1)\cdot\sin\dfrac{1}{z}$ в ее конечной особой точке.

Решение. Конечной особой точкой данной функции является точка $z=0$. Определим ее характер, разложив функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$f(z)=(2z^2+3z-1)\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=$$

$$=2z+3-\frac{1}{z}-\frac{2}{3!z}-\frac{3}{3!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{2}{5!z^3}+\frac{3}{5!z^4}-\frac{1}{5!z^5}-\ldots=$$

$$=2z+3-\left(1+\frac{2}{3!}\right)\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}+\left(\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}\right)\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{3}{5!z^4}-\ldots .$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, следовательно, точка $z=0$ – существенно особая точка функции $f(z)$.

Тогда $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=c_{-1}=-\left(1+\frac{2}{3!}\right)=-\frac{4}{3}.$

<u>Вычет функции в бесконечно удаленной точке</u>. Вычет аналитической в некоторой окрестности точки $z=\infty$ функции $f(z)$ в этой точке $z=\infty$ равен коэффициенту при $\frac{1}{z}$ в ее разложении в ряд Лорана, взятому со знаком минус:

$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}.$

Имеет место равенство $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^-} f(z)dz,$ где γ^- – окружность $|z|=R$ достаточно большого радиуса, проходимая в отрицательном направлении (по часовой стрелке), причем все конечные особые точки функции $f(z)$ находятся в области $|z|<R.$

В отличие от конечной точки, если $z=\infty$ – точка аналитичности или устранимая особая точка функции $f(z)$, то вычет в ней может быть отличен от нуля.

Если $z=\infty$ – нуль порядка k функции $f(z)$, то $f(z)\sim\frac{c_{-k}}{z^k}$ при $z\to\infty$. При этом, если $k\geq 2,$ то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0.$

Пример 5. Найти вычет функции $f(z)=\frac{z^3}{z^4+2}\cdot\sin\frac{3}{z}$ в точке $z=\infty$.

Решение. Функция $f(z)$ является аналитической в области $|z|>\sqrt[4]{2}.$

Так как $\frac{z^3}{z^4+2}\sim\frac{1}{z},$ $\sin\frac{3}{z}\sim\frac{3}{z}$ при $z\to\infty$, то $f(z)\sim\frac{1}{z}\cdot\frac{3}{z}=\frac{3}{z^2}$ при $z\to\infty,$ т. е. $z=\infty$ является нулем второго порядка функции $f(z)$. Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0.$

Пример 6. Найти вычет функции $f(z)=z\cos\frac{1}{z}$ в точке $z=\infty$.

Решение. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$:

$$f(z)=z\cos\frac{1}{z}=z\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=z-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4!z^3}-\frac{1}{6!z^5}+\ldots.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$

Пример 7. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z^{14}}{z^5+3}$ в точке $z=\infty$.

Решение. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$:

$$f(z)=\frac{z^{14}}{z^5+3}=\frac{z^{14}}{z^5\left(1+\dfrac{3}{z^5}\right)}=z^9\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{z^5}}=z^9\left(1-\frac{3}{z^5}+\left(\frac{3}{z^5}\right)^2-\left(\frac{3}{z^5}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=z^9-3z^4+\frac{9}{z}-\frac{27}{z^6}+\ldots.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-9.$

Вычисление интегралов от аналитических функций

Основная теорема о вычетах. Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду внутри области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и непрерывной вплоть до ее границы L (простой замкнутой спрямляемой кривой), тогда

$$\oint\limits_L f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z).$$

Теорема о полной сумме вычетов. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=3}\frac{z^2+5}{z^3-9z}\,dz.$

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{z^2+5}{z^3-9z}=\dfrac{z^2+5}{z(z-3)(z+3)}$ аналитична всюду внутри контура интегрирования $|z+2|=3$, за исключением точек $z=-3$ и $z=0$ (рис. 17).

