Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра экономической информатики

С. А. Поттосина, Т. Г. Пинчук

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

Практикум для студентов специальности
«Информационные системы и технологии в экономике»
всех форм обучения

Минск БГУИР 2009

УДК 519.95 + 510.5(075.8)
ББК 22.176я73 + 22.12 я73
П59

Р е ц е н з е н т
проф. кафедры «Интеллектуальные информационные технологии» БГУИР,
канд. физ. мат.-наук Н. А. Гулякина

Поттосина, С. А.

П59 Основы дискретной математики и теории алгоритмов : практикум для студ. спец. «Информационные системы и технологии в экономике» / С. А. Поттосина, Т. Г. Пинчук. – Минск : БГУИР, 2009. – 86 с. : ил.
ISBN 978-985-488-373-1

Включены задачи по следующим темам: множества и отношения, логические функции и их минимизация, нормальные формы, элементы комбинаторного анализа, теория графов и др. Практические занятия ориентированы на закрепление теоретического материала курса, поэтому содержат описание алгоритмов решения типовых задач, а также задания для самостоятельной работы.

УДК 519.95 + 510.5(075.8)
ББК 22.176я73 + 22.12 я73

ISBN 978-985-488-373-1

Содержание

Тема 1. Множества

Абстрактная алгебраическая система, состоящая из множества подмножеств некоторого универсального множества с операциями дополнения, пересечения и объединения, составляет *булеву алгебру множеств*. Перечислим основные законы этой алгебры, используя общепринятое правило, что если в формуле отсутствуют скобки, устанавливающие порядок выполнения операций, то сначала выполняется дополнение, потом пересечение и затем объединение. Для повышения наглядности формулы знак пересечения множеств, подобно знаку арифметического умножения, будем опускать.

Коммутативность:

$A \cup B = B \cup A$; $\qquad A\,B = B\,A$.

Ассоциативность:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\qquad A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$.

Дистрибутивность:

$A\,(B \cup C) = A\,B \cup A\,C$; $\qquad A \cup B\,C = (A \cup B)\,(A \cup C)$.

Идемпотентность:

$A \cup A = A$; $\qquad A\,A = A$.

Законы де Моргана:

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$; $\qquad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Законы операций с константами (пустым и универсальным множествами):

$A \cup \varnothing = A$; $\qquad A\,U = A$;

$A\,\varnothing = \varnothing$; $\qquad A \cup U = U$;

$A \cup \overline{A} = U$; $\qquad A\,\overline{A} = \varnothing$.

Закон двойного дополнения:

$\overline{\overline{A}} = A$.

Занятие 1
Способы задания множеств. Операции над множествами. Доказательство теоретико-множественных тождеств и теорем

Вопросы к занятию:

1. Множество. Пустое и универсальное множества. Способы задания множеств.
2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера−Венна. Алгебра множеств.
3. Основные законы алгебры множеств.

Примеры решения задач

Задача 1. Записать в виде символов:

1) множество всех действительных чисел, квадрат которых меньше 2;

2) $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Решение

1) $A = \{x \in R \mid x^2 < 2\}$, где R – множество всех действительных чисел;

2) $M = \{ x \in Z \mid |x| \le 2 \}$, где Z – множество всех целых чисел.

Задача 2. Записать следующие множества с помощью перечисления элементов в виде числовых промежутков или с помощью символа $\varnothing$:

$M_1 = \{ x \in N \mid x < 6 \}$,

$M_2 = \{ x \in N \mid x < 0 \}$,

$M_3 = \{ x \in Z \mid |x| \le 2 \}$,

$M_4 = \{ x \in R \mid |x| \le 2 \}$,

$M_5 = \{ x \in R \mid (x^2 - 5)(x^2 + 3) = 0 \}$,

$M_6 = \{ x \in R \mid x > 3 \}$.

Решение

$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_2 = \varnothing$, $M_3 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $M_4 = [-2, +2]$, $M_5 = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$, $M_6 = [\ 3, \infty]$

Задача 3. Доказать или опровергнуть $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Решение

Построим диаграммы Эйлера–Венна для обеих частей проверяемого равенства, убедимся, что они одинаковы, т.е. нет данных для построения контрпримера.

Перейдём к доказательству. Докажем два встречных включения множеств $F = A\setminus(B \cup C)$ и $D = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$, а именно: $F \subseteq D$, $D \subseteq F$.

