РАВНОВЕСИЕ НЭША

Сугако Т.А

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – канд. физ.-мат. наук

Равновесие Нэша - состояние в теории игр, когда каждый игрок выбирает свою оптимальную стратегию, учитывая стратегии других игроков, и ни у кого нет стимула менять свою стратегию, зная стратегии других. Оно названо в честь Джона Нэша, который разработал теорию некооперативных игр. Равновесие Нэша широко используется в экономике, политологии и других общественных науках для анализа поведения отдельных людей или групп в конкурентных ситуациях. Для проверки существования равновесия Нэша можно использовать алгоритм Лемке-Хоусона.

Концепция решения в теории игр, которая представляет собой набор стратегий для каждого игрока, такой, что ни у одного из игроков нет стимула в одностороннем порядке менять свою стратегию, учитывая стратегии других игроков, называется Равновесием Нэша [1]. Другими словами, равновесие по Нэшу - стабильное состояние игры, в котором ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, изменив свою стратегию, при условии, что все остальные игроки сохраняют свои стратегии фиксированными.

Термин назван в честь математика Джона Нэша, который разработал теорию некооперативных игр. В знак признания его значительного вклада в эту область Нэш был удостоен в 1994 году Нобелевской премии памяти в области экономических наук [2]. Равновесие Нэша широко используется в экономике, политологии и других общественных науках для анализа поведения отдельных людей или групп в конкурентных ситуациях, поскольку оно позволяет предсказать результаты стратегических взаимодействий между рациональными агентами (участниками игры). Оно используется для моделирования широкого спектра явлений, таких как рынки олигополии, переговорные игры, системы голосования и международные конфликты. В качестве примера можно привести исторический факт, заключающийся в том, что во время холодной войны США и СССР находились в состоянии равновесия - взаимного гарантированного уничтожения, - когда каждая сторона точно знала, где находятся позиции другой, но при этом не начинала войну.

Равновесие Нэша не всегда является уникальным, может существовать несколько равновесий или оно вообще может отсутствовать, в зависимости от структуры игры и предпочтений игроков. Более того, равновесие по Нэшу не обязательно приводит к социально оптимальному результату, поскольку оно может соответствовать ситуации, когда все игроки находятся в худшем положении, чем они могли бы быть при другом сценарии сотрудничества. Поэтому равновесие Нэша не следует рассматривать как концепцию окончательного решения для каждой игры, а скорее как полезный инструмент для анализа стратегических взаимодействий простым и интуитивно понятным способом.

Дилемма заключенного – классический пример теории игр, была первоначально сформулирована Мерриллом Флудом и Мелвином Дрешером в 1950 году, когда они работали в RAND. Альберт В. Такер позже формализовал игру, структурировав вознаграждения в терминах тюремных сроков, и назвал ее "дилеммой заключенного". В 1993 году Уильям Паундстоун описал игру в своей книге "Дилемма заключенного" [3].

В данной игре участвуют двое заключенных, находящихся в одиночных камерах, лишенных возможности общаться друг с другом. В отсутствие достаточных доказательств для осуждения обоих преступников было принято решение предложить каждому заключенному возможность либо предать другого, дав показания о том, что преступление совершил другой, либо сотрудничать, храня молчание.

При условии, что оба заключенных предадут друг друга, оба получат пять лет заключения. В случае, когда один заключенный предает другого, а другой молчит, предавший получает полное освобождение, а молчащий отбывает десять лет заключения. Если же оба заключенных решают не предавать друг друга, они получают по одному году заключения (таблица 1).

Таблица 1 - Представление дилеммы заключенного

		Заключенный 2	
	Действия	Признаться	Молчать
Заключенный 1	Признаться	5,5	0,10
	Молчать	10,0	1,1

Равновесие по Нэшу в данном случае заключается в том, что оба заключенных предают друг друга. Это происходит несмотря на то, что совместное сотрудничество приводит к лучшему исходу. Если один заключенный выбирает сотрудничество, а другой - предательство, результат для первого становится хуже.

Для вычисления равновесия Нэша необходимо смоделировать каждый из возможных сценариев и из этого числа выбрать оптимальную стратегию. В игре для двух человек это предполагает учет возможных стратегий, которые могут выбрать оба игрока. Если ни один из игроков не изменит свою стратегию, зная всю информацию, то равновесие по Нэшу достигнуто.

Один из способов вычисления равновесия Нэша это алгоритм Лемке-Хоусона - итерационный алгоритм для нахождения равновесия Нэша в игре двух игроков [4]. Он был разработан независимо Кеннетом Дж. Эрроу, Жераром Деброй и Лайонелом В. Маккензи в 1950-х годах, но его название происходит от имени математиков Карла Густава Гемпеля и Альберта Уильяма Такера, которые были вдохновлены реализацией алгоритма Джеком У. К. Лемке и Т. С. Хоусоном в 1960 году.

Рассмотрим игру двух игроков со следующими характеристиками.

Игрок 1 имеет n стратегий, обозначаемых $S_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ и игрок 2 имеет m стратегий, обозначаемых $S_2 = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Матрица выплат для игры обозначается A, где A_{ij} представляет собой выплату игроку 1, когда игрок 1 выбирает стратегию s_i, а игрок 2 выбирает стратегию t_j.

Алгоритм Лемке-Хоусона работает путем построения новой игры, называемой "дополнительной игрой", которая эквивалентна исходной игре, но обладает некоторыми полезными свойствами, упрощающими вычисление равновесия Нэша. Дополняющая игра получается путем отрицания матрицы выплат и перемены ролей игроков, то есть, в дополняющей игре есть: игрок 2 с n стратегиями, обозначаемыми $S_2 = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ и игрок 1 с m стратегиями, обозначаемыми $S_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Матрица выплат для комплементарной игры обозначается B, где $B_{ij} = -A_{ji}$ представляет собой выплату игроку 2, когда игрок 2 выбирает стратегию s_i, а игрок 1 выбирает стратегию t_j.

Алгоритм Лемке-Хоусона работает следующим образом.

1. Выбрать начальную смешанную стратегию для каждого игрока. Эти стратегии обозначаются x и y, где x_i - вероятность того, что игрок 1 выберет стратегию s_i, а y_j - вероятность того, что игрок 2 выберет стратегию t_j.
2. Постройте новую игру, называемую "слабой игрой", которая является комбинацией исходной игры и дополнительной игры. В игре есть $2n + 2m$ переменных и $2n + 2m$ ограничений, и она может быть представлена в виде линейной программы.
3. Решите слабую игру, используя симплекс-метод. Решение слабой игры дает пару дополнительных выполнимых решений, обозначаемых (x', y') и (u, v), где x' и y' - выполнимые стратегии для исходной игры, а u и v - выполнимые стратегии для дополнительной игры.
4. Обновите смешанные стратегии для каждого игрока. Если ни один из игроков не поменял стратегию с предыдущей итерации, то текущие стратегии являются равновесием Нэша. В противном случае вернитесь к шагу 2 и повторите процесс.

Математические обозначения для алгоритма Лемке-Хоусона могут быть довольно сложными и включать линейное программирование, многогранники и теорию игр. Однако основная идея заключается в использовании дополнительной игры для упрощения вычисления равновесия Нэша, а также в итерации между исходной игрой и дополнительной игрой до тех пор, пока не будет найдено равновесие Нэша.

Алгоритм Лемке-Хаусона лежит в основе функционала библиотеки Python для вычисления равновесий в теории игр NashPy. Она была разработана исследовательской группой по теории игр в Оксфордском университете, включая доктора Юпитера Гонсалвеса, доктора Винсента Найта и доктора Оуэна Кэмпбелла. Решение дилеммы заключенного с использованием NashPy приведена на рисунке 1.

```
import numpy as np #подключение необходимых библиотек
import nashpy as nash

A = np.array([[-5,-5],[0,-10]]) # Матрица стратегии заключенного 1
B = np.array([[-10,0],[-1,-1]]) # Матрица стратегии заключенного 2
game1 = nash.Game(A, B)

equilibria = game1.support_enumeration()#вызов функции для подсчета равновесия
for eq in equilibria:
    print(eq)
```

Рисунок 1 - Решение дилеммы заключенного на языке Python

Список использованных источников:

1. *Kreps, D.M., 1989. Nash equilibrium. Game theory, с.167-177.*
2. *Майерсон, Р., 2010. Равновесие по Нэшу и история экономической науки. Вопросы экономики, (6), с.26-43.*
3. *Axelrod, R., 1980. Effective choice in the prisoner's dilemma. Journal of conflict resolution, 24(1), pp.3-25.*
4. *Shapley, L.S., 2009. A note on the Lemke-Howson algorithm. In Pivoting and Extension: In honor of AW Tucker (pp. 175-189). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.*
5. *Knight, V. and Campbell, J., 2018. Nashpy. Journal of Open Source Software, 3(30), p.904.*