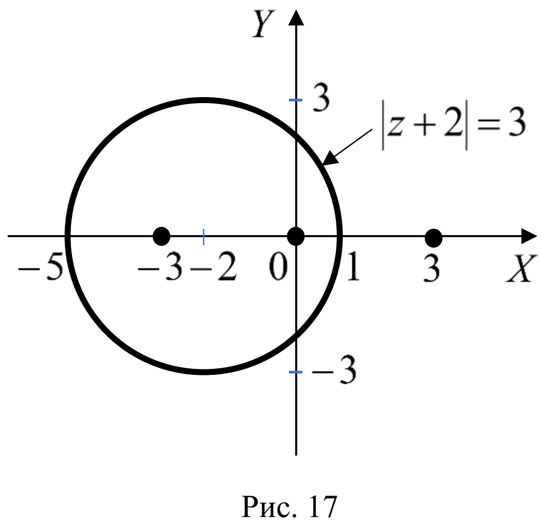

Рис. 17

Тогда по основной теореме о вычетах

$$\int\limits_{|z+2|=3}\frac{z^2+5}{z^3-9z}\,dz=2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=-3} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)\right).$$

Точки $z=-3$ и $z=0$ являются простыми полюсами функции $f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to-3} f(z)(z+3) = \lim_{z\to-3} \frac{z^2+5}{z(z-3)} = \frac{7}{9};$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to0} z\, f(z) = \lim_{z\to0} \frac{z^2+5}{z^2-9} = -\frac{5}{9}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|z+2|=3} \frac{z^2+5}{z^3-9z}\,dz = 2\pi i\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{9}\right) = \frac{4\pi i}{9}.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz.$

Решение. В круге $|z-1|\le 2$ подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z\cos z}$ имеет две особые точки $z=0$ и $z=\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 18).

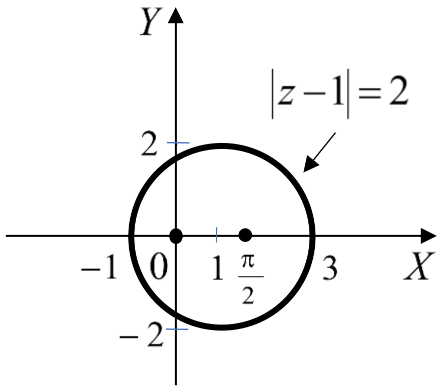

Рис. 18

Точка $z=0$ является устранимой особой точкой, т. к.

$$\lim_{z\to0} f(z) = \lim_{z\to0} \frac{\sin^2 z}{z\cos z} = \lim_{z\to0} \frac{\sin z}{\cos z} = 0.$$

Поэтому $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0.$

Точка $z=\dfrac{\pi}{2}$ является простым полюсом.

Действительно, $f(z)=\dfrac{\sin^2 z/z}{\cos z}=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}\ne 0$, $\psi(z)=\cos z$, $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$; $\psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1\ne 0.$

Тогда $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \dfrac{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\psi'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{2/\pi}{-1} = -\dfrac{2}{\pi}.$

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz = 2\pi i\left(0-\frac{2}{\pi}\right) = 4i.$

Пример 10. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} (z^2+z-6)e^{\frac{1}{z-2}}dz$.

Решение. Внутри контура интегрирования (рис. 19) находится единственная конечная особая точка $z=2$ подынтегральной функции

$$f(z)=(z^2+z-6)e^{\frac{1}{z-2}}.$$

Тогда по основной теореме о вычетах

$$\oint\limits_{|z|=3} (z^2+z-6)e^{\frac{1}{z-2}}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2} f(z).$$

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=2$:

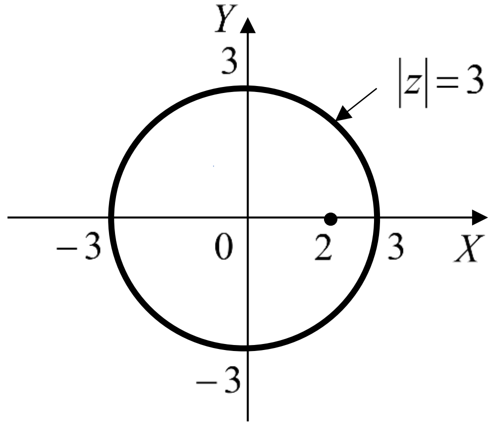

Рис. 19

$$f(z)=(z^2+z-6)e^{\frac{1}{z-2}}=(z-2)(z+3)e^{\frac{1}{z-2}}=$$

$$=(z-2)\big((z-2)+5\big)e^{\frac{1}{z-2}}=$$

$$=\Big((z-2)^2+5(z-2)\Big)\left(1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{3!(z-2)^3}+\ldots\right)=$$

$$=(z-2)^2+5(z-2)+(z-2)+5+\frac{1}{2!}+\frac{5}{2!(z-2)}+\frac{1}{3!(z-2)}+\frac{5}{3!(z-2)^2}+\ldots.$$

Отсюда следует, что $z=2$ – существенно особая точка, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z)=c_{-1}=\frac{5}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{8}{3};$$

$$\oint\limits_{|z|=3} (z^2+z-6)e^{\frac{1}{z-2}}dz=2\pi i\cdot\frac{8}{3}=\frac{16\pi i}{3}.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^{21}}{(z^3+1)^4(z^2+4)^5}\,dz$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{z^{21}}{(z^3+1)^4(z^2+4)^5}$ имеет пять особых точек: -1, $\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (четырехкратные полюсы) и $\pm 2i$ (пятикратные полюсы). Все они находятся внутри контура интегрирования (рис. 20), поэтому применение основной теоремы о вычетах приведет к громоздким вычислениям.

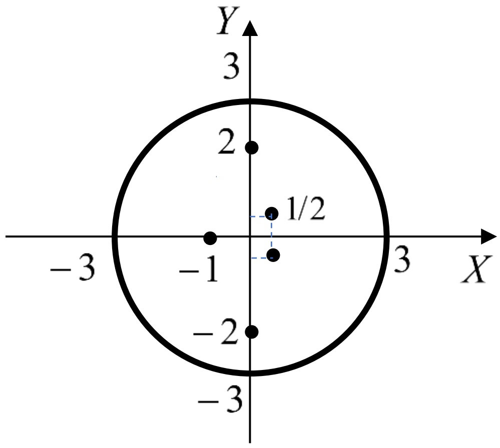

Рис. 20

Воспользуемся теоремой о полной сумме вычетов:

$$\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0.$$

Тогда $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^{21}}{(z^3+1)^4(z^2+4)^5}\,dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)=-2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$

Найдем вычет функции $f(z)$ в бесконечности. Так как

$$f(z)=\frac{z^{21}}{(z^3+1)^4(z^2+4)^5}=\frac{z^{21}}{z^{12}\left(1+\dfrac{1}{z^3}\right)^4\cdot z^{10}\cdot\left(1+\dfrac{4}{z^2}\right)^5}=$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{z^3}\right)^4\left(1+\dfrac{4}{z^2}\right)^5}\sim\frac{1}{z}=\frac{c_{-1}}{z},\quad z\to\infty,\ \text{то}\ \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-1.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^{21}}{(z^3+1)^4(z^2+4)^5}\,dz=-2\pi i\cdot(-1)=2\pi i.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\mathbf{I}=\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{\exp\left(\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z+1}\right)}{z-5}\,dz.$

Решение. Конечными особыми точками подынтегральной функции $f(z)=\dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z+1}\right)}{z-5}$ являются точки $z=-1,\ z=2,\ z=5$ (рис. 21).