Пусть x – произвольный элемент множества F , т.е. $x \in A$ и $x \notin B \cup C$. Из определения объединения множеств следует, что $x \notin B$ и $x \notin C$. Поскольку $x \in$ $\in A$, то по определению разности множеств $x \in A \setminus B$ и $x \in A \setminus C$. Следовательно, $x \in D$, где $D = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Этим доказано, что произвольный элемент множества F является элементом множества D , т.е. $F \subseteq D$.

Докажем встречное исключение. Пусть $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Из определения пересечения множеств следует, что $x \in A \setminus B$ и $x \in A \setminus C$. Из определения разности множеств получаем $x \in A$, но $x \notin B$ и $x \notin C$. Из определения объединения множеств следует, что $x \notin B \cup C$. Тогда определение разности множеств дает $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Следовательно, произвольный элемент множества D является элементом множества F, т.е. $D \subseteq F$. Два встречных включения дают равенство F = D. Действительно, $F = D \Leftrightarrow F \subseteq D$ и $D \subseteq F$.

Задача 4. Доказать (A $\subset$ B) $\Rightarrow$ (A \ C $\subset$ B \ C).

Решение

Пусть A $\subset$ B и $x \in$ A \ C. Требуется доказать, что $x \in$ B \ C. По определению разности ($x \in$ A \ C) $\Rightarrow$ ($x \in$ A) и ($x \notin$ C). Поскольку $x \in$ A и выполняется включение A $\subset$ B, имеет место принадлежность $x \in$ B. Следовательно, ($x \in$ B) и ($x \notin$ C)$\Rightarrow$ $x \in$ B \ C, что и требовалось доказать.

Задача 5. Упростить выражение $\overline{A \cup (A \setminus \overline{B}) \cup (A \setminus \overline{B})}$.

Решение

Выразив операцию разности двух множеств через пересечение и дополнение, получим $\overline{A\cup(A\setminus\overline{B})\cup(A\setminus\overline{B}) = A\cup(A\cap\overline{\overline{B}})\cup(A\cap\overline{\overline{B}})} =$. Используем закон двойного дополнения: $= \overline{A\cup(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)} =$. Затем на основании дистрибутивного закона получим $= \overline{A\cup((A\cup\overline{A})\cap B)} =$. Применив закон A $\cup$ A = U и закон U $\cap$ B = B, получим $= \overline{A\cup(U\cap B)} = \overline{A\cup B}$, на основании закона де Моргана получим окончательно: $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.

Очевидно, что полученное выражение упростить нельзя.

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть Z – множество целых чисел. Описать словами множество X = { $x \in$ Z | x = 1 или (x–2) $\in$ Z }.

2. Какие из следующих утверждений справедливы:

а) 0$\in \varnothing$, б) $\varnothing$ = { 0 }, в) | { $\varnothing$ } | = 1, г) { { $\varnothing$ } } $\in$ {{{ $\varnothing$ }}}, д) | {{ $\varnothing$ }} | = 2.

3. Доказать, что для конечного множества | 2^{A} | = $2^{|A|}$.

4. Сформулировать следующие утверждения на языке теории множеств:

а) даны множества A, B и C, определить множество, включающее в себя только два из этих множеств;

б) решить предыдущую задачу при условии, что A, B и C взаимно пересекаются;

в) даны множества V, W, Y, X, Z . Определить множество, включающее в себя по крайней мере два из множеств V, W, Y, X, Z и не включающее Z.

5. Упростить выражения:

а) $(\overline{A \setminus B} \setminus B \cap C) \setminus \overline{\overline{C} \cup D}$;

б) $(A \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap C) \cap \overline{A} \cap B \setminus C$;

в) $\overline{\overline{A} \setminus \overline{B \cup C}} \setminus \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$;

г) $\overline{A} \cup A \cup B \cup \overline{\overline{B} \cup \overline{C}} \setminus A$;

д) $\overline{A} \cup (A \setminus \overline{B}) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B})$;

е) $\overline{A} \setminus \overline{B \cap C} \setminus A \cap \overline{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$.

Тема 2. Отношения

Отношения – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определенного признака R (свойства и т.п.) у элементов множества M (например, «*быть белым*» на множестве шаров в урне), т.е. $a \in R$ и $R \subseteq M$.

