

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

С. А. ПОТТОСИНА, И. Б. ВАЛЕВСКАЯ

МАТЕМАТИКА РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ:

Практикум

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования
по направлению специальности «Информационные системы и технологии
(в экономике)»*

Минск БГУИР 2010

УДК 519.1:336.76(076.5)
ББК 22.16+65.26я73
П64

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра математического и информационного обеспечения
экономических систем учреждения образования
«Гродненский государственный университет им. Я. Купалы»
(заведующий кафедрой – кандидат физико-математических наук,
доцент В. И. Ляликова);

профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики
Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук Г. А. Медведев;
доцент кафедры интеллектуальных информационных технологий БГУИР,
кандидат технических наук М. Д. Степанова

Поттосина, С. А.

П64 Математика рынка ценных бумаг: практикум : учеб.-метод. пособие для студ. спец. 1-40 01 02-02 «Информационные системы и технологии (в экономике)» всех форм обуч. / С. А. Поттосина, И. Б. Валевская. – Минск : БГУИР, 2010. – 68 с. : ил.

ISBN 978-985-488-484-4.

Пособие ориентировано на закрепление теоретического материала по курсу «Математика рынка ценных бумаг», приобретение навыков финансовых расчетов и анализа финансовой информации.

Пособие включает 6 основных тем, освещающих следующие вопросы: наращение и дисконтирование по простым и сложным процентам; потоки платежей и их оценка; анализ акций и облигаций методом дисконтированных платежей; оптимизация портфеля ценных бумаг; расчет справедливой цены опционов. Каждая тема содержит краткие теоретические сведения, необходимые для проведения расчетов, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного выполнения.

**УДК 519.1:336.76(076.5)
ББК 22.16+65.26я73**

ISBN 978-985-488-484-4

© Поттосина С. А., Валевская И. Б., 2010
© УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», 2010

С о д е р ж а н и е

Тема 1. Нарращение и дисконтирование по простым процентам	5
1.1. Проценты и процентные ставки	5
1.2. Формула наращенной суммы по простым процентам	6
1.3. Практика начисления простых процентов.....	7
1.4. Простые переменные ставки	7
1.5. Реинвестирование по простым процентам	8
1.6. Дисконтирование и учет по простым процентам.....	8
1.7. Примеры решения задач.....	12
1.8. Задачи для самостоятельной работы	14
Тема 2. Нарращение и дисконтирование по сложным процентам	15
2.1. Формула наращенной суммы по сложным процентам	15
2.2. Формула наращенной суммы по сложным процентам при изменении ставки во времени.....	15
2.3. Формула удвоения суммы	16
2.4. Начисление годовых процентов при дробном числе лет.....	17
2.5. Номинальная и эффективная ставки процентов	17
2.6. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов	19
2.7. Номинальная и эффективная учетные ставки процентов.....	20
2.8. Расчет срока ссуды и процентных ставок	21
2.9. Начисление процентов и инфляция	22
2.10. Измерение реальной ставки процента	24
2.11. Примеры решения задач.....	25
2.12. Задачи для самостоятельной работы.....	26
Тема 3. Потоки платежей	28
3.1. Финансовые ренты и их классификация	28
3.2. Формулы наращенной суммы	29
3.3. Формулы современной величины.....	32
3.4. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой rente	32
3.5. Примеры решения задач.....	33
3.6. Задачи для самостоятельной работы	34
Тема 4. Анализ ценных бумаг с помощью метода дисконтирования платежей	35
4.1. Общая характеристика метода дисконтирования платежей.....	35
4.2. Анализ ценных бумаг на основе чистой текущей стоимости и внутренней доходности	36
4.3. Анализ облигаций	37
4.4. Модели изменения дивидендов.....	40
4.5. Анализ стоимости и доходности акций	41
4.6. Примеры решения задач.....	44
4.7. Задачи для самостоятельной работы	44

Тема 5. Оптимизация портфеля ценных бумаг	45
5.1. Портфель ценных бумаг и его характеристики.....	45
5.2. Задача Марковица (определение структуры оптимального портфеля). ...	49
5.3. Структура оптимального портфеля при отсутствии корреляции между эффективностями ценных бумаг.....	51
5.4. Модификация портфеля ценных бумаг (задача Тобина).....	52
5.5. Задачи для самостоятельной работы	56
Тема 6. Расчет справедливой цены опционов европейского типа	57
6.1. Основная идея расчета стоимости опционов.	57
6.2. Расчет стоимости опционов по формуле Кокса – Росса – Рубинштейна ..	61
6.3. Расчет стоимости опционов по формуле Блэка – Шоулса.....	63
6.4. Расчет стоимости опционов по формуле Мертона	64
6.5. Пример решения задач.....	65
6.6. Задачи для самостоятельной работы	66
Литература.....	67

Тема 1. Нарращение и дисконтирование по простым процентам

1.1. Проценты и процентные ставки

Под **процентными деньгами** (кратко – процентами) в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещения денег на сберегательный счет, учета векселя, покупки сберегательного сертификата или облигаций и т. д.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере процентной ставки – отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют периодом начисления. Ставка измеряется в процентах, записывается в виде десятичной или натуральной дроби. В последнем случае она фиксируется в контрактах до 1/16 или даже 1/32.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т. е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени, причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц (**дискретные проценты**). Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять **непрерывные проценты**.

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денежных средств в связи с присоединением процентов к сумме долга называют **наращением**, или **ростом** первоначальной суммы.

В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращивания суммы долга, но и в более широком смысле – как измеритель степени доходности (эффективности) финансовой операции или коммерческо-хозяйственной деятельности.

В практике существуют различные начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются **простыми**, а во втором – **сложными процентными ставками**.

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть постоянными или **переменными** («плавающими»). Плавающие ставки часто применяются во внешнеэкономических операциях. В этом случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней (**маржи**). Примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR – London interbank offered rate) или московская межбанковская ставка МИБОР. Размер маржи определяется целым рядом усло-

вий (сроком операции и т. д.). Судя по мировой практике, он обычно находится в пределах 0,5...5 %. В контракте может использоваться и переменный во времени размер маржи.

Теперь рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов или размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

1.2. Формула наращивания по простым процентам

Под **наращенной суммой** ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P – первоначальная сумма денег, i – ставка простых процентов, тогда Pi – начисленные проценты за один период, Pni – начисленные проценты за n периодов.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, членами которой являются величины

$$P, P + Pi = P(1 + i), P(1 + i) + Pi = P(1 + 2i) \text{ и т. д. до } P(1 + ni).$$

Первый член этой прогрессии равен P , разность – Pi , а последний член, определяемый как

$$S = P(1 + ni), \quad (1.1)$$

и является наращенной суммой. Формула (1.1) называется **формулой наращивания по простым процентам** или кратко – формулой простых процентов. Множитель $(1 + ni)$ является **множителем наращивания**. Он показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы. Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы P и суммы процентов I

$$S = P + I, \quad (1.2)$$

где

$$I = Pni. \quad (1.3)$$

При начислении простых процентов по ставке i за базу принимается первоначальная сумма долга. Увеличение наращенной суммы S линейно зависит от времени.

Пример 1.1. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100 000 р., срок долга – 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15 % годовых.

Решение:

$$I = 100\,000 \cdot 1,5 \cdot 0,15 = 22\,500 \text{ р. – проценты за 1,5 года;}$$

$$S = 100\,000 + 22\,500 = 122\,500 \text{ р. – наращенная сумма.}$$

1.3. Практика начисления простых процентов

Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях: 1) при заключении краткосрочных контрактов (предоставлении краткосрочных кредитов и т. п.), срок которых не превышает года ($n \leq 1$); 2) когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого величину n выражают в виде дроби $n = t / K$, где n – срок ссуды (измеренный в долях года), K – число дней в году (временная база), t – срок операций (ссуды) в днях.

Здесь возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы K и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют **обыкновенный**, или **коммерческий процент**. В отличие от него **точный процент** получают, когда за базу принимают действительное число дней в году: 365 или 366.

Определение числа дней пользования ссудой также может быть **точным** или **приблизительным**. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором – продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, при этом все месяцы приближенно считаются равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день. Подсчет точного числа дней между датами можно осуществить на компьютере, взяв разность этих дат, или с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году.

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемые в практике:

- 1) точные проценты с точным числом дней ссуды;
- 2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;
- 3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

1.4. Простые переменные ставки

Как известно, процентные ставки не остаются неизменными во времени, поэтому в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots) = P(1 + \sum n_t i_t), \quad (1.4)$$

где P – первоначальная сумма (ссуда);

i_t – ставка простых процентов в периоде с номером t ;

n_t – продолжительность периода t – периода начисления по ставке i_t .

Пример 1.2. Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10 % годовых, а на каждый последующий – на 1 % меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращивания на весь срок договора.

Решение:

$$1 + \sum n_t i_t = 1 + 0,25 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,09 + 0,25 \cdot 0,08 + 0,25 \cdot 0,07 = 1,085.$$

1.5. Реинвестирование по простым процентам

Сумма депозита, полученная в конце периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована (возможно – под другую процентную ставку). Этот процесс **реинвестирования** иногда повторяется неоднократно в пределах расчетного срока N . Тогда в случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока N вычисляется по формуле

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) \dots = \prod_{i=1}^m [P(1 + n_i i_i)], \quad (1.5)$$

где $n_1, n_2, \dots, n_m$ – продолжительности последовательных периодов инвестирования,

$$N = \sum_{i=1}^m n_i, \quad i_1, i_2, \dots, i_m \text{ – ставки, по которым производится реинвестирование.}$$

1.6. Дисконтирование и учет по простым процентам

В практике часто приходится решать задачу, обратную к задаче наращивания процентов, когда по заданной сумме S , соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму P . Расчет P по S называется **дисконтированием** суммы S . Величину P , найденную дисконтированием, называют **современной величиной (текущей стоимостью)** суммы S . Проценты в виде разности $D = S - P$ называются **дисконтом**, или **скидкой**. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют **учетом**. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче определяется $S = P(1 + ni)$, то в обратной находится

$P = S \frac{1}{1 + ni}$. Дробь в правой части равенства при величине S называется **дисконтным множителем**. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы S равен $D = S - P$.

Банковский, или коммерческий учет. Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т. е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка**, которую обозначим символом d .

По определению простая годовая учетная ставка находится как $d = \frac{S - P}{Sn}$. Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен $D = Snd$, откуда следует

$$P = S - D = S - Snd = S(1 - nd). \quad (1.6)$$

Множитель $(1 - nd)$ называется дисконтным множителем. Срок n измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

Наращение по учетной ставке. Учетная ставка может использоваться для наращения, т. е. для расчета S по P . В этом случае $S = P \frac{1}{1 - nd}$.

Операции наращения и дисконтирования по своей сути противоположны, но ставка наращения и учетная ставка могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае в зависимости от применяемой ставки можно различать прямую и обратную задачи.

Ставка	Прямая задача	Обратная задача
наращения (i)	наращение: $S = P(1 + ni)$	дисконтирование: $P = S \frac{1}{1 + ni}$
учетная (d)	дисконтирование: $P = S(1 - nd)$	наращение: $S = P \frac{1}{1 - nd}$

Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке. В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи: (1) определить конечную сумму долга на момент его погашения; (2) рассчитать сумму, получаемую

при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2 = P_1(1 + n_1 i)(1 - n_2 d),$$

где P_1 – первоначальная сумма ссуды;

P_2 – сумма, получаемая при учете обязательства;

n_1 – общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты,

n_2 – срок с момента учета до погашения долга.

Пример 1.3. Платежное обязательство по уплате через 100 дней 2 млн р. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов $i = 20\%$ годовых, было учтено за 40 дней до срока погашения по учетной ставке $d = 15\%$. Требуется определить сумму, получаемую при учете.

Решение:

$$P_2 = 2\left(1 + \frac{100}{365} \cdot 0,2\right)\left(1 - \frac{40}{360} \cdot 0,15\right) = 2,074 \text{ млн р.}$$

Отметим, что при наращении здесь использовалась временная база 365 дней, а при дисконтировании – 360.

Определение продолжительности ссуды. Иногда задача ставится таким образом, что требуется найти временной интервал, за который исходная сумма при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины, или срок, обеспечивающий определенный дисконт с заданной величины. При использовании простой ставки наращения i из (1.1) получаем

$$n = \frac{S - P}{Pi}, \quad (1.7)$$

а при учетной ставке d из (1.6) имеем

$$n = \frac{S - P}{Sd}. \quad (1.8)$$

Формулы (1.7) и (1.8) дают срок, измеряемый в годах, но простые ставки в основном используются в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями. В этом случае срок финансовой операции в днях выражается как $t = nK$, где K – временная база.

Определение уровня процентной ставки. Уровень процентной ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из формул (1.1) и (1.6) получаем ставку наращения i и учетную ставку d

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt} K, \quad (1.9)$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St} K. \quad (1.10)$$

Напомним, что срок n в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором – срок, оставшийся до погашения.

Пример 1.4. Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн р. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн р. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d . Принять временную базу равной $K = 360$ дней.

Решение:

$$i = \frac{S - P}{Pt} K = \frac{2,5 - 2}{2 \cdot 100} \cdot 360 = 0,9, \text{ т. е. } 90 \%,$$

$$d = \frac{S - P}{St} K = \frac{2,5 - 2}{2,5 \cdot 100} \cdot 360 = 0,72, \text{ т. е. } 72 \%.$$

Иногда размер дисконта в контрактах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки здесь задается в неявном виде. Но нетрудно вывести формулы, с помощью которых значения этих ставок можно вычислить.

Пусть S – размер погасительного платежа, d_n – доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды n . Требуется определить, каким уровням годовых ставок i и d эквивалентны такие условия.

Итак, S – сумма возврата в конце срока ссуды, $p = S(1 - d_n)$ – реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора:

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - S(1 - d_n)}{S(1 - d_n)n} = \frac{d_n}{(1 - d_n)n}, \quad (1.11)$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - S(1 - d_n)}{Sn} = \frac{d_n}{n}. \quad (1.12)$$

Пример 1.5. Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25 % указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i . Принять временную базу равной $K = 365$ дням.

Решение:

$$d = \frac{d_n}{n} = \frac{0,25}{200/365} = 0,45625, \text{ т. е. } 45,625 \%,$$

$$i = \frac{d_n}{(1 - d_n)n} = \frac{0,25}{(1 - 0,25) \cdot 200/365} = 0,60833, \text{ т. е. } 60,833 \%.$$

1.7. Примеры решения задач

Задача 1.1. Фирме выделен банковский кредит на срок с 3 января по 12 марта под простые проценты с процентной ставкой 120 % годовых. Сумма кредита – 80 млн р. Определить по трем методам коэффициент наращения и наращенную сумму.

Найти: K_{H_j} , S_j , $i = 1, 2, 3$.

Решение:

$$d_1 = d_2 = 68, d_3 = 69, p = 80 \text{ млн р.}, i = 1, 2,$$

$$K_{H_j} = 1 + \frac{d_j}{K} i.$$

$$1) K_{H_1} = 1 + \frac{68}{365} \cdot 1,2 = 1,223562, S_1 = 97,885 \text{ млн р.},$$

$$2) K_{H_2} = 1 + \frac{68}{360} \cdot 1,2 = 1,226667, S_2 = 98,133 \text{ млн р.},$$

$$3) K_{H_3} = 1 + \frac{69}{360} \cdot 1,2 = 1,23, S_3 = 98,4 \text{ млн р.}$$

Очевидно, что фирме предпочтительнее расчет коэффициента наращения по первому методу. Особенно заметны финансовые различия при $d > 360$. В предыдущем случае при сроке кредита с 3 января 1995 г. по 2 января 1996 г.:

$$1) K_{H_1} = 1 + \frac{363}{365} \cdot 1,2 = 2,193425, S_1 = 175,474 \text{ млн р.},$$

$$2) K_{H_2} = 1 + \frac{363}{360} \cdot 1,2 = 2,210, S_2 = 176,8 \text{ млн р.},$$

$$3) K_{H_3} = 1 + \frac{359}{360} \cdot 1,2 = 2,196667, S_3 = 175,733 \text{ млн р.},$$

$S_2 - S_1 = 1,326$ млн р., что составляет примерно 0,76 % от наращенной суммы в пользу коммерческого банка. В кредитном договоре оговаривается, каким методом подсчитывается наращенная сумма.

Рассмотрим случай переменной во времени процентной ставки. Пусть первые n_1 лет процентная ставка равна i_1 , тогда наращенная сумма к концу первых n_1 лет станет

$$S_1 = P(1 + n_1 i_1).$$

Следующие n_2 лет процентная ставка равна i_2 . Тогда наращенная сумма за $n_1 + n_2$ лет будет $S_2 = p(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2)$.

В общем случае за N лет:

$$S = p(1 + \sum_{m=1}^p n_m i_m),$$

где $\sum_{m=1}^p n_m = N$;

n_m и i_m – интервалы времени и процентные ставки;

N – общий срок коммерческой сделки.

Коэффициент наращения:

$$K_H = 1 + \sum_{m=1}^p n_m i_m.$$

Задача 1.2. Банк принимает вклады на срочный депозит на следующих условиях: процентная ставка при сроке 35 дней – 45 %; при сроке 65 дней – 48 %; при сроке 90 дней – 50 %. Рассчитайте доход клиента при вкладе 10 млн р. на указанные сроки. Год не високосный. Методика расчёта: точные проценты с точным числом дней.

Решение:

Обозначим $P = 10$ млн р. – первоначальная сумма; I – проценты за весь срок; S – наращенная сумма; D – доход; r – годовая процентная ставка; n – число лет; d – количество дней, на которое выдан кредит.

Согласно методике расчёта при вычислении точных процентов с точным числом дней (английская система), d исчисляется как точное число дней между днём выдачи кредита и днём его возврата (причём день выдачи и возврата считается одним днём); $K = 365$ – количество дней в году (год не високосный). Тогда

$$S = P + I + Pnr = P(1 + nr) = P(1 + d / K \cdot r).$$

Рассчитаем доход клиента:

а) при вкладе 10 млн р. на срок 35 дней ($d = 35$). Процентная ставка при сроке 35 дней – 45 % ($r = 0,45$).

$$S = P(1 + d / K \cdot r) = 10 \cdot (1 + 35 / 365 \cdot 0,45) = 10,431506 \text{ млн р.},$$

$$D = S - P = 10,431506 - 10 = 0,431506 \text{ млн р.};$$

б) при вкладе 10 млн р. на срок 65 дней ($d = 65$). Процентная ставка при сроке 65 дней – 48 % ($r = 0,48$).

$$S = P(1 + d / K \cdot r) = 10 \cdot (1 + 65 / 365 \cdot 0,48) = 10,854794 \text{ млн р.},$$

$$D = S - P = 10,854794 - 10 = 0,854794 \text{ млн р.};$$

в) при вкладе 10 млн р. на срок 90 дней ($d = 90$). Процентная ставка при сроке 90 дней – 50 % ($r = 0,5$).

$$S = P(1 + d / K \cdot r) = 10 \cdot (1 + 90 / 365 \cdot 0,5) = 11,232876 \text{ млн р.},$$

$$D = S - P = 11,232876 - 10 = 1,232876 \text{ млн р.}$$

1.8. Задачи для самостоятельной работы

1. Инвестор приобрел ГКО сроком обращения 6 месяцев на 120-й день периода обращения по цене 92 %. Определить доходность облигации к погашению.

2. ГКО сроком обращения 92 дня приобретена инвестором на 26-й день периода обращения с дисконтом 23 % и продана на 68-й день по цене 91 %. Определить доходность операции инвестора.

3. Инвестор (физическое лицо) приобрел на аукционе ММВБ 20 шт. шестимесячных ГКО по курсу 95 % за 2 месяца до погашения. За данную операцию дилеру было уплачено 2 % от суммы сделки. Определить доходность облигации до погашения с учетом комиссионных дилеру.

4. Администрация города принимает решение о выпуске трехмесячных облигаций. Банковская ставка по депозитам на срок, равный сроку обращения облигаций, составляет 7 % годовых. Облигации реализуются среди промышленных предприятий. Определить дисконт, с которым выпускаются облигации. При расчете учесть налогообложение доходов.

5. ГКО со сроком обращения один год продается на аукционе по цене 72 %. По какой цене необходимо приобрести на аукционе ГКО со сроком обращения 3 месяца с тем, чтобы обе облигации имели бы одинаковую годовую доходность? Расчет доходности вести по формуле сложного процента.

6. Администрация города решает выпустить краткосрочные бескупонные облигации, размещаемые с дисконтом 15 %. Банковская ставка по депозитам на срок, равный сроку обращения облигаций, составляет 21 % годовых. Облигации реализуются среди промышленных предприятий. Определите срок (в днях), на который выпускаются облигации. Считать, что в году 365 дней. При расчетах учесть налогообложение прибыли.

7. Бескупонная облигация со сроком обращения 180 дней была приобретена на аукционе по цене 68,51 % от номинала. Спустя некоторое время облигация была продана по цене 73,35 % от номинала. Доходность к аукциону по результатам этой сделки оказалась в 2 раза меньше доходности к погашению. Рассчитайте, через сколько дней после проведения аукциона была совершена указанная сделка купли-продажи.

8. Первый инвестор осуществил покупку одного ГКО по цене 85 % от номинала, а затем продажу по цене 86 % от номинала. Второй инвестор купил одну корпоративную облигацию по цене 85 % от номинала. По какой цене (в процентах от номинала) он должен продать корпоративную облигацию, чтобы получить прибыль, в два раза большую, чем первый инвестор от операции с ГКО (учесть налог на прибыль)?

9. ГКО со сроком обращения 6 месяцев размещается по цене 80 % годовых. По какой цене имеет смысл приобрести на вторичном рынке ГКО, погашаемые через 2 месяца, чтобы годовая доходность по обеим облигациям была одинакова?

Тема 2. Нарращение и дисконтирование по сложным процентам

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют *капитализацией процентов*.

2.1. Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна P , тогда через один год сумма с присоединенными процентами составит $P(1+i)$, через 2 года – $P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$, через n лет – $P(1+i)^n$. Таким образом получаем формулу наращения для сложных процентов:

$$S = P(1+i)^n, \quad (2.1)$$

где S – наращенная сумма;

i – годовая ставка сложных процентов;

n – срок ссуды;

$(1+i)^n$ – множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т. е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т. д.). Нарращение по сложным процентам происходит по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен P , а знаменатель – $(1+i)$.

Отметим, что при сроке $n > 1$ наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при $n < 1$ – наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам (при одинаковых процентных ставках), достигается при $n = 1/2$.

2.2. Формула наращения по сложным процентам при изменении ставки во времени

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется со временем, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \dots (1+i_k)^{n_k}, \quad (2.2)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ – последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно.

Пример 2.1. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20 % годовых плюс маржа: 10 % в первые 2 года,

8 % – в третий год, 5 % – в четвертый. Определить величину множителя наращивания за 4 года.

Решение:

$$(1 + 0,3)^2(1 + 0,28)(1 + 0,25) = 2,704.$$

2.3. Формула удвоения суммы

Чтобы оценить свои перспективы, кредитору или должнику следует знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке.

Приравняв множитель наращивания к величине N , получим ответ:

а) для простых процентов

$$1 + n \cdot i_{\text{прост}} = N, \text{ откуда}$$

$$n = (N - 1) / i_{\text{прост}}; \quad (2.3)$$

б) для сложных процентов

$$(1 + n \cdot i_{\text{сложн}})^n = N, \text{ откуда}$$

$$n = (\ln(N)) / (\ln(1 + i_{\text{сложн}})). \quad (2.4)$$

Особенно часто используется $N = 2$. Тогда формулы (2.3) и (2.4) называются **формулами удвоения** и принимают следующий вид.

1. Для простых процентов

$$n = 1 / i_{\text{прост}}. \quad (2.5)$$

2. Для сложных процентов

$$n = \ln 2 / (\ln(1 + i_{\text{сложн}})). \quad (2.6)$$

Если формулу (2.5) легко применять для прикидочных расчетов, то формула (2.6) требует применения калькулятора. Однако при небольших ставках процентов (скажем, менее 10 %) вместо формулы (2.6) можно воспользоваться более простой приближенной. Ее легко получить, если учесть, что $\ln 2 \approx 0,7$, а $\ln(1 + i) \approx i$. Тогда

$$n \approx 0,7 / i. \quad (2.6, a)$$

Пример 2.2. Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов, равной 10 %. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формулам. Результаты сравнить.

Решение:

а) при простых процентах:

$$n = 1 / i_{\text{прост}} = 1 / 0,1 = 10 \text{ лет};$$

б) при сложных процентах:

$$n = \ln 2 / (\ln(1 + i_{\text{сложн}})) = 0,693147 / \ln(1 + 0,1) = 0,693147 / 0,09531018 = 7,27 \text{ лет};$$

в) при сложных процентах:

$$n = 0,7 / i_{\text{сложн}} = 0,7 / 0,1 = 7 \text{ лет}.$$

2.4. Начисление годовых процентов при дробном числе лет

При дробном числе лет проценты начисляются различными способами.

1. По формуле сложных процентов

$$S = P(1 + i)^n. \quad (2.7)$$

2. На основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное – простые.

Тогда получим

$$S = P(1 + i)^a (1 + bi), \quad (2.8)$$

где $n = a + b$;

a – целое число лет;

b – дробная часть года.

3. В ряде коммерческих банков применяется правило, в соответствии с которым за отрезки времени меньше периода начисления проценты не начисляются, т. е.

$$S = P(1 + i)^a. \quad (2.9)$$

2.5. Номинальная и эффективная ставки процентов

Пусть годовая ставка сложных процентов равна j , а число периодов начисления в году – m . Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке j/m . Ставка j называется **номинальной**. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле

$$S = P(1 + j/m)^N, \quad (2.10)$$

где N – число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m -разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) по формуле сложных процентов:

$$S = P(1 + j/m)^{N/\tau}, \quad (2.11)$$

где N/τ – число (возможно дробное) периодов начисления процентов;

τ – период начисления процентов;

2) по смешанной формуле:

$$S = P(1 + j/m)^a (1 + b \cdot (j/m)), \quad (2.12)$$

где a – целое число периодов начисления (т. е. $a = [N/\tau]$ – целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ);

b – оставшаяся часть периода начисления ($b = N/\tau - a$).

Пример 2.3. Размер ссуды – 20 млн р. Срок предоставления – 28 месяцев. Номинальная ставка равна 60 % годовых. Начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму для случаев: 1) когда на дробную часть на-

числяются сложные проценты, 2) когда на дробную часть начисляются простые проценты, 3) когда дробная часть игнорируется. Результаты сравнить.

Решение:

По условию всего имеется $\frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$ кварталов. Произведем расчеты наращенной суммы:

$$1) S = 20(1 + \frac{0,6}{4})^{9\frac{1}{3}} = 73,713 \text{ млн р.}$$

$$2) S = 20(1 + \frac{0,6}{4})^9 \cdot (1 + \frac{0,6}{4} \cdot \frac{1}{3}) = 73,875 \text{ млн р.}$$

$$3) S = 20(1 + \frac{0,6}{4})^9 = 70,358 \text{ млн р.}$$

Из сопоставления наращенных сумм видим, что наибольшего значения результат достигает во втором случае, т. е. при начислении на дробную часть простых процентов.

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке j/m .

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m , то по определению эффективной ставки можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1 + i_9)^m = (1 + j/m)^{mn}, \quad (2.13)$$

где i_9 – эффективная ставка;

j – номинальная ставка.

Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i_9 = (1 + j/m)^m - 1. \quad (2.14)$$

Обратная зависимость имеет вид

$$j = m[(1 + i_9)^{1/m} - 1]. \quad (2.15)$$

Пример 2.4. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10 % годовых.

Решение:

$$i_9 = (1 + 0,1/4)^4 - 1 = 0,1038, \text{ т. е. } 10,38 \%.$$

Пример 2.5. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12 %.

Решение:

$$j = 4[(1 + 0,12)^{1/4} - 1] = 0,11495, \text{ т. е. } 11,495 \%.$$

2.6. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Как и в случае простых процентов, рассмотрим два вида учета – математический и банковский.

Математический учет. В этом случае решается задача, обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращенной $S = P(1+i)^n$ и решим её относительно P . Получим

$$P = S \frac{1}{(1+i)^n} = Sv^n, \quad (2.16)$$

где v^n – учетный или дисконтный множитель,

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}. \quad (2.17)$$

Если проценты начисляются m раз в году, то получим

$$P = S \frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = Sv^{mn}, \quad (2.18)$$

где v^{mn} – дисконтный множитель,

$$v^{mn} = \frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = (1+j/m)^{-mn}. \quad (2.19)$$

Величину P , полученную дисконтированием S , называют **современной** или **текущей стоимостью**, или **приведенной величиной** S . Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платёж в сумме S через n лет равноценен сумме P , выплаченной в настоящий момент.

Разность $D = S - P$ называют **дисконтом**.

Банковский учет. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется при помощи формулы

$$P = S(1 - d_{\text{сл}})^n, \quad (2.20)$$

где $d_{\text{сл}}$ – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D = S - P = S - S(1 - d_{\text{сл}})^n = S(1 - (1 - d_{\text{сл}})^n) \quad (2.21)$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, т. к. учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

2.7. Номинальная и эффективная учетные ставки процентов

В тех случаях, когда дисконтирование применяют m раз в году, используют **номинальную учетную ставку** f . Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m .

Процесс дисконтирования по этой сложной учетной ставке m раз в году описывается формулой

$$P = S(1 - f/m)^N, \quad (2.22)$$

где N – общее число периодов дисконтирования, $N = mn$.

Дисконтирование не один, а m раз в году быстрее снижает величину дисконта.

Под **эффективной учетной ставкой** понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований m в году.

В соответствии с определением эффективной учетной ставки найдем её связь с номинальной из равенства дисконтных множителей

$$(1 - f/m)^{mn} = (1 - d_{\text{сп}})^n,$$

из которого следует, что

$$d_{\text{сп}} = f - (1 - f/m)^m. \quad (2.23)$$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной.

Наращение по сложной учетной ставке. Нарращение является обратной задачей для определения учетных ставок. Формулы наращенного по сложным учетным ставкам можно получить, решая соответствующие выражения для дисконтирования (2.22) и (2.23) относительно S .

Из соотношения $P = S(1 - d_{\text{сп}})^n$ следует

$$S = P \frac{1}{(1 - d_{\text{сп}})^n},$$

а из соотношения $P = S(1 - f/m)^N$ получаем, что

$$S = P \frac{1}{(1 - f/m)^N}.$$

Пример 2.6. Какую сумму следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 20 млн р., а срок погашения – 2 года? Вексель рассчитывается исходя из сложной годовой учетной ставки 10 %.

Решение:

$$S = \frac{20}{(1 - 0,1)^2} = 24,691358 \text{ млн р.}$$

Пример 2.7. Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется не один, а четыре раза в год.

Решение:

$$S = \frac{20}{(1 - 0,1/4)^8} = 24,490242 \text{ млн р.}$$

2.8. Расчет срока ссуды и процентных ставок

В ряде практических задач начальная P и конечная S суммы заданы контрактом и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения рыночных показателей и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины нетрудно найти из исходных формул наращения или дисконтирования.

Срок ссуды. Рассмотрим задачу по расчету срока ссуды для различных ставок.

1. Наращение по сложной годовой ставке i . Из исходной формулы наращения

$$S = P(1 + i)^n$$

следует, что

$$n = \frac{\log(S / P)}{\log(1 + i)}. \quad (2.24)$$

Здесь логарифм можно взять по любому основанию, поскольку он имеется как в числителе, так и в знаменателе.

2. Наращение по номинальной ставке процентов m раз в году. Из формулы

$$S = P(1 + j / m)^{mn}$$

получаем

$$n = \frac{\log(S / P)}{m \log(1 + j / m)}. \quad (2.25)$$

3. Дисконтирование по сложной годовой учетной ставке d . Из формулы

$$P = S(1 - d)^n$$

имеем

$$n = \frac{\log(P / S)}{\log(1 - d)}. \quad (2.26)$$

4. Дисконтирование по номинальной учетной ставке m раз в году.

Из формулы

$$P = S(1 - f / m)^{mn}$$

приходим к формуле

$$n = \frac{\log(P / S)}{m \log(1 - f / m)}. \quad (2.27)$$

5. Наращение при постоянной силе роста. Исходя из формулы

$$S = Pe^{\delta n}$$

получаем

$$\ln(S / P) = \delta n. \quad (2.28)$$

Расчет процентных ставок. Из формул для S получим выражения для процентных ставок.

1. Нарращение по сложной годовой ставке i . Из исходной формулы наращивания

$$S = P(1 + i)^n$$

следует, что

$$i = \left(\frac{S}{P} \right)^{1/n} - 1. \quad (2.29)$$

2. Нарращение по номинальной ставке процентов m раз в году. Из формулы

$$S = P(1 + j/m)^{mn}$$

получаем

$$j = m \left(\left(\frac{S}{P} \right)^{1/mn} - 1 \right). \quad (2.30)$$

3. Дисконтирование по сложной годовой учетной ставке d . Из формулы

$$P = S(1 - d)^n$$

имеем

$$d = 1 - \left(\frac{P}{S} \right)^{1/n}. \quad (2.31)$$

4. Дисконтирование по номинальной учетной ставке m раз в году.

Из формулы

$$P = S(1 - f/m)^{mn}$$

получаем

$$f = m \left(1 - \left(\frac{P}{S} \right)^{1/(mn)} \right). \quad (2.32)$$

5. Нарращение при постоянной силе роста. Исходя из выражения

$$S = Pe^{\delta n}$$

получаем

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{S}{P} \right). \quad (2.33)$$

2.9. Начисление процентов и инфляция

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период n характеризуется индексом J_n . Индекс покупательной способности J_n равен обратной величине индекса цен J_p , т. е.

$$J_n = 1/J_p. \quad (2.34)$$

Индекс цен J_p указывает, во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Наращение по простым процентам. Если наращенная за n лет сумма денег составляет S , а индекс цен равен J_p , то реально наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности равна

$$C = S / J_p. \quad (2.35)$$

Пусть ожидаемый среднегодовой темп инфляции (характеризующий прирост цен за год) равен h . Тогда годовой индекс цен составит $(1 + h)$.

Если наращение производится по простой ставке в течение n лет, то реальное наращение при темпе роста инфляции h составит

$$C = \frac{P(1 + ni)}{J_p}, \quad (2.36)$$

где в общем случае

$$J_p = \prod_{i=1}^n (1 + h_i), \quad (2.37)$$

и, в частности, при неизменном темпе роста цен h

$$J_p = (1 + h)^n. \quad (2.38)$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i = \frac{J_p - 1}{n}. \quad (2.39)$$

Один из способов компенсации обесценивания денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой **инфляционной премии**. Скорректированная таким образом ставка называется **брутто-ставкой**. Брутто-ставка, которую будем обозначать символом $\tilde{r}$, находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке и множителя наращения по реальной ставке процента:

$$\frac{1 + n\tilde{r}}{J_p} = 1 + ni, \quad (2.40)$$

откуда

$$\tilde{r} = \frac{(1 + ni)J_p - 1}{n}. \quad (2.41)$$

Наращение по сложным процентам. Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуда с учетом падения покупательной способности денег (т. е. в неизменных рублях) составит

$$C = P \frac{(1 + i)^n}{J_p}, \quad (2.42)$$

где индекс цен определяется выражением (2.37) или (2.38), в зависимости от непостоянного или постоянного темпа инфляции.

В этом случае падение покупательной способности денег компенсируется при ставке $i = h$, обеспечивающей равенство $C = P$.

При начислении сложных процентов применяются **два способа компенсации потерь** от снижения покупательной способности денег.

1. Корректировка ставки процентов, по которой производится наращение, на величину **инфляционной премии**. Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, называется брутто-ставкой. Будем обозначать ее символом $\tilde{r}$. Считая, что годовой темп инфляции равен h , можем записать равенство соответствующих множителей наращения:

$$\frac{1 + \tilde{r}}{1 + h} = 1 + i, \quad (2.43)$$

где i – реальная ставка.

Отсюда

$$\tilde{r} = i + h + ih, \quad (2.44)$$

т. е. инфляционная премия равна $h + ih$.

2. Индексация первоначальной суммы P . В этом случае сумма P корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда

$$S = PJ_p (1 + i)^n. \quad (2.45)$$

Нетрудно заметить, что и в первом и во втором случае в итоге мы приходим к одной и той же формуле наращения. В ней первые два сомножителя в правой части отражают индексацию первоначальной суммы, а последние два – корректировку ставки процента.

2.10. Измерение реальной ставки процента

На практике приходится решать и обратную задачу – находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из соотношений между множителями наращения нетрудно вывести формулы, определяющие реальную ставку i по заданной (или объявленной) брутто-ставке $\tilde{r}$.

При начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов равна

$$i = \frac{1}{n} \left(\frac{1 + n\tilde{r}}{J_p} - 1 \right). \quad (2.46)$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением:

$$i = \frac{1 + \tilde{r}}{1 + h} - 1 = \frac{\tilde{r} - h}{1 + h}. \quad (2.47)$$

В рекламном «море» предложений различных банков по кредитным операциям по сложным процентам можно ориентироваться, если пересчитать их на эффективную годовую ставку. При номинальной ставке j , начислении процентов m раз в году и сроке кредита n лет наращенная сумма равна

$$S_c = P(1 + \frac{j}{m})^{mn}. \quad (2.48)$$

Если S и P одинаковы, то при одинаковом n и процентной ставке i , обеспечивающей ту же доходность при начислении процентов один раз в году,

$$S_c = P(1 + i_{\text{эф}})^n. \quad (2.49)$$

Приравнивая наращенные суммы, для $i_{\text{эф}}$, которая в этом случае называется эффективной годовой ставкой, получим

$$i_{\text{эф}} = (1 + \frac{j}{m})^m - 1. \quad (2.50)$$

2.11. Примеры решения задач

Задача 2.1. Банк принимает валютные вклады физических лиц «до востребования» по номинальной процентной ставке 30 %. Клиент внёс 2000 дол. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму при сроке вклада 12 месяцев. Проценты сложные и начисляются: 1) один раз в год, 2) по полугодиям, 3) поквартально, 4) ежемесячно.

Найти: $K_{\text{н.с.}}$, S .

Решение:

$P = 2000$ дол., $j = 0,3$, $n = 1$, $m = 1; 2; 4; 12$.

$$K_{\text{н.с.}} = (1 + \frac{j}{m})^{mn}, S = K_{\text{н.с.}} \cdot P.$$

$$1) K_{\text{н.с.}} = (1 + 0,3)^1 = 1,3, S = 2600 \text{ дол.},$$

$$2) K_{\text{н.с.}} = (1 + 0,3/2)^2 = 1,3225, S = 2645 \text{ дол.},$$

$$3) K_{\text{н.с.}} = (1 + 0,3/4)^4 = 1,3355, S = 2671 \text{ дол.},$$

$$4) K_{\text{н.с.}} = (1 + 0,3/12)^{12} = 1,3449, S = 2690 \text{ дол.}$$

Расчет показывает, что чем больше периодов начисления процентов, тем более выгодно это клиенту банка. С увеличением общего интервала времени сложные проценты нарастают все быстрее. Разложение формулы сложных процентов в ряд, согласно биному Ньютона, позволяет сделать вывод, что при начислении процентов один раз в год сложные проценты дают бóльшую наращенную сумму по сравнению с простыми при $n > 1$, одинаковую с простыми процентами при $n = 1$ и меньшую при $n < 1$.

Если срок депозита или ссуды N не составляет целое число периодов, то выделяя дробную часть периода для срока депозита N , имеем

$$N = mn + a,$$

где n – число лет;

m – число периодов за год;

$$a = \frac{d}{d_1};$$

d – число дней в нецелой части периода;

d_1 – число дней в периоде.

Наращенная сумма в этом случае составит

$$S = p(1 + \frac{j}{m})^{mn+a}.$$

Задача 2.2. При вкладе «до востребования» банк согласно договору имеет право изменить процентную ставку. Клиент внес в коммерческий банк 5 млн р. В первый месяц номинальная процентная ставка составила 240 %, в последующие 2 месяца – 144 %, в следующий месяц – 84 % и в последние 3 месяца – 48 %. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму и доход клиента по приведенным ставкам для сложных и простых процентов. Начисление процентов ежемесячное.

Найти: K_H , S_H , D_H , K_{HC} , S_c , D_c .

Решение:

$m = 12$; $p = 5$ млн р.; $n_1 = 1/12$, $j_1 = 2,4$; $n_2 = 1/6$, $j_2 = 1,44$; $n_3 = 1/12$, $j_3 = 0,84$; $n_4 = 3/12$, $j_4 = 0,48$.

1) по ставке простых процентов:

$$K_H = 1 + \frac{1}{12} \cdot 2,4 + \frac{1}{6} \cdot 1,44 + \frac{1}{12} \cdot 0,84 + \frac{3}{12} \cdot 0,48 = 1,63,$$

$$S_H = 8,15 \text{ млн р.}, D_H = 3,15 \text{ млн р.}$$

2) по ставке сложных процентов:

$$K_{HC} = (1 + \frac{2,4}{12})^{\frac{1}{12} \cdot 12} (1 + \frac{1,44}{12})^{\frac{1}{6} \cdot 12} (1 + \frac{0,84}{12})^{\frac{1}{12} \cdot 12} (1 + \frac{0,48}{12})^{\frac{3}{12} \cdot 12} = 1,81176,$$

$$S_c = 9,059 \text{ млн р.}, D_c = 4,059 \text{ млн р.}$$

2.12. Задачи для самостоятельной работы

1. Облигация с постоянным купонным доходом была приобретена юридическим лицом за 67 дней до своего погашения по цене 101 % (с учетом накопленного купонного дохода). Длительность последнего купонного периода составляет 94 дня. Размер купона – 17 % годовых. Определите сумму налогов, которую заплатит инвестор (юридическое лицо) при погашении.

2. Облигация с переменным купоном была приобретена юридическим лицом по цене 103 % (с учетом накопленного купонного дохода) от номинала. Срок последнего купонного периода составляет 94 дня. Купонная ставка – 24 % годовых. Налог на процентный доход при погашении составил 7 р. Рассчитайте, какой будет налог на прибыль.

3. Прирост накопленного купонного дохода по облигации серии «А» за несколько дней составил 25 р. У облигации серии «В» для аналогичного прироста накопленного купонного дохода потребовалось на 2 дня больше. При этом ежедневный прирост накопленного купонного дохода у облигации серии «В» на 0,2 р. меньше, чем у облигации серии «А». Определите величину текущего купона (в годовых процентах) у облигации серии «В».

4. Инвестор (юридическое лицо) приобрел облигацию с переменным купоном по цене 114 % от номинала, а спустя некоторое время продал ее за 119 %. Определите, сколько дней владел облигацией инвестор, если налог на прибыль, уплаченный инвестором в результате этой операции, составил 4 р. Величина текущего купонного дохода равна 26 % годовых. Длительность текущего купонного периода 92 дня. Все цены приведены с учетом накопленного купонного дохода.

5. Облигация с переменным купоном была приобретена юридическим лицом за 77 дней до своего погашения по цене 103 % (с учетом накопленного купонного дохода) от номинала. Доходность облигации к погашению в этот момент составляла 36 % годовых. Определите размер последнего купона по облигации (в годовых процентах), если длительность последнего купонного периода составляет 94 дня. Налогообложение не учитывать.

6. Облигация с переменным купоном была приобретена юридическим лицом за 108 %, а продана через 22 дня после покупки за 115 %. Цены приведены с учетом накопленного купонного дохода. Доходность от этой операции с учетом налогообложения прибыли составила 29 % годовых. Определить размер текущего купона по облигации.

7. Облигация с переменным купоном была приобретена юридическим лицом по цене 108 %. Доходность облигации к погашению в этот момент составила 32 % годовых (с учетом налогообложения прибыли). Размер текущего купонного дохода – 24 % годовых. Длительность текущего купонного периода составляет 91 день. Покупка облигации была осуществлена в последний купонный период. Определить, за сколько дней до погашения была куплена облигация.

8. Брокер предлагает своему клиенту два типа договоров на обслуживание. По договору 1-го типа брокер удерживает с клиента комиссионные в размере 0,04 % от суммы каждой сделки купли-продажи облигаций. По договору 2-го типа брокер удерживает 4 % прибыли, полученной от прироста курсовой стоимости облигаций, приобретенных для клиента. Укажите минимальный уровень доходности от операций купли-продажи облигаций, при котором кли-

енту выгоднее заключить договор 1-го типа. Предполагается, что брокером будет совершено только две операции (покупка и продажа) с облигациями клиента. Налогообложение не учитывать.

Тема 3. Потоки платежей

Очень часто в контрактах финансового характера предусматриваются не отдельные разовые платежи, а серия платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т. д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и др. Ряд последовательных выплат и поступлений называют **поток платежей**. Выплаты представляются в виде отрицательных величин, а поступления – в виде положительных.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенная сумма потока платежей – это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под **современной величиной потока платежей** понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) к некоторому моменту времени, совпадающему с началом потока платежей или предшествующему ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

3.1. Финансовые ренты и их классификация

Поток платежей, все члены которого являются положительными величинами, а временные интервалы по выплатам постоянны, называют **финансовой рентой**, или **аннуитетом**.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами: **член ренты** – величина каждого отдельного платежа; **период ренты** – временной интервал между двумя соседними платежами; **срок ренты** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода; **процентная ставка** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту; число платежей в году; число начислений процентов в году; моменты платежей внутри периода ренты.

Виды финансовых рент

Классификация рент может быть произведена по различным признакам. Рассмотрим их.

По продолжительности периода ренты делят на **годовые** и **p -срочные**, где p – число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением один раз в году, m раз в году или с непрерывным начислением. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают **постоянные** (с равными членами) и **переменные** ренты. Если размеры платежей изменяются в соответствии с каким-либо математическим законом, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают ренты **верные** и **условные**. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее не известно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с **конечным числом членов**, или **ограниченные**, и **бесконечные**, или **вечные**. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на **немедленные** и **отложенные**, или **отсроченные**. Срок действия немедленных рент начинается сразу, а отложенных – запаздывает.

Ренты различают также по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются **обычными**, или **постнумерандо**. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются **пренумерандо**. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы (или современной величины ренты).

3.2. Формулы наращенной суммы

Обычная годовая рента. Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, проценты начисляются один раз в год по ставке i . В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, т. к. на сумму R проценты начислялись в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличивается до $R(1+i)^{n-2}$ и т. д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R , знаменатель – $(1+i)$, число членов n . Искомая сумма равна

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R s_{n;i},$$

где

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Параметр $s_{n;i}$ называется **коэффициентом наращения ренты**. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i . Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя графами.

Пример 3.1. В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн р., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10 %. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение:

$$S = 10 \frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} = 33,1.$$

Годовая рента с начислением процентов m раз в году. Посмотрим, как усложнится формула, если предположить, что платежи производят один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что каждый раз применяется ставка j/m , где j – номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R(1+j/m)^{m(n-1)}, R(1+j/m)^{m(n-2)}, \dots, R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, в которой первым членом является R , знаменателем – $(1+j/m)^m$, а число членов составляет n . Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}.$$

Рента p -срочная, $m=1$. Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R – годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p . Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}, \quad \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}, \quad \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}, \quad \dots, \quad \frac{R}{p},$$

у которой первый член равен R/p , знаменатель — $(1+i)^{1/p}$, а общее число членов равно np . Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{(1/p)np} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = Rs_{n;i}^{(p)},$$

где $s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$ — коэффициент наращения p -срочной ренты при $m = 1$.

Рента p -срочная, $p = m$. В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают, т. е. $p = m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы S можно воспользоваться формулой годовой ренты с одноразовым начислением процентов в конце года:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

с той разницей, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год.

Таким образом, получаем

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j/m} = R \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j}.$$

Рента p -срочная, $p \geq 1, m \geq 1$. Это самый общий случай p -срочной ренты с начислением процентов m раз, причем возможна ситуация, когда $p \neq m$.

Первый член ренты равен R/p , уплаченный спустя $1/p$ года после начала срока, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n-1/p)} = \frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn-m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n-2/p)} = \frac{R}{p} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn-2(m/p)} \quad \text{и т. д.}$$

Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен R/p , ее знаменатель — $(1+j/m)^{m/p}$, число членов составит nm .

В результате получаем наращенную сумму

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+j/m)^{(m/p)np} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1} = R \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]}.$$

Отметим, что из данного выражения легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения p и m .

3.3. Формулы современной величины

Обычная годовая рента. Пусть член годовой ренты равен R , процентная ставка – i , проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты – n . Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R \frac{1}{1+i} = Rv,$$

где $v = \frac{1}{1+i}$ – дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т. д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: $Rv, Rv^2, Rv^3, \dots, Rv^n$, сумма всех членов которой равна

$$A = Rv \frac{v^n - 1}{v - 1} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i},$$

где $a_{n;i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения ренты.

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты n и процентной ставки i . Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в книгах по финансовой математике или построить самим при помощи компьютера.

Рента p -срочная, $p \geq 1, m \geq 1$. Рассуждая аналогичным образом, получим формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений p и m :

$$A = R \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]},$$

от которой нетрудно перейти к частным случаям при различных p и m .

3.4. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть A – современная величина годовой ренты постнумерандо, а S – ее наращенная стоимость к концу срока n ; $p=1, m=1$.

Покажем, что наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму, равную S :

$$A(1+i)^n = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S.$$

Отсюда следует, что дисконтирование S дает A : $Sv^n = A$,
а коэффициент дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i};$$

$$s_{n;i}v^n = a_{n;i}.$$

3.5. Примеры решения задач

Задача 3.1. Акционерное общество решило создать резервный фонд. Размер фонда 600 млн р., создать его необходимо за 6 лет. Взносы в фонд вносятся ежегодно равными платежами в конце каждого года. Определите размер ежегодного платежа, если годовая процентная ставка банка $i_c = 16\%$ и проценты начисляются один раз в год.

Найти: R .

Решение:

$S = 600$ млн р., $n = 6$, $i_c = 0,16$.

$$S = \frac{R(1+i_c)^n - R}{i_c}, \quad R = \frac{S \cdot i_c}{(1+i_c)^n - 1}, \quad R = \frac{600 \cdot 0,16}{(1+0,16)^6 - 1} = 66,834 \text{ млн р.}$$

Задача 3.2. Сохраняются условия задачи 3.1, но взносы в фонд поступают ежемесячно равными платежами под годовую процентную ставку банка $i_c = 16\%$. Требуется определить размер ежемесячного платежа и текущую стоимость ренты.

Найти: R/p , P .

Решение:

$p = 12$, $S = 600$ млн р., $n = 6$, $i_c = 0,16$.

Пусть годовой взнос – R . Тогда ежемесячный платеж равен R/p . Для последнего года последний месячный платеж равен R/p . Платеж за предыдущий месяц нарастает и будет равен $\frac{R}{p}(1+i_c)^{1/p}$ и т. д.

Платеж за первый месяц последнего года составит $\frac{R}{p}(1+i_c)^{(p-1)/p}$. Тогда суммарный платеж по формуле геометрической прогрессии с первым членом R/p , последним – $\frac{R}{p}(1+i_c)^{(p-1)/p}$ и знаменателем $(1+i_c)^{1/p}$ будет равен

$$S_n = \frac{R}{p} \frac{i_c}{(1+i_c)^{1/p} - 1}.$$

3.6. Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить размер платежа n -годовой ссуды покупки квартиры за A р. с годовой ставкой i % и начальным взносом p %. Сделать расчет для ежемесячных и ежегодных выплат. Расчет провести для следующих данных: $n = 20$ лет; $A = 400\,000$ р.; $i = 18$ %; $p = 30$ %. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

2. Семья хочет через n лет купить дачу за S дол. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих n лет добавлять на свой счет в банке, чтобы накопить S дол., если годовая ставка процента в банке равна i %? Расчет провести для следующих данных: $n = 6$ лет; $S = 12\,000$ дол.; $i = 8$ %. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

3. На банковский счет писателя издательство перечисляет суммы по R р. p раз в год, на которые банк m раз в год начисляет сложные проценты по ставке i %. Сколько будет денег на счете через n лет? Расчет провести для следующих данных: $p = 2$; $R = 2000$ р.; $m = 2$, $i = 7$ %; $n = 4$ года.

4. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру R дол. в год. Деньги поступают на специальный счет и на них начисляют сложные проценты по ставке i % m раз в год. Сколько накопится на счете через n лет? Расчет провести для следующих данных: $R = 500$ дол., $m = 2$; $i = 4$ %; $n = 5$ лет.

5. В ходе судебного заседания выяснилось, что г-н N недоплачивал налогов в размере $R = 100$ р. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние $n = 2$ года налоги вместе с процентами ($i = 3$ % ежемесячно). Какую сумму должен заплатить г-н N ? Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

6. Определить процентную ставку для n -летнего займа в A р. ежегодной выплатой в R р. Решить задачу для следующих исходных данных: $n = 10$ лет, $A = 100\,000$ р., $R = 16\,981$ р. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

7. В ходе судебного заседания выяснилось, что по вине пенсионного фонда г-н N в течение $n = 10$ лет недоплачивали $R = 100$ р. пенсии ежемесячно. Суд обязал фонд выплатить все недоплаченные деньги с процентами ($i = 12$ % в год). Какова сумма выплаты? Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

8. Заменить годовую ренту с годовым платежом $R = 600$ дол. и длительностью $n_1 = 10$ лет семилетней годовой рентой ($n_2 = 7$). Ставка процента $i = 8$ % в год. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

9. Сын имел на счете в банке $A = 50\,000$ р., на которые ежемесячно начислялись проценты по ставке $i = 0,8$ %. Сын уехал в десятилетнюю командировку за границу, доверив отцу за $n = 10$ лет истратить весь его счет. Сколько будет получать в месяц отец? Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

10. Покупатель предложил два варианта расчетов при покупке дачи:

1) $R_1 = 5000$ дол. немедленно, а затем по $R_2 = 1000$ дол. в течение $n = 5$ лет;

2) $R_3 = 8000$ дол. немедленно и затем по $R_4 = 300$ дол. в течение $n = 5$ лет;

Какой вариант выгоднее при годовой ставке процента:

а) $i_1 = 10\%$, б) $i_2 = 5\%$?

Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

11. Рассмотрим годовую ренту при $n = 10$ лет, $i = 10\%$. Что в большей степени увеличит наращенную величину ренты: увеличение длительности на 1 год ($\Delta n = 1$ год) или увеличение процентной ставки на 1 % ($\Delta i = 1\%$)? Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

12. Каким должен быть платеж конечной годовой ренты длительностью $n = 8$ лет, чтобы ее современная величина была $A = 16\,000$ р. при ставке $i = 10\%$? Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

13. Дана вечная рента с годовым платежом R при ставке процента i . Известно, что ее современная величина, т. е. в момент $t = 0$, равна R/i . Найдите ее величину в произвольный момент $t > 0$. При каком t эта величина максимальна, минимальна?

14. Провести детальный анализ ренты длительностью 4 года, годовым платежом $R = 1000$ ден. ед. и переменной процентной ставкой: $i_2 = 5\%$ во 2-й год, $i_3 = 8\%$ – в 3-й, $i_4 = 10\%$ – в 4-й год. Определить современную величину этой ренты. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок для следующих данных: $A = 10\,000$ р.; $i = 10\%$; $n = 5$ лет.

15. Для ренты с годовой ставкой процента $i = 12\%$; годовым платежом $R = 400$ ден. ед.; длительностью $n = 6$ лет получить следующие ее характеристики: коэффициенты приведения и наращения; современную и наращенную величины. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

Тема 4. Анализ ценных бумаг с помощью метода дисконтирования платежей

4.1. Общая характеристика метода дисконтирования платежей

Чистая текущая стоимость (*Net Present Value – NPV*) ценной бумаги определяется как разность «фундаментальной» и рыночной стоимости ценной бумаги: $NPV = V - P$.

Анализ NPV позволяет дать рекомендации относительно инвестиционной привлекательности ценных бумаг, т. е. целесообразности их покупки или продажи в текущий момент времени. Рекомендации для ценных бумаг с сопоставимым риском основываются на «золотом правиле инвестирования»: «покупай дешево и продавай дорого», т. е. рекомендуется покупать «недооцененные» (при $NPV > 0$) и продавать «переоцененные» рынком ценные бумаги (при $NPV < 0$). Условие $NPV = 0$ соответствует «равновесным» рыночным ценам активов

($P = V$) и поэтому может служить для определения «нормальной», или «внутренней» доходности ценных бумаг (*Internal Rate of Return – IRR*), т. е. доходности, на которую можно рассчитывать при покупке ценной бумаги по её «истинной» стоимости.

Для определения текущей стоимости ценной бумаги при заданном ожидаемом потоке платежей по ней традиционно используется *метод дисконтирования платежей*.

Будем использовать следующие обозначения:

T – количество периодов владения ценной бумагой, оставшихся до её погашения;

C_t – сумма платежа по ценной бумаге, ожидаемая в периоде t , $t = 1, 2, \dots, T$;

V_0 – текущая стоимость (*present value*) ценной бумаги в текущем периоде $t = 0$.

Пусть платежи поступают в конце каждого периода владения и подлежат капитализации с начислением процентов по формуле сложных процентов. При этом ставка дисконтирования платежей остаётся постоянной в течение всего срока обращения ценной бумаги и равна R .

Тогда в соответствии с методом дисконтирования платежей *текущая стоимость ценной бумаги* определяется по формуле

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+R)^t}, \quad (4.1)$$

откуда следует, что

$$V(1+R)^T = C_1(1+R)^{T-1} + C_2(1+R)^{T-2} + \dots + C_{T-1}(1+R) + C_T.$$

Таким образом, текущая стоимость ценной бумаги может интерпретироваться как сумма, вложив которую на срок, равный сроку обращения ценной бумаги, под некоторую ставку R , можно в итоге получить сумму, равную стоимости всех ожидаемых по ценной бумаге платежей. При этом ставку R удобно интерпретировать как *ставку ожидаемой доходности вложений с сопоставимой степенью риска*.

Очевидно, воспользоваться формулой (4.1) можно, только если характеристики R и $\{C_t\}$ известны. На практике истинные значения R и $\{C_t\}$ неизвестны и поэтому используются их *ожидаемые (прогнозные)* значения.

4.2. Анализ ценных бумаг на основе чистой текущей стоимости и внутренней доходности

Различные инвесторы на практике могут по-разному оценивать ожидаемые значения R и $\{C_t\}$, а следовательно, получать различные оценки величины V . Найденные значения V затем используются для оценки инвестиционной привлекательности ценных бумаг на основе анализа NPV и IRR .

Доходность R^* ценной бумаги, купленной по цене P , при условии, что её истинная стоимость равна V , определяется из условия

$$NPV = V - P = 0, \quad (4.2)$$

Ставка R^* при этом называется *внутренней доходностью (IRR) ценной бумаги*. Для её определения запишем (4.2) в явном виде относительно R , используя представление (4.1):

$$\sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+R)^t} - P = 0. \quad (4.3)$$

Искомое значение R^* находится как решение уравнения (4.3) относительно R .

Ставка внутренней доходности R^* так же, как NPV , используется для оценки инвестиционной привлекательности конкретной ценной бумаги среди вложений с сопоставимой степенью риска, ожидаемая (требуемая) доходность которых определяется ставкой R . Решение относительно инвестиционной привлекательности ценной бумаги принимается на основании следующего правила.

1. Если $R^* > R$, то данная ценная бумага является привлекательной для покупки, поскольку имеет более высокую доходность (*abnormal return*), чем вложения с сопоставимой степенью риска.

2. Если $R^* < R$, то данная ценная бумага является непривлекательной для покупки, поскольку имеет более низкую доходность, чем вложения с сопоставимой степенью риска.

3. Если $R^* = R$, то доходность данной ценной бумаги находится на уровне доходности вложений с сопоставимой степенью риска, т. е. может считаться «нормальной».

Между характеристиками NPV и IRR ценной бумаги, таким образом, существует следующая зависимость: если $NPV > 0$, то $R^* > R$; если $NPV < 0$, то $R^* < R$; если $NPV = 0$, то $R^* = R$.

Описанный выше подход может использоваться для оценки текущей стоимости и анализа инвестиционной привлекательности различных активов. Проиллюстрируем его использование для некоторых основных видов ценных бумаг (акций и облигаций).

4.3. Анализ облигаций

Облигации представляют широкий класс долговых ценных бумаг с ограниченным сроком обращения и фиксированным доходом. По сроку обращения различают краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные облигации.

Краткосрочные облигации обычно являются бескупонными. При анализе их удобно рассматривать как однопериодные активы, доход по которым образуется за счёт разницы цен покупки и продажи (погашения).

Облигации с более длительными сроками обращения обычно являются купонными, т. е. предусматривают периодические выплаты процентов (купон-

ного дохода) в течение срока обращения и возврат номинальной стоимости облигации при погашении [2].

Анализ купонных облигаций. Для определения текущей стоимости купонной облигации воспользуемся общей формулой (4.1) при некоторых предположениях, учитывающих особенности потока платежей по купонным облигациям.

Введём обозначения:

$T < \infty$ – количество периодов владения, оставшихся до погашения облигации;

F – финальная выплата по облигации, совпадающая с её номинальной стоимостью;

$q > 0$ – ставка купонного дохода (*купонная доходность*) за один период владения, в долях;

$m \geq 1$ – частота выплат купонного дохода за один период владения;

$R > 0$ – ставка дисконтирования купонного дохода, соответствующая одному периоду владения. Ставка R интерпретируется как ожидаемая доходность вложений с сопоставимым риском.

Относительно потока платежей $\{C_t\}$ предполагается, что

$$C_t = \begin{cases} qF - \text{купонный доход в периоде } t = 1, 2, \dots, T-1; \\ qF + F - \text{купонный доход плюс финальная выплата в периоде } t = T. \end{cases} \quad (4.4)$$

Предполагается также, что платежи в виде купонного дохода поступают в конце каждого периода и подлежат капитализации с начислением сложных процентов.

Рассмотрим вначале случай, когда $T < \infty$, $q > 0$ и $m = 1$, т. е. когда период выплат купонного дохода совпадает с периодом владения облигации. С учётом сделанных предположений из (4.1) следует, что текущая стоимость купонной облигации определяется соотношением

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+R)^t} = qF \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(1+R)^t} + \frac{F}{(1+R)^T} = \equiv a_{T,R} + F_0, \quad (4.5)$$

где $a_{T,R} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+R)^t}$ – текущая стоимость ренты с T единичными выплатами и постоянной ставкой наращения R ;

$F_0 = \frac{F}{(1+R)^T}$ – текущая стоимость финальной выплаты по облигации,

$F_0 < F$.

Обозначим $d = (1+R)^{-1}$ – дисконтный множитель. По формуле для суммы T первых членов геометрической прогрессии имеем

$$a_{T,R} = \sum_{t=1}^T d^t = \frac{1-d^T}{R}, \quad (4.6)$$

и окончательно получаем формулу

$$V = qF \left(\frac{1-d^T}{R} \right) + F_0 = F_0 + \frac{q}{R}(F - F_0). \quad (4.7)$$

Если известна текущая рыночная стоимость облигации (цена покупки) P , то можно оценить инвестиционную привлекательность облигации на основе чистой текущей стоимости NPV и внутренней доходности R^* , которая, как известно, является решением уравнения $NPV = 0$, т. е. удовлетворяет тождеству

$$P = F_0 + \frac{q}{R}(F - F_0). \quad (4.8)$$

Ставка внутренней доходности облигации R^* определяет так называемую *полную доходность облигации (доходность к погашению)*, поскольку учитывает все виды платежей по облигации до момента её погашения.

Для купонных облигаций с несколькими выплатами купонного дохода в течении одного периода владения (т. е. при $m > 1$) может быть проведён аналогичный анализ, если предварительно положить, что:

$R = R(m)$ – номинальная ставка начисления процентов за один период владения в предположении, что $m > 1$;

R/m – ставка начисления процентов за один период выплат купонного дохода;

q/m – ставка купонного дохода за один период выплат.

По аналогии с предыдущим случаем можно получить следующую формулу для текущей стоимости облигации:

$$V = \frac{qF}{m} \sum_{t=1}^{mT} \frac{1}{(1 + R/m)^t} + \frac{F}{(1 + R/m)^{mT}}.$$

Анализ бескупонных облигаций. В предположении, что $q = 0$ и $1 \leq T < \infty$ текущая стоимость бескупонной T -периодной облигации совпадает с текущей ценой финальной выплаты, т. е.

$$V = \frac{F}{(1+R)^T} = F_0, \quad (4.9)$$

Из (4.9) и условия $NPV = V - P$ следует, что внутренняя доходность облигации R^* удовлетворяет тождеству

$$P = \frac{F}{(1+R^*)^T} \quad (4.10)$$

и определяется по формуле $R^* = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$.

Ставка R^* определяет полную доходность или доходность к погашению бескупонной T -периодичной облигации, т. к. разность между ценой покупки облигации и её номинальной стоимостью, выплачиваемой при погашении облигации, является единственным источником дохода владельца данной облигации.

4.4. Модели изменения дивидендов

Пусть D_t – величина дивидендов, выплачиваемых по акциям в периоде владения t . Предполагается, что дивиденды поступают в конце каждого периода и подлежат капитализации с начислением сложных процентов. При использовании метода дисконтирования платежей в рассматриваемом случае необходимо учитывать две особенности потока платежей $\{D_t\}$ по акциям:

1) поток платежей $\{D_t\}$ ($t = 1, 2, \dots, T$) по акциям представляет собой поток дивидендов, выплата которых ожидается в течение всего периода обращения акций, откуда следует, что $T = \infty$;

2) доход в виде дивидендов по обыкновенным акциям, в отличие от дохода по облигациям, не является фиксированным, т. е. оговоренным условиями выпуска, и, следовательно, при оценке текущей таких акций могут использоваться лишь прогнозные значения будущих дивидендов.

Предположим, что ставка дисконтирования дивидендов, интерпретируемая как ожидаемая доходность вложений с сопоставимой степенью риска, в течение всего срока обращения акций остаётся постоянной и равной R . Тогда в соответствии с методом дисконтирования платежей текущая стоимость акции определяется как сумма текущих стоимостей всех ожидаемых по акции дивидендов:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t}. \quad (4.11)$$

Таким образом, для практического использования формулы (4.11) инвестор должен знать прогнозные значения всех будущих дивидендов $\{D_t\}$ ($t = 1, 2, \dots$). В силу «неограниченности жизни» акций задача предсказания бесконечного потока дивидендов оказывается неразрешимой без дополнительных предположений в виде определённых *моделей изменения дивидендов*. Познакомимся с традиционными моделями изменения дивидендов, а также используем их для нахождения текущей стоимости акций, их NPV и IRR .

Будем предполагать, что поток дивидендов по акциям порождается следующей рекуррентной формулой:

$$D_t = D_{t-1}(1 + g_t), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

где D_0 – некоторое известное значение, например величина последних дивидендов, выплаченных по данным акциям. Величина g_t определяется из соотношения

$$g_t = \frac{D_t - D_{t-1}}{D_{t-1}}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

т. е. является *темпом прироста дивидендов* за период владения t .

Различные предположения относительно темпов прироста дивидендов $\{g_t\}$ приводят к различным моделям изменения дивидендов. Наиболее известными являются модели нулевого, постоянного и переменного роста дивидендов.

Модель нулевого роста дивидендов описывается соотношением (4.12) при условии, что

$$g_t = 0, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Условие (4.14) означает, что в будущем в течение всего срока обращения акций по ним ожидаются фиксированные дивиденды, т. е. $D_1 = D_2 = \dots = D_T$, где D_0 – некоторая заданная величина дивидендов.

На практике данная модель оказывается полезной при анализе *привилегированных «не участвующих» акций*, по которым не предусмотрено никаких выплат, кроме фиксированных дивидендов.

Модель постоянного роста дивидендов предполагает, что ожидается рост дивидендов с постоянным темпом, т. е. в (4.12) следует положить

$$g_t = g = \text{const}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где g – постоянный ожидаемый темп прироста дивидендов.

Поскольку на выплату дивидендов может направляться лишь некоторая доля чистой прибыли корпорации, то следует положить, что $g < R$.

Таким образом, в данном случае поток дивидендов $\{D_t\}$ удовлетворяет следующему соотношению (D_0 – известная величина):

$$D_t = D_{t-1}(1 + g) = D_0(1 + g)^t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

Предположение о постоянстве дивидендов в течении всего срока обращения акций, очевидно, трудноосуществимо на практике. Однако в ряде случаев подобная модель может использоваться для оценки обыкновенных акций тех корпораций, которые придерживаются определённой дивидендной политики, направленной на поддержание курса акций за счёт постоянного (хотя, возможно, и невысокого) темпа прироста дивидендов.

Модели переменного роста дивидендов предполагают наличие двух и более этапов в жизни корпорации, отличающихся схемами выплат дивидендов. Приведём пример.

Пусть модель включает два этапа. Первый этап состоит из фиксированного числа $T < \infty$ периодов владения, начиная с текущего момента времени, второй этап – весь остальной срок обращения акций. Предполагается, что $D_1 = D_2 = \dots = D_T$ – заданные прогнозные значения дивидендов для первых T периодов владения. На втором этапе ожидается изменение дивидендов в соответствии с моделью постоянного роста дивидендов и темпом прироста g :

$$D_{T+t} = D_{T+t-1}(1 + g) = D_T(1 + g)^t, \quad t = 1, 2, \dots$$

4.5. Анализ стоимости и доходности акций

Выведем формулы для вычисления текущей стоимости, NPV и IRR акций в соответствии с вышеописанными моделями изменения дивидендов.

Модель нулевого роста дивидендов. Формально применение метода дисконтирования платежей (дивидендов) для модели нулевого роста аналогично рассмотренному выше случаю анализа бессрочных облигаций.

Обозначим, как и ранее, $d = (1 + R)^{-1}$ – дисконтный множитель. Тогда на основании (4.11), (4.14) текущая стоимость акции в случае модели нулевого роста дивидендов допускает представление

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + R)^t} = \frac{D_0}{1 + R} \sum_{t=0}^{\infty} d^t. \quad (4.16)$$

Так как $d < 1$, то по свойству суммы бесконечной геометрической прогрессии имеем $\sum_{t=0}^{\infty} d^t = \frac{1}{1 - d}$, что с учётом (4.16) влечёт

$$V = \frac{D_0}{R}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) следует, что текущая стоимость акции прямо пропорциональна величине выплачиваемых по ней дивидендов и обратно пропорциональна ожидаемой доходности вложений с сопоставимой степенью риска.

Для анализа инвестиционной привлекательности акций, как и в случае облигаций, используется чистая текущая стоимость NPV и внутренняя доходность IRR . Пусть P – текущая рыночная цена (цена покупки) акции. Для рассматриваемой модели из условия $NPV = V - P = 0$ получаем формулу для определения внутренней доходности акции:

$$R^* = \frac{D_0}{P}. \quad (4.18)$$

Ставка вида (4.18) обычно называется *ставкой дивидендной доходности акции*. Соотношение (4.18) подтверждает известный факт: доходность актива тем больше, чем больше ожидаемые по нему выплаты и чем меньше цена покупки данного актива.

Модель постоянного роста дивидендов. На основании (4.11), (4.15) текущая стоимость акции в случае модели постоянного роста дивидендов определяется по формуле

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + R)^t} = \frac{D_0(1 + g)}{1 + R} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1 + g}{1 + R}\right)^t = \frac{D_0(1 + g)}{1 + R} \sum_{t=0}^{\infty} q^t, \quad (4.19)$$

где использовано обозначение $q = \frac{1 + g}{1 + R} < 1$.

С учётом свойства суммы бесконечной геометрической прогрессии из (4.19) следует

$$V = \frac{D_0(1 + g)}{R - g} = \frac{D_1}{R - g}. \quad (4.20)$$

Из условия $NPV = V - P = 0$ (где P – рыночная цена покупки акции) получаем соотношение для внутренней доходности акции:

$$R^* = \frac{D_0(1 + g)}{P} + g. \quad (4.21)$$

Формулы (4.20), (4.21) согласуются с ранее отмеченными закономерностями. В частном случае при $g = 0$ из них следуют формулы (4.17), (4.18) для

модели нулевого роста дивидендов. Если на различных этапах функционирования компании-эмитента имеют место различные схемы выплат дивидендов, то для анализа акций может использоваться модель переменного роста дивидендов.

Модель переменного роста дивидендов. Для определения текущей стоимости акции V на основе модели переменного роста дивидендов (4.12) применим метод дисконтирования платежей.

Введём обозначения V^- – текущая стоимость платежей по акции за первые T периодов; V^+ – текущая стоимость платежей по акции за оставшийся спустя T периодов срок обращения. Тогда текущая стоимость акции будет равна $V = V^- + V^+$. Величина V^- определяется как текущая стоимость актива с фиксированным потоком платежей, примером которого является купонная облигация. Поэтому согласно (4.1) имеем

$$V^- = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1+R)^t}, \quad (4.22)$$

где R – ожидаемая доходность активов с сопоставимым риском.

Для нахождения V^+ вычислим вначале текущую стоимость акции V_T в предположении, что текущим моментом является момент T и имеет место модель постоянного роста дивидендов. Согласно (4.20)

$$V_T = \sum_{t=T+1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t} = \frac{D_{T+1}}{R-g}. \quad (4.23)$$

Величину V_T можно интерпретировать как единовременное поступление, равноценное потоку платежей после периода T (например, как финальную выплату по T -периодной облигации). Поэтому для нахождения её текущей стоимости к найденному значению V_T вида (4.23) следует применить процедуру дисконтирования

$$V^+ = \frac{V_T}{(1+R)^T} = \frac{D_{T+1}}{(R-g)(1+R)^T}. \quad (4.24)$$

На основании (4.22), (4.24) и соотношения $V = V^- + V^+$ получаем выражение для текущей стоимости акции в соответствии с моделью переменного роста дивидендов

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1+R)^t} + \frac{D_{T+1}}{(R-g)(1+R)^T}.$$

4.6. Примеры решения задач

Задача 4.1. Обыкновенные акции предприятия «Ф» продаются по 25 ден. ед. В конце периода $t=1$ ожидаются выплаты дивидендов в размере 2 ден. ед. Требуемая инвестором доходность составляет 12 %.

а) определите стоимость акции, если ожидается, что в следующие 3 года дивиденды будут расти на 12 % в год, на 4-й и 5-й год – на 11 %, а начиная с 6-го – на 5 %;

б) изменит ли текущую стоимость акции предположение о её продаже к концу 5-го года? Подкрепите выводы соответствующими расчетами.

Решение:

а) рассчитаем стоимость акции

$$V = V_T + V_{T+1} = \sum_{t=1}^T \frac{DIV_t}{(1+r)^t} + \frac{DIV_{T+1}}{(r-g)(1+r)^T},$$

где $DIV_t = DIV_t - 1(1+g)$ – дивиденды в период t ,

r – требуемая доходность.

$$V = \frac{2}{(1+0,12)} + \frac{2 \cdot (1+0,12)}{(1+0,12)^2} + \frac{2 \cdot (1+0,12)^2}{(1+0,12)^3} + \frac{2 \cdot (1+0,12)^3}{(1+0,12)^4} + \frac{2 \cdot (1+0,12)^3(1+0,11)}{(1+0,12)^5} + \frac{2 \cdot (1+0,12)^3(1+0,11)^2}{(1+0,12)^6} + \frac{2 \cdot (1+0,12)^3(1+0,11)^2(1+0,05)}{(0,12-0,005)(1+0,12)^6} = 36,62;$$

б) рассчитаем, изменит ли текущую стоимость акции предположение о её продаже к концу 5-го года:

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{DIV_t}{(1+r)^t} + \frac{P_1}{(1+r)^T},$$

где P_1 – цена акции на начало периода $t=1$;

$\frac{P_1}{(1+r)^T}$ – дисконтированная цена акции, т. к. не предполагается направлять

прибыль на развитие предприятия и увеличение акционерного капитала.

$$V = \frac{2}{(1+0,12)} + \frac{2 \cdot (1+0,12)}{(1+0,12)^2} + \frac{2 \cdot (1+0,12)^2}{(1+0,12)^3} + \frac{2 \cdot (1+0,12)^3}{(1+0,12)^4} + \frac{25}{(1+0,12)^5} = 21,36.$$

Таким образом, предположение о продаже к концу 5-го года акции, изменит её текущую стоимость, которая составит 21,36, что на 3,64 меньше, чем продажная цена $P_1 = 25$.

4.7. Задачи для самостоятельной работы

1. Предложите свою задачу, в которой используется модель переменного роста дивидендов. Решите ее при конкретных исходных данных.

2. Предложите свою задачу, в которой используется модель постоянного роста дивидендов. Решите ее при конкретных исходных данных.

3. Инвестор через два года должен осуществить за счет своего портфеля платеж 1 млн ден. ед. Инвестор рассматривает возможности инвестирования в облигации двух видов А1 и А2, параметры которых приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Вид облигации	Номинал N , ден. ед.	Купонная ставка g , %	Число платежей в год, p	Срок гашения n , лет
A1	1000	7	1	1
A2	1000	8	1	3

Процентные ставки на рынке одинаковы для всех сроков и составляют 10 % годовых. Считая, что сразу после формирования портфеля процентные ставки поднялись до 11 %, сформировать иммунизированный портфель, позволяющий инвестору через два года выполнить его обязательство.

4. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8 % годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций, параметры которых приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Вид облигации	Номинал N , ден. ед.	Купонная ставка g , %	Число платежей в год, p	Срок гашения n , лет
A1	100	10 %	1	2
A2	100	10 %	1	4

Инвестор формирует портфель облигаций стоимостью 1000 ден. ед. инвестиционным горизонтом 3 года. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9 % годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых непосредственно после момента $t = 1$.

Тема 5. Оптимизация портфеля ценных бумаг

5.1. Портфель ценных бумаг и его характеристики

С целью получения дохода многие организации (банки, инвестиционные фонды) и отдельные люди покупают всевозможные ценные бумаги – акции, облигации, либо осуществляют денежный вклад в банк, рассчитывая получить проценты по вкладу. Разнообразие в наборе бумаг называется **диверсификацией** (diversification), а сам набор ценных бумаг носит название **инвестиционного портфеля** (portfolio). Весь вопрос состоит в том, какие ценные бумаги и в каком количестве покупать при формировании такого портфеля.

Введём необходимые величины. Деньги вкладываются на определённый промежуток времени, который называется **периодом владения** (holding period).

Пусть имеется какая-то ценная бумага i , которая стоит S_i . В конце периода владения она будет стоить S'_i , кроме того, в течение периода владения мы получим по ней некоторый дополнительный доход P_i (дивиденды, купонные платежи, проценты по вкладу и т. д.). Как уже говорилось выше, величина

$$r_i = \frac{S'_i + P_i - S_i}{S_i}$$

называется **доходностью** (*rate of return*, или просто *return*) этой ценной бумаги.

Вообще говоря, доходность ценной бумаги – случайная величина. Её математическое ожидание $M\{r_i\}$ мы в дальнейшем будем обозначать как μ_i , а дисперсию – как c_{ii} (т. е. $c_{ii} = D\{r_i\}$). Если ценных бумаг всего n , то кроме μ_i , c_{ii} , $i = \overline{1, n}$, в дальнейшем нам будут нужны ещё ковариации величин r_i , т. е. величины

$$c_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) = M\{(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)\}.$$

Эти величины могут быть оценены по данным, касающимся этих ценных бумаг за предыдущие периоды. Всего этих величин $n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$, т. к. всего имеем n величин μ_i и $n(n+1)/2$ величин c_{ij} (в силу симметрии, $c_{ij} = c_{ji}$). При больших n требуется знание очень большого массива данных (так, при $n = 100$ имеем $n(n+3)/2 = 5150$).

Поэтому при расчете величин c_{ij} часто пользуются рыночной моделью, в которой считается, что

$$r_i = \alpha_i + \beta_i \cdot r + \varepsilon_i,$$

где r – индекс рынка;

α_i и β_i – константы, характеризующие i -ю ценную бумагу;

ε_i – независимые случайные величины. Тогда

$$\mu_i = M\{r_i\} = \alpha_i + \beta_i \cdot \mu,$$

$$c_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_r^2, i \neq j, \tag{5.1}$$

$$c_{ii} = \beta_i^2 \sigma_r^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2,$$

где $\mu = M\{r\}$, $\sigma_r^2 = D\{r\}$, а $\sigma_{\varepsilon i}^2 = D\{\varepsilon_i\}$ – дисперсии величин ε_i .

В этом случае для расчета всех необходимых величин надо знать $\blacksquare$ величин α_i , n величин β_i , n величин $\sigma_{\varepsilon i}^2$, а также μ и σ_r^2 . Всего получается $3n + 2$ величин, что, конечно, гораздо меньше, чем $n(n+3)/2$ при больших n .

Перейдём теперь к портфелю ценных бумаг. Пусть мы купили ценных бумаг на сумму W_0 . В конце периода владения они будут стоить W_1 и, кроме того, за период владения мы получим по ним доход P . Основной характеристикой портфеля является его доходность, определяемая как

$$r_p = \frac{W_1 + P - W_0}{W_0}.$$

Выведем выражение для r_p . Пусть мы купили n_i ценных бумаг i -го типа по цене S_i за одну бумагу. Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^n n_i S_i = W_0, \quad (5.2)$$

т. к. мы потратили капитал W_0 . Введём величину $x_i = n_i S_i / W_0$, смысл которой – доля капитала W_0 , потраченная на приобретение ценной бумаги i -го типа. Тогда очевидно, что $x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$ и из (5.2) получим

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Далее,

$$W_1 + P = \sum_{i=1}^n (S'_i + P_i) n_i,$$

и поэтому

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^n (S'_i + P_i) n_i - \sum_{i=1}^n S_i n_i}{W_0} = \sum_{i=1}^n \frac{S'_i + P_i - S_i}{S_i} \cdot \frac{n_i S_i}{W_0}.$$

Но $(S'_i + P_i - S_i) / S_i$ есть не что иное, как доходность r_i ценной бумаги i -го типа. Поэтому

$$r_p = \sum_{i=1}^n r_i x_i.$$

Так как r_i – случайные величины, то и доходность портфеля r_p – случайная величина. Имеем

$$M\{r_p\} = E_p = \sum_{i=1}^n M\{r_i\} x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i,$$

$$D\{r_p\} = V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \operatorname{cov}(r_i, r_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j.$$

В дальнейшем $\sqrt{V_p}$ мы будем обозначать как σ_p .

Итак, основные формулы для портфеля имеют вид

$$E_p = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i,$$

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j, \quad \sigma_p = \sqrt{V_p}, \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для рыночной модели ценных бумаг можно получить другие выражения средней доходности E_p и дисперсии доходности V_p портфеля. Используя (5.1), получим

$$E_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \mu \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i x_i,$$

$$V_p = \sigma_p^2 = \sigma_r^2 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2.$$

Первое слагаемое в V_p носит название рыночной компоненты дисперсии, второе – собственной дисперсии портфеля.

Далее будем пользоваться следующими двумя естественными предположениями:

1) все средние эффективности ценных бумаг различны (все m_i разные): если бы было два вида ЦБ с одинаковыми средними $m_i = m_j$, но с разными дисперсиями, то инвестор всегда выбрал бы бумагу с меньшей дисперсией. Следовательно, всегда можно перенумеровать ценные бумаги в порядке их эффективностей:

$$m_1 > m_2 > \dots > m_n;$$

2) большим средним эффективностям соответствует большая дисперсия:

$$\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \dots > \sigma_n^2.$$

Действительно, из двух ЦБ, одна из которых имеет большую эффективность, а другая – большую дисперсию, инвестор всегда выбрал бы первую.

Пусть имеется n видов ценных бумаг, из которых инвестор может сформировать портфель. Эти бумаги характеризуются эффективностями

$$R_1, R_2, \dots, R_n.$$

Каждая из них является случайной величиной с известными математическими ожиданиями $MR_i = m_i \cdot u$ известной ковариационной матрицей $V = \|\text{cov}(R_i, R_j)\|$, в частности, $\text{cov}(R_i, R_j) = DR_i = r_i^2$.

Пусть x_i – доля общего вложения, приходящегося на i -й вид ценной бумаги, так что $0 \leq x_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Тогда эффективность сформированного портфеля определяется соотношением

$$R_p = \sum_{i=1}^n x_i R_i.$$

Эта случайная величина имеет следующие математическое ожидание и дисперсию:

$$MR_p = M\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i MR_i = \sum_{i=1}^n x_i m_i;$$

$$\sigma_p^2 = DR_p = D\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i\right) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i R_i, \sum_{j=1}^n x_j R_j\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j).$$

Распределение $0 \leq x_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ назовём структурой портфеля ценных бумаг.

1. Нетрудно показать, что если случайные эффекты от различных видов бумаг, включённых в портфель, некоррелированы, т. е. $\text{cov}(R_i, R_j) = 0$, $i \neq j$, то $\sigma_p^2 \leq \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$, $\sigma_p \leq \max_i \sigma_i$. Пусть $x_i = 1/n$, т. е. инвестор вложил деньги равными долями. Следовательно, при росте числа n вкладов ценных бумаг, включённых в портфель, риск портфеля ограничен и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это так называемый эффект «диверсификации портфеля».

2. В случае полной прямой корреляции ($\rho_{ij} = +1$) диверсификация не даёт положительного эффекта:

$$\sigma < \sigma_p < \bar{\sigma}, \sigma = \min T_i, \bar{\sigma} = \max T_i.$$

Риск равен среднему риску отдельных вложений. При полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между различными видами ценных бумаг $\left(\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$, при котором риск портфеля полностью отсутствует, $\sigma_p^2 = 0$.

5.2. Задача Марковица (определение структуры оптимального портфеля)

Оптимизация портфеля ценных бумаг сводится к задаче нелинейного программирования вида (5.4), в которой отыскивается оптимальная структура $0 \leq x_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ инвестиционного портфеля.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i x_j, b_{ij} = \text{cov}(R_i R_j), \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ \sum_{i=1}^n x_i m_i = m_p, \end{array} \right. \quad (5.4)$$

где m_p – выбранное инвестором значение средней эффективности портфеля. Сделаем одно замечание: если $x_j^* > 0$, то рекомендуется вложить долю x_j^* наличного капитала в ценную бумагу j . Если $x_j^* < 0$, то рекомендуется взять в долг ценные бумаги этого вида в количестве x_j^* , т. е. участвовать в операции типа *Short sale*.

Решение:

Приведём матричное решение задачи Марковица, используя следующие обозначения:

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}; \quad m = \begin{bmatrix} m_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_n \end{bmatrix}; \quad x^T = (x_1, \dots, x_n); \quad m^T = (m_1, \dots, m_n);$$

$V = [V_{ij}]$ – матрица ковариаций величин R_i и R_j .

$$V_p = x^T V x \longrightarrow \min, \quad m^T x = m_p, \quad e^T x = 1. \quad (5.5)$$

Введём функцию Лагранжа

$$L = x^T V x - \lambda(e^T x - 1) - \mu(m^T x - m_p).$$

Приравняем нулю её производную $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, или $2Vx = \lambda e + \mu m$. Находим

решение в виде

$$x = \frac{\lambda}{2} V^{-1} e + \frac{\mu}{2} V^{-1} m. \quad (5.6)$$

Подставим (5.6) в ограничения задачи (5.5) и получим систему уравнений относительно λ_0 и λ_1 :

$$\begin{cases} (e^T v^{-1} e) \frac{\lambda}{2} + (e^T v^{-1} m) \frac{\mu}{2} = 1, \\ (m^T v^{-1} e) \frac{\lambda}{2} + (m^T v^{-1} m) \frac{\mu}{2} = m_p. \end{cases}$$

Их решением являются

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{(m^T v^{-1} m) - m_p (e^T v^{-1} m)}{(e^T v^{-1} e)(m^T v^{-1} m) - (m^T v^{-1} e)^2};$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{m_p (e^T v^{-1} e) - (m^T v^{-1} e)}{(e^T v^{-1} e)(m^T v^{-1} m) - (m^T v^{-1} e)^2}.$$

Следовательно, структура оптимального портфеля имеет вид

$$x^* = \frac{[(m^T v^{-1} m) - m_p (e^T v^{-1} m)]v^{-1} e + [m_p (e^T v^{-1} e) - (m^T v^{-1} e)]v^{-1} m}{(e^T v^{-1} e)(m^T v^{-1} m) - (m^T v^{-1} e)^2}. \quad (5.7)$$

Простой подстановкой убеждаемся, что

$$e^T x^* = 1, \quad m^T x^* = m_p.$$

Кроме того, находим минимальную дисперсию (риск), соответствующую оптимальной структуре:

$$(\sigma_p^*)^2 = (x^*)^T V x^* = \frac{m_p^2 (e^T v^{-1} e) - 2m_p (m^T v^{-1} e) + (m^T v^{-1} m)}{(e^T v^{-1} e)(m^T v^{-1} m) - (m^T v^{-1} e)^2}. \quad (5.8)$$

Очевидно, что решение, полученное без требования неотрицательности структуры, может содержать отрицательные элементы.

5.3. Структура оптимального портфеля при отсутствии корреляции между эффективностями ценных бумаг

Если эффективности ценных бумаг, входящих в портфель, некоррелированы, то ковариационная и обратная ей матрица диагональны:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}.$$

В этом случае выражение для оптимальной структуры и отвечающей ей дисперсии значительно упрощается. Действительно:

$$e^T v^{-1} e = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2};$$

$$(e^T v^{-1} e)^T = (e^T v^{-1} e) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sigma_i^2};$$

$$v^{-1} e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}^T; \quad v^{-1} m = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{\sigma_1^2} & \dots & \frac{m_n}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}^T;$$

$$m^T v^{-1} m = \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{\sigma_i^2};$$

$$(e^T v^{-1} e)^T (m^T v^{-1} m) - (e^T v^{-1} m)^2 = \sum_{i < j} \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} > 0;$$

$$m_p^2 (e^T v^{-1} e)^T - 2m_p (m^T v^{-1} e)^T + (m^T v^{-1} m) = \sum_{i=1}^n \frac{(m_p - m_i)^2}{\sigma_i^2} > 0.$$

Оптимальная структура портфеля принимает вид

$$x_l^* = \frac{1}{\sigma_l^2 \sum_{i < j} \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - m_p)(m_i - m_l)}{\sigma_i^2}, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

5.4. Модификация портфеля ценных бумаг (задача Тобина)

Оказалось, что решение задачи резко упрощается и приобретает новые особенности, если учесть простой факт: кроме рискованных бумаг на рынке имеются и безрисковые типа государственных обязательств с фиксированным доходом.

Итак, как должен инвестор скомбинировать рискованную и безрисковые части портфеля, чтобы минимизировать дисперсию портфеля при выбранной или средней эффективности портфеля m_p ?

В строгой постановке получаем следующую задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} x_i x_j, \quad v_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j); & \quad \text{или} \quad \min(vx); \\ \sum_{i=1}^n x_i + x_0 = 1; & \quad e^T x + x_0 = 1; \\ \sum_{i=1}^n m_i x_i + r_0 x_0 = m_p & \quad m^T x + r_0 x_0 = m_p. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь r_0 , x_0 – соответственно эффективность и доля безрисковой части портфеля, при этом, естественно, предполагается, что $r_0 > m$.

Пусть $m_0 = r_0$ – эффективность безрискового вклада, m_r – ожидаемая эффективность портфеля рискованных ЦБ ($m_r > m_0$). Известна вариация v_r эффективности этого портфеля; x_0 – доля капитала, которую нужно вложить в безрисковые ЦБ.

Тогда $R_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) R_r$ – эффективность комбинированного вклада.

Ниже представлены характеристики этого вклада:

$$m_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) m_r = m_r + x_0 (r_0 - m_r);$$

$$V_p = (1 - x_0)^2 V_r;$$

$$\sigma_p = (1 - x_0) \sigma_r;$$

$$m_p - r_0 = \frac{m_r - r_0}{\sigma_r} \sigma_p.$$

Если весь капитал инвестора составляют безрисковые ЦБ ($x_0 = 1$), то $m_p = r_0$, а риск равен 0.

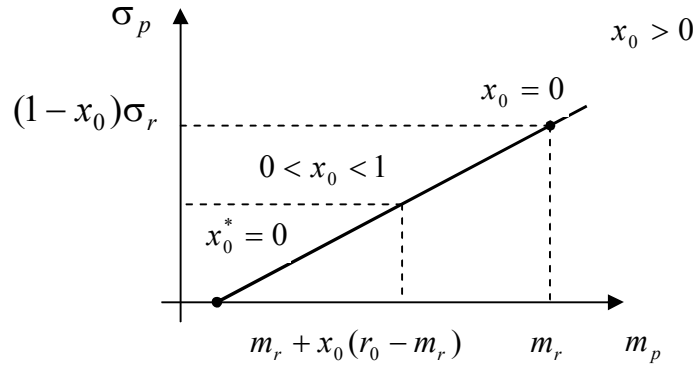


Рис. 5.1

Если весь наличный капитал внесён в рискованные ЦБ ($x_0 = 0$), то $m_p = m_r$, $CKO = \sigma_r$. Любому промежуточному риску $0 < x_0 < 1$ соответствует одна из точек на отрезке прямой. Если возможно брать безрисковые ЦБ в долг ($x_0 < 0$), то достижимая (и любая) эффективность сопровождается соответственно растущим риском.

Задача (5.9) называется **задачей Тобина**. Решается она аналогично задаче Марковица методом множителей Лагранжа ($m_0 = r_0$), и её решение имеет вид

$$x_0 = \frac{[(m^T v^{-1} m) - r_0(m^T v^{-1} e)] - m_p[(e^T v^{-1} m) - r_0(e^T v^{-1} e)]}{[(m^T v^{-1} m) - r_0(m^T v^{-1} e)] - r_0[(e^T v^{-1} m) - r_0(e^T v^{-1} e)]},$$

$$x^* = \frac{(m_p - r_0)v^{-1}(m - r_0 e)}{(m - r_0 e)^T v^{-1}(m - r_0 e)}.$$

Дисперсия портфеля оптимальной структуры определяется формулой

$$(\sigma_p^*)^2 = (x^*)^T v^{-1} x^* = \frac{(m_p - r_0)^2}{(m - r_0 e)^T v^{-1}(m - r_0 e)}$$

или

$$\sigma_p^* = \frac{m_p - r_0}{\Delta};$$

$$\Delta = (m - r_0 e)^T v^{-1}(m - r_0 e).$$

В случае некоррелированности эффективностей матрица ковариации V диагональная, обратная ей матрица V^{-1} также диагональная. Поэтому формулы для элементов структуры оптимального портфеля и для дисперсии его эффективности имеют вид

$$x_0^* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - m_p)(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}};$$

$$x_i^* = \frac{(m_p - r_0)(m_i - r_0)}{\sigma_i^2 \sum_{l=1}^n \frac{(m_l - r_0)^2}{\sigma_l^2}}, \quad i = 1 \dots n$$

$$\sigma_p^* = \frac{m_p - r_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}}}.$$

Как видно из этих формул, безрисковая часть будет входить в портфель, т. е. $x_0^* > 0$, если

$$m_p < \frac{\sum_{i=1}^n \frac{m_i(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{(m_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}} = \overline{m_p}(r_0).$$

При $m_p = \overline{m_p}$ в портфеле будет при проявлении только рисковая часть ($x_0^* = 0$).

При $m_p = r_0$ в портфеле будет присутствовать только безрисковая часть, т. е. $x_0^* = 1$, $\sigma_p^* = 0$.

Интересен вывод, сделанный Тобином.

Если есть возможность выбора не только между заданным рисковым портфелем и безрисковой ЦБ, но и структурой рискового портфеля, то оптимальной окажется только одна структура, независимая от склонности инвестора к риску.

Приведём диаграмму, являющуюся следствием формальных результатов (рис. 5.2).

Пусть сначала сделан наилучший выбор только среди всех рисковых ЦБ. В зависимости от склонности к риску инвестор выберет одну из точек на кривой R.

После этого возникает возможность вклада в рисковые, и в безрисковые ЦБ. Проведя касательную к кривой R из точки $m_p = r_0$, $\sigma_p = 0$, найдём точку с координатами m_p^*, σ_p^* , дающую характеристики оптимального рискового портфеля.

Превышение средней эффективности ценной бумаги над эффективностью безрискового вклада называется **премией за риск**: $m_e - r_0$.

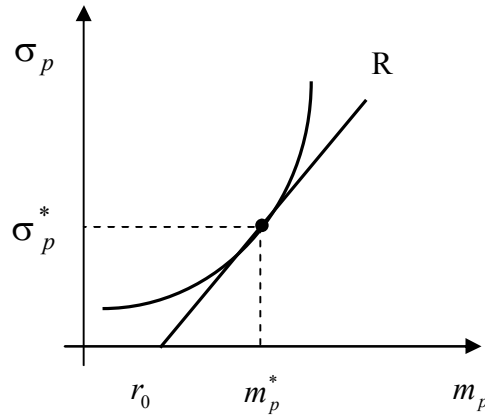


Рис. 5.2

Задача 5.1. Доказать следующий факт: премия за риск конкретной ценной бумаги, включённой в портфель, пропорциональна премии за риск портфеля в целом:

$$m_l - r_0 = \beta_l^* (m_p - r_0), \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

$$\beta_l^* = \frac{\text{cov}(R_l, R_p^*)}{(\sigma_p^*)^2},$$

где β_l^* – бета-вклады ценной бумаги в оптимальный портфель, т. е. отношение ковариации эффективности ценной бумаги и портфеля к вариации портфеля.

$$\beta^* = (\beta_1^* \quad \dots \quad \beta_n^*)^T; \quad R = (R_1 \quad \dots \quad R_n)^T.$$

Доказательство:

$$R_p^* = r_0 x_0^* + \sum_{i=1}^n R_i x_i^* = r_0 x_0^* + R^T x^*,$$

$$\mu R_p^* = r_0 x_0 + m^T x^* = m_p.$$

Поэтому $R_p^* - m_p = R^T x^* - m^T x^* = (R - m)^T x^*$. Последнее выражение позволяет найти вектор β^* . В самом деле $V = \|\text{cov}(R_i, R_j)\| = M(R - m)(R - m)^T x^*$,

$$\beta^* = \frac{1}{(\sigma_p^*)^2} M((R - m)(R_p^* - m_p)) = M(R - m)(R - m)^T x^* =$$

$$= \frac{V x^*}{(\beta_p^*)^2} = \frac{V(m_p - r_0)V^{-1}(m - r_0 e)}{(\beta_p^*)^2 (m - r_0 e)^T V^{-1}(m - r_0 e)} = \frac{m - r_0 e}{m_p - r_0}$$

или

$$m - r_0 e = \beta^* (m_p - r_0),$$

$$\beta^* = \frac{m - r_0 e}{m_p - r_0}; \quad \beta^* = \frac{V_x^*}{V_p^*},$$

$$m_l - r_0 = \beta_l^* (m_p - r_0).$$

Чем больше бета данной ЦБ, тем выше доля общего риска, связанная с вложением именно в эту ценную бумагу. Вместе с тем, чем больше бета, тем выше и премия за риск. Если в такой портфель вложить лишь часть имеющихся средств, а остальные оставить в безрисковом вкладе, то можно получить портфель с еще меньшим риском, но зато проиграть в эффективности.

5.5. Задачи для самостоятельной работы

1. Запишем вариацию доходности портфеля $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$ в форме

$$V_p = \sum_i x_i (\sum_j x_j V_{ij})$$

и назовем величину $R_i = (\sum_j x_j V_{ij})$ портфельной ковариацией доходности i -й ценной бумаги. Доказать, что в оптимальном портфеле эти ковариации пропорциональны превышению эффективности ценных бумаг над безрисковыми вложениями (подразумевается, что последние на рынке имеются).

2. С помощью компьютера найден оптимальный портфель Марковица для трех ценных бумаг с эффективностями и рисками: (4,10); (10,40); (40,80); нижняя граница доходности задана равной 15. Доли бумаг оказались равными 46, 28 и 26 %, минимальный риск – 25,4, доходность оказалась равной заданной – 15. Проверить компьютерные расчеты.

3. С помощью компьютера найден оптимальный портфель максимальной эффективности для трех ценных бумаг с доходностью и риском: (4, 10); (10,40); (40, 80) (те же ценные бумаги, что и в примере 1); верхняя граница риска задана равной 50. Доли бумаг оказались равными 6, 34 и 60 %. Проверить компьютерные расчеты.

4. Из двух некоррелированных ценных бумаг с эффективностями $m_1 = 2$ и $m_2 = 6$ и рисками $r_1 = 10$ и $r_2 = 20$ с помощью компьютера составлено шесть портфелей: в портфеле с номером k доля первых бумаг $x = 1 - 0,2k$, доля вторых равна $(1 - x)$, т. е. портфель, состоящий только из бумаг 1-го вида, получает номер 0, а портфель, состоящий только из бумаг 2-го вида получает номер 5. Компьютер нашел их эффективности и риски.

Эффективности	2,0	2,8	3,6	4,4	5,2	6,0
Риски	10,0	8,9	10,0	12,6	16,1	20
Портфели	0	1	2	3	4	5

Проверьте компьютерные расчеты. Затем нанесите портфели как точки на плоскость риск – эффективность и отметьте доминируемые портфели и недоминируемые, т. е. оптимальные по Парето.

5. Имея безрисковые ценные бумаги с эффективностью $m_0 = 4$ и некоррелированные рисковые – с эффективностями $m_1 = 8$ и $m_2 = 14$ и рисками $r_1 = 10$ и $r_2 = 30$, с помощью компьютера составили портфель Тобина эффективностью 12. Доли бумаг

получились такими: $x_0 = -0,51$, $x_1 = 1,18$, $x_2 = 0,33$. Проверьте компьютерные расчеты. Как понимать отрицательную долю безрисковых бумаг?

6. В портфеле бумаги с доходностью $d_1 = 5\%$ годовых составляют $x_1 = 30\%$ по стоимости, а остальные бумаги имеют доходность $d_2 = 8\%$ годовых. Какова доходность портфеля?

7. Сформировать портфель Тобина минимального риска из двух видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью $m_0 = 2$ и рискованных с эффективностью $m_1 = 10$ и риском $r_1 = 5$. Найти зависимость эффективности портфеля от его риска.

8. Сформировать портфель Тобина максимальной эффективности и риска не более заданного из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью $m_0 = 2$ и некоррелированных рискованных ожидаемой эффективностью $m_1 = 4$ и $m_2 = 10$ и рисками $r_1 = 2$ и $r_2 = 4$. Каковы соотношения доли бумаг в рискованной части оптимального портфеля?

9. Убедитесь самостоятельно в справедливости следующих неравенств:

$$(e^T v^{-1} e)(m^T v^{-1} m) - (e^T v^{-1} m)^2 = \sum_{i < j} \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} > 0,$$

$$m_p^2 (e^T v^{-1} e) - 2m_p (m^T v^{-1} m) - (e^T v^{-1} m) = \sum_i \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2} > 0.$$

10. Поставить обе задачи сформировать портфели Тобина: минимального риска при заданной эффективности и максимальной эффективности при заданном риске из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью $m_0 = 2$ и рискованных с ожидаемой эффективностью $m_1 = 6$ и $m_2 = 8$ и рисками $r_1 = 4$ и $r_2 = 9$ и взаимной корреляцией $k = 9$.

Тема 6. Расчет справедливой цены опционов европейского типа

6.1. Основная идея расчета стоимости опционов

Чтобы понять основную идею, по которой рассчитывается «справедливая» цена опциона, рассмотрим простейший численный пример, взятый из книги [6].

Пусть имеется безрисковый актив, который за рассматриваемый период даёт 10% прибыли, т. е., если мы, например, в начале периода вложили в него 100 дол., то в конце периода мы будем гарантированно иметь 110 дол.

Кроме того, пусть имеется рискованная ценная бумага, которая стоит 100 дол. В конце периода возможна одна из двух ситуаций: бумага может стоить 125 дол. (назовём эту цену «верхним положением») или она может стоить 80 дол. (назовём эту цену «нижним положением»).

Нам предлагают купить опцион-колл, по которому в конце периода мы получаем право купить эту ценную бумагу за 100 дол. Если мы купим этот оп-

Сколько же мы согласны заплатить за такой опцион, какова его «справедливая» цена? Ведь мы можем вложить деньги в безрисковый актив и получить гарантированный доход в 10 дол.

Сведём сначала всю ситуацию в таблицу и рисунок.

Вид бумаги	Доход	
	Верхнее положение	Нижнее положение
Безрисковая бумага	10	10
Опцион	25	0



Пусть мы составили портфель, состоящий из двух компонент: в нём N_s рискованных акций и N_b безрисковых ценных бумаг.

В нижнем положении рискованная акция будет стоить 80 дол., безрисковая — по-прежнему 110 дол. Весь портфель будет стоить $80N_s + 110N_b$.

Выберем теперь N_s и N_b из того условия, чтобы стоимость нашего портфеля в конце периода была бы в точности равна стоимости опциона, т. е. было бы выполнено условие

$$\begin{cases} 125N_s + 110N_b = 25, \\ 80N_s + 110N_b = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$N_s = \frac{5}{9}; \quad N_b = -\frac{40}{99}.$$

Что это значит? Это значит, что формируя наш портфель, мы должны:

- взять в банке кредит в размере $\frac{40}{99} \cdot 100$ дол. под 10 %;
- купить $\frac{5}{9}$ акции по цене 100 дол. за акцию, т. е. потратить $\frac{5}{9} \cdot 100$ дол.

В результате наши расходы на формирование портфеля составят

$$C = \frac{5}{9} \cdot 100 - \frac{40}{99} \cdot 100 = \frac{1500}{99} \approx 15,15 \text{ дол.}$$

Что же мы сделаем с нашим портфелем в конце срока?

Верхнее положение:

- а) продадим акции и получим за это $\frac{5}{9} \cdot 125$ дол.;
- б) вернём банку долг с процентами в размере $\frac{40}{99} \cdot 110$ дол.

В результате у нас останется

$$\frac{5}{9} \cdot 125 - \frac{40}{99} \cdot 110 = 25 \text{ дол.,}$$

т.е. то же самое, что и от опциона.

Нижнее положение:

- а) продадим акции и получим за это $\frac{5}{9} \cdot 80$ дол.;
- б) вернём банку долг с процентами в размере $\frac{40}{99} \cdot 110$ дол.

В результате у нас останется

$$\frac{5}{9} \cdot 80 - \frac{40}{99} \cdot 110 = 0 \text{ дол.,}$$

т. е. опять то же самое, что и от опциона.

Но если **одной** цели можно достичь **двумя** разными путями, то и стоять эти пути должны одинаково! А если они будут стоять по-разному, то немедленно возникнут арбитражные схемы. Требование **отсутствия арбитражных схем** и является второй основной мыслью при определении цены опциона. По-

этому «справедливая» цена опциона должна быть равна стоимости нашего портфеля, т. е. стоимость опциона должна быть равна 15,15 дол.

Давайте теперь разберём, что произойдёт, если опцион будет стоить не 15,15 дол., а иначе. Рассмотрим возможные варианты.

А. Опцион переоценен

Пусть наш опцион продаётся по цене 20 дол., т. е. **дороже**, и его покупают. Тогда будем работать по следующей схеме.

1. **Продадим** опцион за 20 дол.

2. **Купим** хеджирующий портфель, т. е. купим $\frac{5}{9}$ акции по цене 100 дол.

за акцию и возьмём в банке кредит в размере $\frac{40}{99} \cdot 100$ дол. под 10 %.

В результате у нас **останется** денег

$$20 - \frac{5}{9} \cdot 100 + \frac{40}{99} \cdot 100 = 20 - 55,56 + 40,40 = 4,85 \text{ дол.}$$

А что мы сделаем в конце срока?

Верхнее положение

1. Продадим акции и получим за это $\frac{5}{9} \cdot 125$ дол.;

2. Вернём в банк долг с процентами в размере $\frac{40}{99} \cdot 110$ дол.

В результате у нас останется сумма

$$\frac{5}{9} \cdot 125 - \frac{40}{99} \cdot 110 = 69,44 - 44,44 = 25 \text{ дол.,}$$

которую мы и отдадим покупателю нашего опциона. А нам останутся скромные 4,85 дол.

Нижнее положение

Ясно, что в этом положении покупатель не будет реализовывать своё право. Мы же поступим следующим образом.

1. Продадим акции и получим за это $\frac{5}{9} \cdot 80$ дол.;

2. Вернём в банк долг с процентами в размере $\frac{40}{99} \cdot 110$ дол.

В результате у нас останется

$$\frac{5}{9} \cdot 80 - \frac{40}{99} \cdot 110 = 44,44 - 44,44 = 0 \text{ дол.,}$$

и у нас остаются те же 4,85 дол.

Б. Опцион недооценен

Пусть опцион стоит 10 дол., т. е. **дешевле**. Тогда будем работать по следующей схеме:

1. **Купим** опцион за эти 10 дол.

2. **Продадим** хеджирующий портфель, т. е. продадим $\frac{5}{9}$ акции по цене 100 дол. за акцию и **положим** в банк сумму $\frac{40}{99} \cdot 100$ дол. под 10 %.

В результате у нас **останется**

$$\frac{5}{9} \cdot 100 - \frac{40}{99} \cdot 100 - 10 = 5,15 \text{ дол.}$$

Что же будет в конце срока?

Верхнее положение

1. Реализуем свой опцион, который мы купили, и получим 25 дол. дохода.

2. Получим от банка $\frac{40}{99} \cdot 110$ дол.

3. Купим $\frac{5}{9}$ акции по цене 125 дол. за акцию.

Это даст нам

$$25 + \frac{40}{99} \cdot 110 - \frac{5}{9} \cdot 125 = 0,$$

то есть мы со всеми расплатились, но 5,15 дол. как были у нас, так и остались.

Нижнее положение

1. Получим от банка $\frac{40}{99} \cdot 110$ дол.

2. Купим $\frac{5}{9}$ акции по цене 80 дол. за акцию.

Это даст нам

$$\frac{40}{99} \cdot 110 - \frac{5}{9} \cdot 80 = 0$$

и наши 5,15 дол. так нам и остались.

6.2. Расчет стоимости опционов по формуле Кокса – Росса – Рубинштейна

Рассмотрим формулу Кокса – Росса – Рубинштейна:

$$V(S, 0) = V_0(S) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{l=0}^N C_N^l p^l (1-p)^{N-l} V((1+u)^l (1+d)^{N-l} S, N). \quad (6.1)$$

Опцион-колл. В этом случае $V(S, N) = \max(S - K, 0)$ и поэтому справедливая цена опциона-колл за N интервалов до даты истечения равна

$$C_0(S) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{l=0}^N C_N^l p^l (1-p)^{N-l} \max((1+u)^l (1+d)^{N-l} S - K, 0). \quad (6.2)$$

Приведём её к стандартному виду. Пусть

$$k_0 = \min \{k : S(1+u)^k (1+d)^{N-k} > K\}.$$

Если $k_0 \leq N$, то

$$C_0(S) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{l=k_0}^N C_N^l p^l (1-p)^{N-l} ((1+u)^l (1+d)^{N-l} S - K). \quad (6.3)$$

Формулу можно немного упростить, но это не принципиально.

Опцион-пут. В этом случае $V(S, N) = \max(K - S, 0)$ и поэтому справедливая цена опциона-пут равна

$$P_0(S) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{l=0}^N C_N^l p^l (1-p)^{N-l} \max(K - (1+u)^l (1+d)^{N-l} S, 0). \quad (6.4)$$

Рассматривая то же значение k_0 , что и для случая опциона-колл, получим

$$P_0(S) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{l=0}^{k_0-1} C_N^l p^l (1-p)^{N-l} (K - (1+u)^l (1+d)^{N-l} S). \quad (6.5)$$

Фьючерсные и форвардные контракты. В отличие от опционов фьючерсные и форвардные контракты **обязательны** к исполнению и в них осуществляется только покупка. Поэтому для них $V(S, N) = S - K$. Поэтому, если K есть та сумма, которая выплачивается в момент получения товара от продавца, то в качестве аванса должна выплачиваться сумма $F_0(S)$, равная

$$F_0(S) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{l=0}^N C_N^l p^l (1-p)^{N-l} ((1+u)^l (1+d)^{N-l} S - K). \quad (6.6)$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N C_N^l p^l (1-p)^{N-l} &= (p + (1-p))^N = 1, \\ \sum_{l=0}^N C_N^l p^l (1-p)^{N-l} (1+u)^l (1+d)^{N-l} &= [p(1+u) + (1-p)(1+d)]^N. \end{aligned}$$

С другой стороны, $p = (r-d)/(u-d)$. Поэтому

$$p(1+u) + (1-p)(1+d) = \frac{1}{u-d} [(r-d)(1+u) + (u-r)(1+d)] = 1+r.$$

Поэтому имеем

$$F_0(S) = S - \frac{K}{(1+r)^N}, \quad (6.7)$$

что и даёт соотношение между авансом $F_0(S)$, окончательным платежом K и стоимостью товара S в момент заключения фьючерсного или форвардного контракта:

$$F_0(S) + \frac{K}{(1+r)^N} = S. \quad (6.8)$$

6.3. Расчет стоимости опционов по формуле Блэка – Шоулса

$$V(S, 0) = V_0(S) = e^{-rT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} V \left(e^{T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + x\sigma\sqrt{T}} S, T \right) dx. \quad (6.9)$$

Это и есть знаменитая формула Блэка – Шоулса для стоимости опциона европейского типа. Рассмотрим частные случаи этой формулы.

Опцион-колл. В этом случае $V(S, T) = \max(S - K, 0)$, так что

$$V \left(e^{T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + x\sigma\sqrt{T}} S, T \right) = \max \left(e^{T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + x\sigma\sqrt{T}} S - K, 0 \right).$$

Найдём x_0 из условия

$$e^{T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + x_0\sigma\sqrt{T}} S - K = 0.$$

Логарифмируя, получим

$$x_0 = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln \frac{S}{K} + T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right).$$

Теперь

$$C_0(S) = e^{-rT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + x\sigma\sqrt{T}} S - K \right) dx.$$

Вычислим входящие сюда интегралы через функцию Лапласа:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx.$$

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx = \Phi(-x_0) = \Phi \left(\frac{\ln(S/K) + T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\sqrt{T}} \right).$$

Далее,

$$e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} \exp \left(rT - T \frac{\sigma^2}{2} + x\sigma\sqrt{T} \right) \cdot \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}\right) dx = \Phi(-x_0 + \sigma\sqrt{T}) = \Phi\left(\frac{\ln(S/K) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Сводя всё вместе, получаем окончательно

$$C_0(S) = S \cdot \Phi\left(\frac{\ln(S/K) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln(S/K) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (6.10)$$

Фьючерс. Для фьючерса $V(S, T) = S - K$ и поэтому

$$F_0(S) = e^{-rT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + x\sigma\sqrt{T}} S - K \right) dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1,$$

$$e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(rT - T\frac{\sigma^2}{2} + x\sigma\sqrt{T}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}\right) dx = 1,$$

то для цены фьючерса получаем

$$F_0(S) = S - e^{-rT} K. \quad (6.11)$$

Опцион-пут. Можно, конечно, вывести формулу для цены опциона-пут аналогично тому, как была выведена формула для опциона-колл, но проще воспользоваться соотношением паритета:

$$C_0(S) - P_0(S) = F_0(S),$$

откуда легко находится $P_0(S)$.

6.4. Расчет стоимости опционов по формуле Мертона

$$V(S, 0) = V_0(S) = e^{-rT} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} V((1+u)^l e^{-\sigma T} S, T). \quad (6.12)$$

Эта формула носит название формулы Мертона (Robert Merton).

Опцион-колл. В этом случае

$$C_0(S) = e^{-rT} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \max[(1+u)^l e^{-\sigma T} S - K, 0]. \quad (6.13)$$

Рассмотрим, при каких условиях выполняется неравенство

$$(1+u)^l e^{-\sigma T} S - K > 0.$$

Логарифмируя, получим $l > \frac{1}{\ln(1+u)} \left[\ln \frac{K}{S} + \sigma T \right]$.

Введём величину

$$k_0 = \left\lceil \frac{1}{\ln(1+u)} \left(\sigma T - \ln \frac{S}{K} \right) \right\rceil + 1,$$

где $\lceil \dots \rceil$ означает целую часть. Тогда в (6.13) суммирование идёт по $l \geq k_0$, так что

$$C_0(S) = e^{-rT} \sum_{l=k_0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} [(1+u)^l e^{-\sigma T} S - K], \quad (6.14)$$

что и определяет стоимость опциона-колл.

Фьючерс. В этом случае

$$F_0(S) = e^{-rT} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} [(1+u)^l e^{-\sigma T} S - K].$$

Имеем

$$e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = 1,$$

$$e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l (1+u)^l}{l!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda(1+u)} = e^{\lambda u}.$$

Далее,

$$-rT + \lambda u - \sigma T = -rT + \frac{r + \sigma}{u} Tu - \sigma T = 0$$

и поэтому окончательно

$$F_0(S) = S - e^{-rT} K,$$

что совпадает с аналогичным результатом из формулы Блэка – Шоулса.

Стоимость **опциона-пут** можно найти из соотношения паритета.

6.5. Примеры решения задач

Задача 6.1 (на расчет справедливой цены опциона).

По формуле Блэка – Шоулса рассчитать цену опциона-колл и фьючерса, а затем найти цену опциона-пут ($T = 10$; $r = 0,1$; $\sigma = 0,1$; $S = 100$; $K = 100$).

Решение:

$$T = 10; r = 0,1; \sigma = 0,1; S = 100; X = K = 100.$$

Формулы Блэка – Шоулса.

Блэк и Шоулс вывели следующие формулы оценки премии опционов:

$$C_0 = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S/K) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

где σ – стандартное отклонение цены акции;

r – ставка без риска; на практике в формулы подставляется существующая ставка без риска для инвестиций, которые осуществляются на время T ;

$\Phi(d_i)$ – гауссовская функция распределения, показывающая вероятность того, что нормированная нормальная переменная будет меньше d_i .

$$T = 10 \text{ мес.} = 10/12 = 0,83 \text{ года.}$$

$$d_1 = \frac{\ln(100/100) + (0,1 + 0,1^2/2) \cdot 0,83}{0,1 \cdot (0,83)^{1/2}} = 0,9566;$$

$$d_2 = d_1 - 0,1 \cdot (0,83)^{1/2} = 0,8655.$$

Из таблицы значений функции $\Phi(d_i)$ находим

$$\Phi(0,9566) = 0,8306;$$

$$\Phi(0,8655) = 0,8066;$$

$$C_0 = 100 \cdot 0,8306 - 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 0,83} \cdot 0,8066 = 83,06 - 74,23 = 8,83.$$

Фьючерс:

$$F_0 = 100 - 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 0,83} = 7,965.$$

Стоимость опциона-пут:

$$P_0 = C_0 - F_0 = 8,83 - 7,965 = 0,865.$$

6.6. Задачи для самостоятельной работы

1. По формуле Блэка – Шоулса рассчитать цену опциона-колл и фьючерса, а затем найти цену опциона-пут. Расчет произвести согласно варианту.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
T	10	10	10	10	10	10	10	10
r	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
σ	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05
S	100	100	100	100	100	100	100	100
K	100	100	60	60	80	80	70	70

2. По формуле Блэка – Шоулса рассчитать цену опциона-пут и фьючерса, а затем найти цену опциона-колл. Расчет произвести согласно варианту.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
T	10	10	10	10	10	10	10	10
r	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
σ	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05
S	100	100	100	100	100	100	100	100
K	100	100	60	60	80	80	70	70

Литература

1. Четыркин, Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е. М. Четыркин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Дело Лтд, 1995. – 320 с.
2. Малюгин, В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа / В. И. Малюгин. – Минск : БГУ, 2001. – 318 с.
3. Ковалев, В. В. Сборники задач по финансовому анализу: учеб. пособие / В. В. Ковалев. – М. : Финансы и статистика, 1997. – 128 с.
4. Соболева, Т. О. Сборник задач по банковскому делу / Т. О. Соболева. – М. : МЭСИ, 1997. – 37 с.
5. Балабанов, И. Т. Сборник задач по финансам и финансовому менеджменту / И. Т. Балабанов. – М. : Финансы и статистика, 1997. – 78 с.
6. Терпугов, А. Ф. Математика рынка ценных бумаг / А. Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во НТЛ, 2004. – 167 с.

Учебное издание

**Поттосина Светлана Анатольевна
Валевская Ирина Болеславовна**

**МАТЕМАТИКА РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ:
Практикум
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

*Редактор Г. С. Корбут
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 09.07.2010. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,07. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 150 экз. Заказ 225.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6