Точки $z=-1$ и $z=2$ находятся внутри контура интегрирования. Тогда по основной теореме о вычетах и теореме о полной сумме вычетов имеем

$$\mathbf{I}=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=2} f(z)\right)=$$

$$=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=5} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right).$$

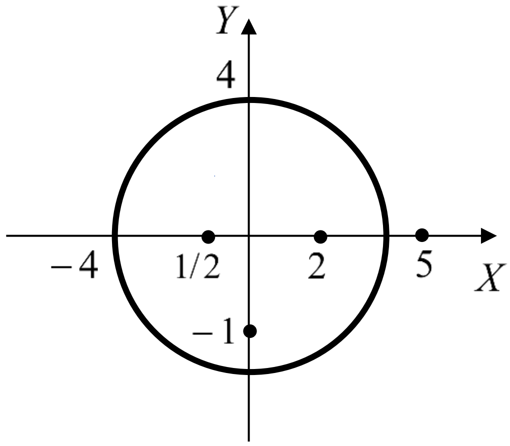

Рис. 21

Воспользуемся последним равенством, т. к. вычеты в точках $z=5$ и $z=\infty$ найти проще, чем в точках $z=-1$ и $z=2$.

Точка $z=5$ является простым полюсом функции $f(z)$, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=5} f(z)=\exp\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+1}\right)\Bigg|_{z=5}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Найдем вычет функции $f(z)$ в бесконечности.

Так как

$$f(z)=\frac{\exp\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+1}\right)}{z\left(1-\frac{5}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\exp\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+1}\right)}{1-\frac{5}{z}}\sim\frac{1}{z}\cdot\frac{\exp(0+0)}{1-0}=\frac{1}{z}=\frac{c_{-1}}{z}$$

при $z\to\infty$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-1$.

Следовательно, $\mathbf{I}=-2\pi i\left(\sqrt{e}-1\right)=2\pi\left(1-\sqrt{e}\right)i$.

<u>Вычисление определенных интегралов</u>. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} R(\cos x,\sin x)\,dx,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},$ где $\mathbb{R}$ – рациональная функция переменных $\cos x$ и $\sin x$, непрерывная при $x\in[\alpha;\alpha+2\pi]$, с помощью замены переменной $z=e^{ix}$ (тогда $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\dfrac{z^2+1}{2z}$; $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\dfrac{z^2-1}{2iz}$; $dx=\dfrac{dz}{iz}$, $\alpha\le x\le\alpha+2\pi\to|z|=1$) сводится к вычислению интеграла от рациональной функции комплексной переменной z по окружности $|z|=1$:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\cdot\frac{1}{iz}\,dz = \int\limits_{|z|=1} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{|z_k|<1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Пример 13. Вычислить с помощью вычетов интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\sin x}$.

Решение. Произведем замену переменной по формуле $z = e^{ix}$.

Тогда $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{z^2-1}{2iz}$;

$dz = ie^{ix}dx = izdx, \Rightarrow x = \dfrac{dz}{iz}$; $\quad 0 \le x \le 2\pi \ \to \ |z| = 1.$

Получим $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\sin x} = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{3+2\,\dfrac{z^2-1}{2iz}} \cdot \frac{dz}{iz} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+3iz-1}.$

Особыми точками подынтегральной функции являются корни знаменателя $z_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}i$ и $z_2 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}i$. Это простые полюсы. Внутри контура интегрирования находится только точка z_1. Найдем вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2+3iz-1} = \dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$ в точке z_1:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{1}{z-z_2}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}\,i}.$$

Тогда $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\sin x} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{5}\,i} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$

Пример 14. Вычислить с помощью вычетов интеграл $\int\limits_{\pi}^{3\pi} \frac{\cos x}{(5-4\cos x)^2}\,dx$.

Решение. Произведем замену переменной $z = e^{ix}$. Тогда

$\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$; $\ dx = \dfrac{dz}{iz}$; $\quad \pi \le x \le 3\pi \ \to \ |z| = 1.$

Получим

$$\int\limits_{\pi}^{3\pi} \frac{\cos x}{(5-4\cos x)^2}\,dx = \int\limits_{|z|=1} \frac{\dfrac{z^2+1}{2z}}{\left(5-4\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i} \int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2}\,dz.$$

Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2}$ имеет две особые точки $z_1=\dfrac{1}{2}$ и $z_2=2$ (полюсы второго порядка). Внутри окружности $|z|=1$ находится только точка z_1. Найдем вычет функции $f(z)$ в точке $z_1=\dfrac{1}{2}$:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=\frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\cdot f(z)\right)'=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2+1}{4(z-2)^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{2z(z-2)^2-2(z-2)(z^2+1)}{(z-2)^4}=\frac{8}{27}.$$

Следовательно,

$$\int_{\pi}^{3\pi}\frac{\cos x}{(5-4\cos x)^2}\,dx=\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2}\,dz=\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=\frac{8\pi}{27}.$$

<u>Вычисление несобственных интегралов</u>

1. *Интегралы вида* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,dx.$

Пусть $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – рациональная функция, непрерывная при $x\in\mathbb{R}$, степени n и m многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ связаны условием $m-n\geq 2$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,dx$ сходится, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,dx=2\pi i\cdot\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k}R(z),$$

где суммирование ведется по особым точкам z_k функции комплексной переменной $R(z)$, лежащим в верхней полуплоскости.

Если при этом все особые точки функции $R(z)$ лежат только в верхней или только в нижней полуплоскости, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,dx=0.$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

Решение. Функция $R(x)=\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$ является рациональной функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$, степень числителя $n=0$, степень знаменателя $m=4$, т. е. условие $m-n\geq 2$ выполняется.

Рассмотрим функцию $R(z)=\frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}$.

В верхней полуплоскости она имеет две особые точки: $z=2i$ и $z=3i$ (простые полюсы). Найдем вычеты функции $R(z)$ в этих точках:

$$\operatorname*{res}_{z=2i} R(z)=\operatorname*{res}_{z=2i}\frac{1}{(z-2i)(z+2i)(z^2+9)}=\frac{1}{(z+2i)(z^2+9)}\bigg|_{z=2i}=\frac{1}{20i};$$

$$\operatorname*{res}_{z=3i} R(z)=\operatorname*{res}_{z=3i}\frac{1}{(z^2+4)(z-3i)(z+3i)}=\frac{1}{(z^2+4)(z+3i)}\bigg|_{z=3i}=-\frac{1}{30i}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=2i}R(z)+\operatorname*{res}_{z=3i}R(z)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{20i}-\frac{1}{30i}\right)=\frac{\pi}{30}.$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{(x^2+2x+26)^2}dx$.

Решение. Функция $R(x)=\frac{x^2+1}{(x^2+2x+26)^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, степень числителя $n=2$, степень знаменателя $m=4$, условие $m-n\geq 2$ выполняется.

Рассмотрим функцию $R(z)=\frac{z^2+1}{(z^2+2z+26)^2}$. Ее особыми точками являются корни знаменателя $z_1=-1+5i$ и $z_2=-1-5i$ (полюсы второго порядка).

В верхней полуплоскости находится только точка z_1. Вычислим вычет функции $R(z)$ в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=-1+5i}R(z)=\operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{z^2+1}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{z^2+1}{(z-z_2)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to z_1}\frac{2z(z-z_2)-2(z^2+1)}{(z-z_2)^3}=\frac{-2zz_2-2}{(z-z_2)^3}\bigg|_{z=z_1}=\frac{-2\cdot 26-2}{(10i)^3}=\frac{54}{10^3 i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+2x+26)^2}\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=z_1} R(z) = 2\pi i \cdot \frac{54}{10^3\, i} = \frac{27\pi}{250}.$$

2. *Интегралы вида* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx.$

Вычисление таких интегралов сводится к вычислению интеграла вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx.$$

Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана (т. е. $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек z_k, и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z|\to\infty$), то для любого $\alpha>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z} \right).$$

В частности, если $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ – рациональная функция, непрерывная на действительной оси, и степени n и m многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ связаны условием $m-n\ge 1$, то для такой функции лемма Жордана выполняется.

Пример 17. Вычислить с помощью вычетов интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+5}\,dx.$

Решение. Так как $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+5}dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+5}\cdot e^{ix}\,dx.$$

Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z+5}$.