Двухместным, или *бинарным*, отношением R называется подмножество пар $(a, b) \in R$ прямого произведения $M_1 \cdot M_2$, т.е. $R \subseteq M_1 \cdot M_2$. При этом множество M_1 называют *областью определения отношения* R, множество M_2 – *областью значений*.

Пусть $R \subseteq A \cdot B$ определено в соответствии с изображением на рис. 2.1. Область определения $D(R)$ и область значений $Q(R)$ определяются соответственно: $D(R) = \{a: (a, b) \in R\}$, $Q(R) = \{b: (a, b) \in R\}$.

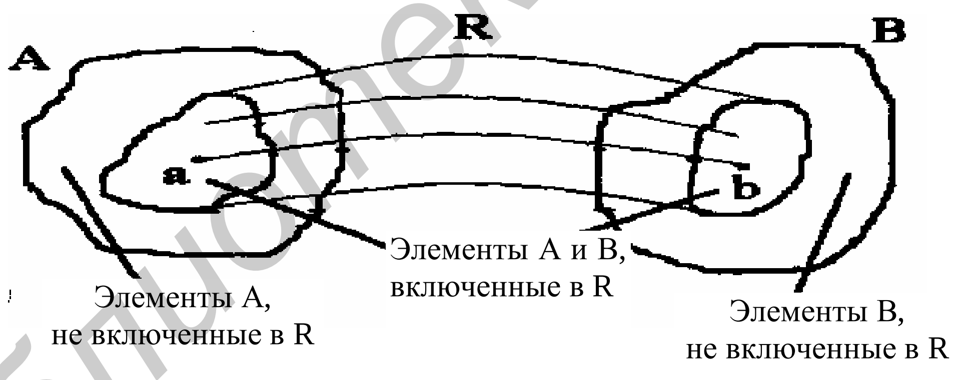


Рис. 2.1

Отношения, определенные на конечных множествах, обычно задаются:

1) списком (перечислением) пар, для которых это отношение выполняется. Например, $R = \{(a, b), (a, c), (b,d)\}$;

2) матрицей – бинарному отношению $R \subseteq M \cdot M$, где $M = \{a_1, a_2..., a_n\}$, соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен 1, если между a_i и a_j имеет место отношение R, или 0, если оно отсутствует.

Пусть R – отношение на множестве M, $R \subseteq M \times M$. Тогда:

1) R – рефлексивно, если имеет место $a\ R\ a$ для любого $a \in M$ (например отношение «жить в одном городе») ($\forall a \quad a\ r\ a$);

2) R – антирефлексивно, если ни для какого $a \in M$ не выполняется $a\ R\ a$ (например отношение «быть сыном») ($\forall a \quad a\ \overline{r}\ a$);

3) R – симметрично, если $a\ R\ b$ влечет $b\ R\ a$ (например отношение «работать на одной фирме») $(\forall a,b)(a\ r\ b \to b\ r\ a)$;

4) R – антисимметрично, если $a\ R\ b$ и $b\ R$ a, то $a = b$, т.е. ни для каких различающихся a и b ($a \neq$ b) не выполняется одновременно $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$ (например, отношения «быть сыном», «быть начальником») $(\forall a,b)$ $((a\ r\ b \quad и \quad b\ r\ a) \to (a = b))$;

5) R – транзитивно, если $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$ влекут $a\ R\ c$ (например отношения «быть моложе», «быть братом») $(\forall a,b,c)((a\ r\ b \quad и \quad b\ r\ c) \to (a\ r\ c))$.

Отношением эквивалентности (или просто эквивалентностью) называют бинарное отношение на множестве, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Например, отношение «жить в одном городе» на множестве людей.

Отношением нестрогого порядка (или нестрогим порядком) называют бинарное отношение на множестве, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, и *отношением строго порядка* (строгим порядком), если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Так как отношения на M задаются подмножествами, $R \subseteq M_1 \times M_2$ (или $R \subseteq M_2$, если $M_1{=}M_2{=}M$), для них *определимы* те же операции, что и над множествами:

1. Объединение $R_1 \cup R_2 = \{(a, b){:}(a, b) \in R_1$ или $(a, b) \in R_2\}$.
2. Пересечение $R_1 \cap R_2 = \{(a, b){:}(a, b) \in R_1$ и $(a, b) \in R_2\}$.
3. Разность $R_1 \setminus R_2 = \{(a, b){:}\ (a, b) \in R_1$ и $(a, b) \in R_2\}$.
4. Дополнение $\overline{R} = U \setminus R$, где $U = M_1 \times M_2$ (или $U = M^2$).
5. Обратное отношение $a\ R^{-1}\ b$ тогда и только тогда, когда $b\ R\ a{:}R^{-1} = \{(a, b){:}\ (b, a) \in R\}$. Например, если R – «быть моложе», то R^{-1} – «быть старше», если R – «быть сыном», то R^{-1} – «быть отцом (или матерью)».
6. Составное отношение (композиция) $R_1{\circ}R_2$. Пусть заданы множества M_1, M_2, M_3 и отношения $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ и $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Составное отношение действует из M_1 в M_2 посредством R_1, а затем из M_2 в M_3 посредством R_2, т.е. $(a, b) \in R_1{\circ}R_2$, если существует такое $c \in M_2$, что $(a, c) \in R_1$ и $(c, b) \in R_2$.

В частности, если отношение R определено на множестве M, $R \subseteq M^2$, то составное отношение $R{\circ}R = \{(a, b){:}\ (a, c),(c, b) \in$ R$\}$. Например, если R – «быть сыном», то $R{\circ}R$ – «быть внуком».

7. Транзитивное замыкание R° состоит из таких и только таких пар элементов a, b из M, т.е. $(a, b) \in R°$, для которых в M существует цепочка из $(k+2)$ элементов M, $k \geq 0$: $a, c_1, c_2, \dots, c_k, b$, между соседними элементами которой выполняется R: $aRc_1, c_1Rc_2, \dots, c_kRb$, т.е.: $R° = \{(a, b){:}\ (a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_k, b) \in R)$ (определение I).

Унарная операция транзитивного замыкания R° может быть также определена как бесконечное объединение: $R^{\circ}=R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup \ldots \cup R^{(n)} \cup \ldots$ (определение II).

Например, для отношения R – «быть сыном» составное отношение (композиция) $R^{\circ}R = R^{(2)}$ – «быть внуком», $R^{\circ}R^{\circ}R = R^{(3)}$ – «быть правнуком» и т.д. Тогда объединение всех этих отношений есть транзитивное замыкание R° – «быть прямым потомком».

Если отношение R транзитивно, то $R^{\circ} = R$. Например, транзитивное замыкание отношения R – «быть больше» совпадает с этим отношением, т.е. $R^{\circ} = R$.

8. Рефлексивное замыкание R^*. Пусть тождественное отношение $E = \{(a, a): a \in M)$. Тогда $R^* = R^{\circ} \cup E$. Если R транзитивно и рефлексивно, то $R^* = R$.

Занятие 2

Прямое (декартово) произведение множеств. Бинарные отношения. Способы их задания. Теоретико-множественные тождества алгебры отношений

Вопросы к занятию:

1. Прямое произведение двух множеств.
2. Прямое произведение нескольких множеств.
3. Бинарные и n-арные отношения.
4. Операции над отношениями. Обратное и диагональное отношения.

Примеры решения задач

Задача 1. Составить декартово произведение множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Доказать, что $A \times B \neq B \times A$. Доказать, что $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$.

Решение

Составим $A \times B$, соединяя в пару каждый элемент из A с каждым элементом из B : $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$.

Аналогично найдем

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$.

Очевидно, что $A \times B \neq B \times A$.

Докажем равенство $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$, доказывая два встречных включения.

Пусть $v = (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$. Тогда $x \in A$, $y \in B$ и $x \in B$, $y \in A$. Следовательно, $x \in A \cap B$. Поэтому $v = (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) = (A \cap B)^2$.

Пусть $v = (x, y) \in (A \cap B)^2$. Тогда $(x, y)\ (A \cap B) \times (A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cap B, y \in A \cap B \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ и $(x, y) \in B \times A \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$.

В случае операции над декартовыми произведениями множеств можно пользоваться прямоугольными диаграммами, считая все встречающиеся множества подмножествами множества действительных чисел.

На построенных диаграммах декартова произведения $A \times B$ и декартова произведения $B \times A$ видим, что фигуры на графиках совпадают только при $A = B$, т.е. $(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$ (рис. 2.2).

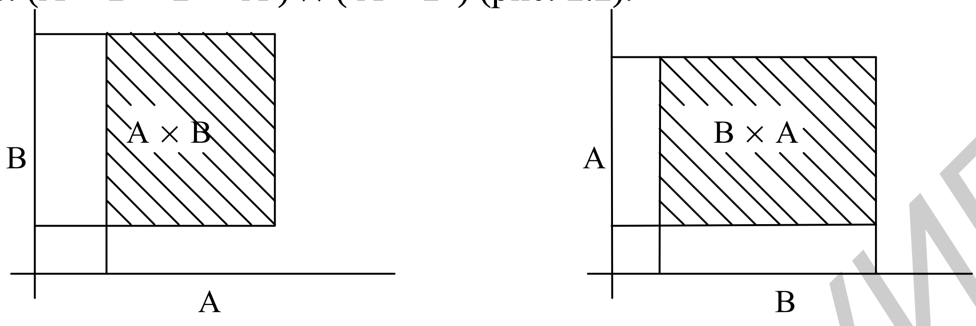


Рис. 2.2

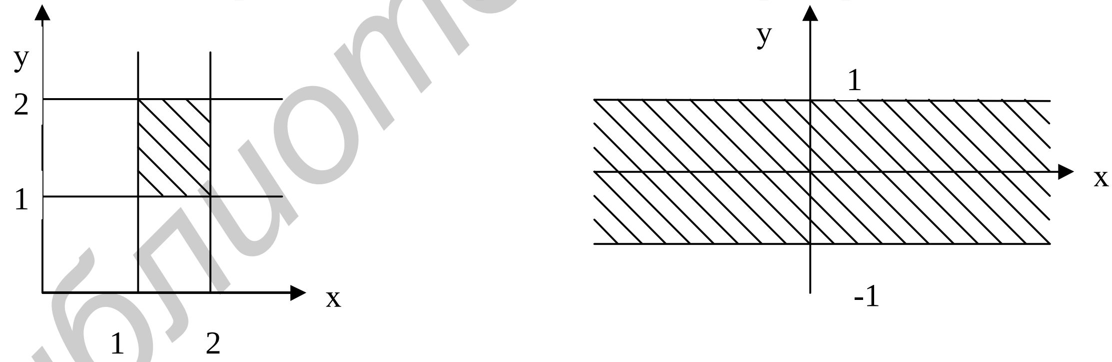
Задача 2. На координатной плоскости построить следующие множества:

а) $[1, 2] \times [1, 2]$,

б) $R \times [-1, 1]$.

Решение

а) Первое множество помещаем на оси Ох, второе на оси Оу. Очевидно, что множество всех пар, т.е. декартово произведение, изображается *точками заштрихованного квадрата, но без верхней и левой сторон* (рис. 2.3, а).



а б

Рис. 2.3

б) Первым элементом пары может быть любое число из $\boldsymbol{R}$ – множества всех действительных чисел, вторым элементом пары – любое число из отрезка $[-1,+1]$. Поэтому геометрическим изображением произведения $R \times [-1,1]$ будет бесконечная полоса между прямыми $y = -1$ и $y = 1$, включая их (рис. 2.3, б).

Задача 3. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение $R \subseteq M * M$, если R означает – «быть строго меньше».

Решение

Отношение R как множество содержит такие пары элементов a, b из M, что a < b: R = {(a, b): a, b $\in$ M; a < b}.

Тогда R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}. Матрица отношения приведена на рис. 2.4.

R	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Рис. 2.4

Задача 4. Пусть M = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Составить матрицы отношения R1 $\cup$ R2, R3 $\subseteq$ M*M, если:

а) R1 – «быть делителем»;

б) R2 – «иметь общий делитель, отличный от единицы»;

в) R3 – «иметь один и тот же остаток от деления на 3».

Решение

а) R1 = {(a, b): a, b $\in$ M; a – делитель b} и выполняется для пар {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}. Эти пары (a, b) $\in$ R1, определяют наличие единиц в матрице отношения R1 $\subseteq$ M2 на пересечении строки элемента a и столбца элемента b; a, b $\in$ M (рис. 2.5, а);

б) R2 = {(a, b): a, b $\in$ M; a и b имеют общий делитель, c $\neq 1$}. Матрица отношения R2 представлена на рис. 2.5, б;

в) R3 = {(a, b): a, b $\in$ M; a, b имеют один и тот же остаток от деления на 3}. Матрица отношения R3 приведена на рис. 2.5, в.

