О ТРЁХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ – СТОКСА

С.С. Каянович

В данном докладе речь идёт о решении уравнений Навье – Стокса в трубе прямоугольного сечения. Труба со сглаженными углами – на рис. 1.

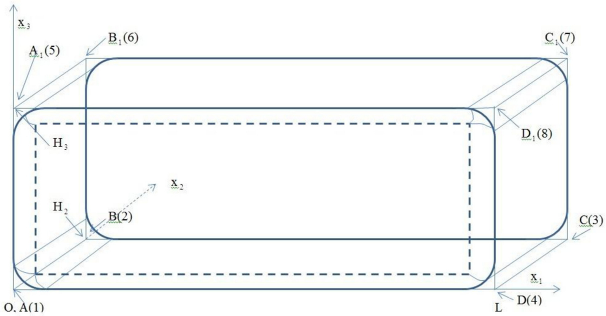

Рис. 1.

Обозначения и граничные условия можно найти в [1], [2], [4].

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, ; \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (1,2)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = (1+\nu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_3}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_3} - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, (x,t) \in \tilde{\Omega}_T. \qquad (4)$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $\tilde{S} \in C_{l,\alpha}, \tilde{\psi}_1(s,t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$. *Тогда при достаточно малых* τ *задача* (1) – (4), *в которой производная по времени заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом* τ , *причём* $\frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_2} \in$ $\in C_{l-1,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$.

Теорема 2, *Решение из теоремы 1 удовлетворяет всем уравнениям соответствующей системы Навье – Стокса* (теорема сформулирована, но не доказана в [3]).

Идея доказательства. Пусть u_1, u_2, u_3, p – решение задачи (1)–(4), существование которого утверждается теоремой 1. В силу выполнения (2), будет

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0$$

и уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_3}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0.$$

Вводя обозначение

$$A = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

и повторяя рассуждения из [4], приходим к утверждению теоремы.

Литература

1. Каянович С.С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весцi НАН Беларусi. Сер.фiз.-мат. навук. 2015. №1. С. 52-59.

2. Каянович С.С. *Метод Роте для вязкого течения в трубе* // «Way-Science». 13-th International Scientific and Practical Internet Conference «Modern Movement of Science»: abstracts of the Conference, 18–19 October, 2021. Ukraine, Dnipro. 2021. P. 133-135.

3. Каянович С.С. *О разрешимости модели вязкого течения в трубе* // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции. Ч.1. Мн.: ИМ НАН Беларуси, БГУ. 2021. С. 60-61.

4. Каянович С.С. *Об уравнениях Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса* // Тезисы докладов XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2018). Гродно, Беларусь, 15 – 18 мая 2018 г. Ч.2. Мн.: ИМ НАН Беларуси, БГУ, Гродненский ГУ. 2018. С. 13-15.