Она удовлетворяет всем условиям леммы Жордана. Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1=1+2i$ и $z_2=1-2i$. В верхней полуплоскости находится только точка z_1.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)}{x^2-2x+5} \cdot e^{ix}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1}\left(f(z) e^{iz} \right) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1+2i} \frac{(z+1)e^{iz}}{\big(z-(1+2i)\big)\big((z-(1-2i)\big)} =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{(z+1)e^{iz}}{z-1+2i}\right|_{z=1+2i} = 2\pi i \cdot \frac{(2+2i)e^{-2+i}}{4i} = \pi e^{-2}(1+i)(\cos 1 + i \sin 1).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+5}\,dx = \operatorname{Re}\Big(\pi e^{-2}(1+i)(\cos 1 + i\sin 1)\Big) = \pi e^{-2}(\cos 1 - \sin 1).$$

Пример 18. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4+2x^2+1}\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция является четной, $\sin 3x = \operatorname{Im} e^{3ix}$, поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^4+2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^4+2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{3ix}}{x^4+2x^2+1}\,dx.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z}{z^4+2z^2+1} = \frac{z}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{(z+i)^2(z-i)^2}.$$

Она удовлетворяет всем условиям леммы Жордана и имеет одну особую точку в верхней полуплоскости ($z=i$ – полюс второго порядка).

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{3ix}}{x^4+2x^2+1}\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=i} \frac{ze^{3iz}}{z^4+2z^2+1} = 2\pi i \cdot \left.\left(\frac{ze^{3iz}}{(z+i)^2} \right)'\right|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{3iz}\big((1+3iz)(z+i)-2z\big)}{(z+i)^3}\right|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{3}{4}e^{-3} = \frac{3}{2}e^{-3}\pi i.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^4+2x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\frac{3}{2}e^{-3}\pi i \right) = \frac{3}{4}e^{-3}\pi.$$

Дополнительные задачи

1. Найти вычеты функций в конечных особых точках:

а) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^3+3z^2+z+3}$.

Ответ: $\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=\dfrac{1+3i}{20}$; $\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)=\dfrac{1-3i}{20}$; $\operatorname*{res}_{z=-3} f(z)=\dfrac{9}{10}$.

б) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$. **Ответ:** $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=-\dfrac{5}{2}$; $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=e$.

в) $f(z)=(z^2+2z-1)\cos\dfrac{3}{z-1}$. **Ответ:** $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=-18$.

2. Найти вычеты функций в бесконечно удаленной точке:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$. **Ответ:** $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\dfrac{1}{6}$.

б) $f(z)=\dfrac{z^{11}}{z^3-5}$. **Ответ:** $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-125$.

3. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{\sin z}$. **Ответ:** $-2\pi i e^{\pi}$.

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z+8}{(z+2)^3(z+5)}dz$. **Ответ:** $\dfrac{2}{9}\pi i$.

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}dz$. **Ответ:** $-\dfrac{\pi}{3}i$.

4. Вычислить:

а) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$. **Ответ:** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

б) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(5+4\cos x)^2}$. **Ответ:** $\dfrac{10\pi}{27}$.

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)+(x^2+4)}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{3}$.

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{2}$.

д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+16}dx$. **Ответ:** πe^{-12}.

е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+2x+2)^2}dx$. **Ответ:** $3\pi e^{-5}\cos 5$.

Список использованных источников

1. Апарина, Л. В. Числовые и функциональные ряды : учеб. пособие / Л. В. Апарина. – СПб. : Лань, 2012. – 160 с.
2. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.
3. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.
4. Воробьёв, Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьёв. – М. : Наука, 1979. – 408 с.
5. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 304 с.
6. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – М. : Высш. шк., 2001. – 445 с.
7. Шмелёв, П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П. А. Шмелёв. – М. : Высш. шк., 1983. – 176 с.

Содержание

Св. план 2022, поз. 49

Учебное издание

Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович
Степанова Татьяна Сергеевна и др.

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 26.05.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 6,63. Уч.-изд. л. 6,8. Тираж 100 экз. Заказ 185.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск