РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ БАЗЕЛЬСКОЙ ЗАДАЧИ

Войченко М.М., гр. 224402

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Цегельник В.В. – доктор физ.-матем. наук, профессор

Задача нахождения суммы бесконечного ряда обратных квадратов:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,(1)$$

называется Базельской задачей. Первым сумму ряда сумел найти Леонард Эйлер, уроженец швейцарского города Базель.

Зная разложение в ряд Маклорена функции

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\,(2)$$

Эйлеру в 1735 году удалось получить разложение этой же функции в бесконечное произведение

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots(3)$$

Приравнивая правые части (2) и (3) и сокращая на x, получим

$$\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots(4)$$

Приравнивая в тождественном равенстве (1) коэффициенты при x^2 , получаем

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right) = -\frac{1}{6}\ (5)$$

Умножим обе части равенства на π^2 и получим ответ на первоначальную задачу:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{6}\ (6),$$

Однако предложенное доказательство не является достаточно обоснованным. Эйлер полагал, что левая и правая части равенства (4) (рассматриваемые как многочлены) имеют одинаковые корни 0; $\pm\pi;\pm 2\pi;\pm 3\pi,\ldots$ На самом деле левая и правая части (4) представляют собой бесконечные ряды по степеням x.

В 1741 году Эйлер нашел строгое доказательство суммы ряда (1) [1-2]. Позже доказательства равенства (6) были получены многими авторами, используя различные подходы.

Рассмотрим предложенный сравнительно недавно геометрический метод доказательства равенства (6)[3]. Будем использовать упрощённую физическую формулу определения видимой яркости звезды $L=\frac{1}{d^2}$, где d – расстояние до звезды. Будем считать, что для наблюдателя яркость нескольких звёзд равна сумме их собственных яркостей (рис. 1).

Теперь возьмём окружность с периметром 2 и поместим наблюдателя диаметрально противоположно звезде. Диаметр круга равен D = 2/π, а видимая яркость звезды соответственно π^2/4 (рис. 2)

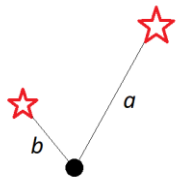

Рисунок 1 – $L=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

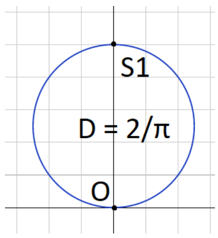

Рисунок 2

“Разобьём” звезду S1 на две другие, сохраняя общий видимый свет. Для этого увеличим диаметр круга в 2 раза и разместим 2 новые звезды таким образом, чтобы они образовывали прямоугольный треугольник вместе с наблюдателем (рис. 3). Общий видимый свет сохраняется благодаря инвертированной теореме Пифагора. Повторим эту операцию ещё раз для каждой звезды (рис 5). Повторив данную операцию бесконечное число раз, нижняя часть окружности “выпрямляется”, при этом между звёздами расстояние остается равным 2 (рис. 6).

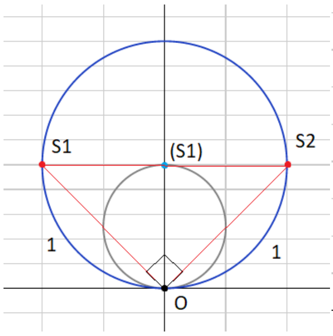

Рисунок 3 – $L = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$

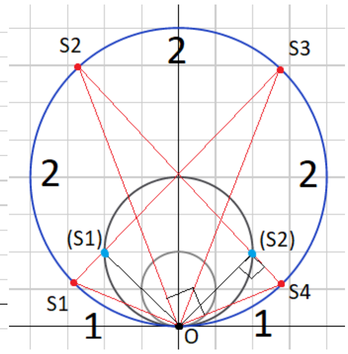

Рисунок 4

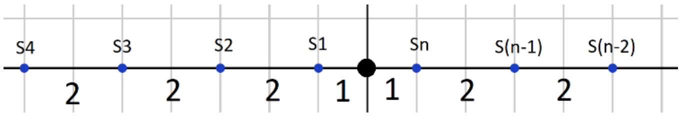

Рисунок 5

Запишем общий видимый свет и получим

$$\dots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{4} \; (7)$$

$$\frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} \dots = \frac{\pi^2}{4} \; (8)$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \dots = \frac{\pi^2}{8} \; (9)$$

Для того, чтобы придти к изначальной задаче, возьмём сумму обратных квадратов четных чисел:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots (10)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) \; (11)$$

Из чего делаем вывод, что сумма всех обратных квадратов четных чисел составляет 25% от суммы обратных квадратов всех натуральных чисел, значит (9) составляет оставшиеся 75% суммы. Отсюда получаем окончательный ответ:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{8} * \frac{100}{75} = \frac{\pi^2}{6} \; (12)$$

Список использованных источников:

1. *К. П. Кохась* // Сумма обратных квадратов, Матем. просв., сер. 3, **8**, Изд-во МЦНМО, М., 2004, 142–163
2. *Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления //* Физматлит т.2. 864 с. М., 2003;
3. *Johan Wastlund* // Summing inverse squares by Euclidean geometry, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, 2010, P. 6-8