R_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

а

R_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	1	1	1	0	1

б

R_3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1
4	1	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	1	0
6	0	0	1	0	0	1

в

Рис. 2.5

Задача 5. Составить матрицы отношений, заданных на системе множеств $\beta(M)$, $M = \{a, b, c\}$:

1) R_1 – «пересекаться с» (иметь непустое пересечение);

2) R_2 – «являться строгим включением».

Решение

$\beta(M) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Матрицы отношений R_1 и R_2 представлены на рис. 2.6.

R₁	Ø	{a}	{b}	{c}	{a, b}	{{a, c}	{b, c}	{a, b, c}
Ø	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	0	1	0	0	1	1	0	1
{b}	0	0	1	0	1	0	1	1
{c}	0	0	0	1	0	1	1	1
{a, b}	0	1	1	0	1	1	1	1
{a, c}	0	1	0	1	1	1	1	1
{b, c}	0	0	1	1	1	1	1	1
{a, b, c}	0	1	1	1	1	1	1	1

R₂	Ø	{a}	{b}	{c}	{{a, b}	{a, c}	{{b, c}	{a, b, c}
Ø	0	1	1	1	1	1	1	1
{a}	0	0	0	0	1	1	0	1
{b}	0	0	0	0	1	0	1	1
{c}	0	0	0	0	0	1	1	1
{a, b}	0	0	0	0	0	0	0	1
{a, c}	0	0	0	0	0	0	0	1
{b, c}	0	0	0	0	0	0	0	1
{a, b, c}	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2.6

Задача 6. Пусть R – отношение на N: $R = \{(a, b): a>b)$ – «быть больше». Выполнить операции над R.

Решение

$R \cup R = R;$

$R \cap R = R;$

$R \backslash R = 0;$

$R^{-1} = \{(a, b): a<b\}$ – «быть меньше»;

$\overline{R} = U \backslash R = \{(a, b): a \leq b\}$ – «быть не больше»;

$R°R = R^{(2)} = \{(a, b): a-1 > b)$ – «быть больше по крайней мере на 2»;

$R° = R$ (так как R транзитивно);

$R^* = R° \cup E = \{(a, b): a > b$ или $a = b) = \{(a, b): a \geq b\}$ – «быть не меньше».

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать или опровергнуть утверждения:

$(\forall A, B)(A \times B = B \times A)$;

$(\exists A, B)(A \times B = B \times A)$;

$(\exists A \forall B)(A \times B = B \times A)$;

$(\forall B \exists A)(A \times B = B \times A)$;

$(\forall A, B)((A \subset B) \Rightarrow (A \times B = B \times A))$;

$(\forall A, B, C)(A \times ((B \cup C)) = (A \times B) \cup (A \times C))$;

$(\forall A, B, C)(A \times ((B \cup C)) = (A \times B) \cap (A \times C))$;

$(\forall A, B, C)(A \cup (B \times C) = (A \times C) \cup (B \times C))$;

$(\forall A, B, C)((A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C))$;

$(\forall A, B, C)((A \setminus B \times C = (A \times C) \setminus (B \times C))$;

$(\forall A, B, C)((A \cap B) \times C = ((A \times C) \cap (B \times C))$.

2. Доказать, предварительно построив прямоугольные диаграммы,

$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

3. Выполнить условие задачи 5 для отношений:

а) R3 – «являться нестрогим включением $\subseteq$»;

б) R4 – «быть дополнением к».

4. Пусть $M = \beta(A)$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Найти все элементы (пары) отношения R на M, если R означает:

а) $\subset$; б) $\subseteq$; в) «пересекаться с»; г) «быть дополнением к».

Задать R описанием его характеристического свойства.

5. Пусть отношение R задано на $M = \{1,2,3,...,9\}$. Выписать все элементы R, если:

а) $R = \{(a, b)\}$: $a, b \in M$; $(a + 1)$ – делитель $(a + b)\}$;

б) $R = \{(a, b)\}$: $a, b \in M$; a – делитель $(a + b)$, $a \neq 1\}$.

6. Пусть на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$ определено отношение $\boldsymbol{R}$ – «быть больше». Выполнить операции над отношением $\boldsymbol{R}$; задать полученные в результате операций отношения характеристическим свойством, списком, а также назвать отношения. Сравнить отношения; определить их свойства.

Занятие 3
Свойство бинарных отношений. Отношение эквивалентности и порядка. Функциональное отношение. Виды отображений

Вопросы к занятию:

1. Граф бинарного отношения.
2. Свойства бинарных отношений.
3. Отношение эквивалентности и порядка. Фактор-множества.
4. Частные случаи отображения множества во множество.

Примеры решения задач

Задача 1. Отношение $r = \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ на множестве А $=\{1, 2, 3, 4\}$ изобразить графом. Определить, какими свойствами обладает данное отношение. Какими парами следует пополнить это отношение, чтобы оно стало рефлексивным (симметричным, транзитивным, связным)? Установить, какие пары следует удалить из отношения, чтобы оно стало антирефлексивным (антисимметричным).

Решение

Отношение r не является ни рефлексивным (для рефлексивности не хватает пар (2, 2) и (3, 3)), ни антирефлексивным (для антирефлексивности следует удалить пары (1, 1) и (4, 4), т.е. удалить все петли из графа отношения (рис. 2.7, а)).

а б

Рис. 2.7

Отношение r не симметрично, т.к. не хватает пар (3, 1), (3, 2), (4, 3) (в симметричном отношении все стрелки графа двухсторонние). Отношение r не является антисимметричным, т.к. лишней является одна из пар (1, 2) или (2, 1). Антисимметричность допускает петли в графе отношения, но не допускает двухсторонних стрелок. Отношение r не транзитивно, т.к. не хватает пар (2, 4), (1, 4). На графе транзитивного отношения любая точка А, которая является началом и концом двух стрелок соответственно, будет вершиной треугольника, иллюстрирующего сложение векторов (рис. 2.7, б). Отношение r не является связным, так как не существует пути между любыми двумя вершинами этого графа, например, между вершинами 3 и 1, 4 и 3, 4 и 2 и т.д.

Задача 2. Построить график и установить свойства бинарного отношения r в множестве действительных чисел.

$x \; r \; y \quad \Leftrightarrow \quad |x+y|>1$

Решение

Все пары чисел, вступивших в отношение r, являются координатами точек плоскости, лежащих либо выше прямой $x + y = 1$, либо ниже прямой $x - y = -1$.

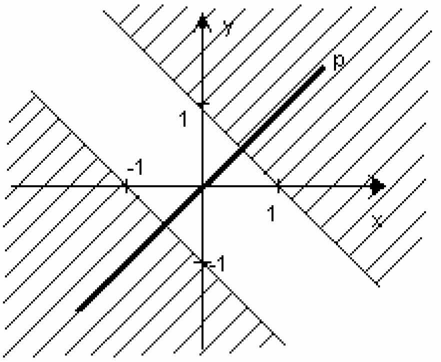


Рис. 2.8

График отношения r является объединением двух полуплоскостей (заштрихованы на рис. 2.8).

Рассмотрим свойства отношения r.

а) рефлексивность: $\forall a \quad a\, r\, a$. Признаком рефлексивности является включение графика диагонального отношения d в график отношения r, т.е. $d \subset r$. Отношение r не является рефлексивным;

б) антирефлексивность: $\forall a \quad a\, \overline{r}\, a$. Признаком антирефлексивности является пустое пересечение диагонального отношения d с графиком отношения r. Отношение r не является антирефлексивным;

в) симметричность: $(\forall a, b)(a\, r\, b \to b\, r\, a)$.

Признаком симметричности отношения является равенство между отношением r и обратным к нему r^{-1}, т.е. $r = r^{-1}$. Отношение r симметрично в силу коммутативности операции сложения;

г) антисимметричность: $(\forall a, b)((a\, r\, b \quad и \quad b\, r\, a) \to (a = b))$. Признаком антисимметричности отношения является включение $r \cap r^{-1} \subset d$. Действительно, $(2, 0) \in r$, $(0, 2) \in r^{-1}$, но $2 \neq 0$. Заметим, что если график отношения $r = d$, то это отношение одновременно симметрично и антисимметрично;

д) транзитивность: $(\forall a, b, c)((a\, r\, b \quad и \quad b\, r\, c) \to (a\, r\, c))$. Признак транзитивности: $r * r \subset r$. Отношение r не является транзитивным. Контрпример: $(2, 0) \in r$, $(0, -2) \in r$, $(2, -2) \notin r$.

Задача 3. Пусть R_1 и R_2 – бинарные отношения на множестве S. Доказать, что композиция $R_1 * R_2$ симметричных отношений R_1 и R_2 симметрична тогда и только тогда, когда $R_1 * R_2 = R_2$ и R_1.

Решение

Поскольку для симметричных бинарных отношений $R = R^{-1}$, то $R_1 * R_2 = R_1^{-1} * R_2^{-1}$ *и* $R_2 * R_1 = R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Нетрудно доказать, что $(R_1 * R_2)^{-1} =$ $= R_2^{-1} * R_1^{-1}$.

Действительно, пусть $n = (x, y) \in (R_1 * R_2)^{-1}$. Тогда $(y, x) \in R_1 * R_2$, следовательно, существует такое z, что $y R_1 z$ *и* $z R_2 x$, а значит, $(z,\ y) \in R_1$ и $(x,\ z) \in R_2^{-1}$ Поскольку $(x, z) \in R_2^{-1}$ *и* $(z, y) \in R_1^{-1}$, то $n = (x, y) \in R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Таким образом, $(R_1 * R_2)^{-1} = R_2^{-1} * R_1^{-1}$. Следовательно, в условиях задачи $R_1 * R_2 = (R_1 * R_2)^{-1}$, т.е. композиция $R_1 * R_2$ симметричных отношений симметрична, если $R_1 * R_2 = R_2 * R_1$.

Задача 4. Найти область определения $\prod r_A R$, область значения $\prod r_B R$ отношения $R \subseteq A \times B$, определить отношения $R^{-1}, R * R, R * R^{-1}, R^{-1} * R$. Отношение R имеет вид $R = \{(x,\ y) | x,\ y \in D,\ 2x \geq 3y\}$.

Решение

Поскольку $A = B = D$, то очевидно, что $\prod r_{D=A} R = \prod r_{D=B} = D$; $R^{-1} = \{(x,\ y) | 2y \geq 3x,\ x, y \in D\}$;

$$R * R = \{(x,\ y) | \exists z \quad xRz,\ zRy,\ \ x, y, z \in D\} =$$

$$= \{(x, y) | \exists z \quad 2x \geq 3z,\ 2z \geq 3y\} == \{(x, y) |\ 4x \geq 9y, \quad x, y \in D\};$$

$$R * R^{-1} = \{(x, y) | \exists z \quad 2x \geq 3z, \quad y \geq 3z\}.$$

Такое $z = (x + y)\dfrac{2}{3}$ можно найти для любых x и y, следовательно, $R * R^{-1} = \{(x,\ y) |\ x,\ y \in D\} = D^2$;

$$R^{-1} * R = \{(x,\ y) | \exists\, z \quad 2z \geq 3x, \quad 2z \geq 3y\} == \{(x, y) | x \in D,\ y \in D\} = D^2.$$

Поскольку $z = \dfrac{(x + y)3}{2}$ можно найти для любых x и y из D.

Задача 5. Каковы свойства отношений, заданных:

1. На множестве натуральных чисел N:

а) R1 – «быть не больше ≤»;

б) R2 – «быть делителем»;

в) R3 – «быть равным».

2. На множестве RxR точек действительной плоскости R:

а) R4 – «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат»;

б) R5 – «быть симметричным относительно оси X».

3. На системе множеств β(M):

а) R6 – «пересекаться с» (иметь непустое пересечение);

б) R7 – «являться строгим включением ⊂».

4. На множестве людей:

а) R8 – «быть сыном»;

б) R9 – «жить в одном городе»;

в) R10 – «быть братом».

5. На множестве элементов структуры:

а) R11 – «быть непосредственно связанным с»;

б) R12 – «быть начальником».

Решение

1 . На множестве N:

а) R1 = {(a, b): a ≤ b} :

• *рефлексивно, не антирефлексивно*, так как выполняется a ≤ a для всех a ∈ M, например 2 ≤ 2;

• не симметрично, так как 2 ≤ 3, но неверно,что 3 ≤ 2;

• антисимметрично, поскольку если a ≤ b, a b ≤ a, то a = b;

• транзитивно, так как если a ≤ b, ab≤ c, то a ≤ c, например, 2 ≤ 3, 3 ≤ 4 и 2 ≤ 4;

б) R2 = {(a, b): a – делитель b}:

• *рефлексивно, не антирефлексивно*, так как любое число делит само себя без остатка: a/a = 1 для всех a ∈ N;

• *не симметрично, антисимметрично*, например 2- делитель 4, но 4 не является делителем 2;

• транзитивно, так как если b/a ∈ N и c/b ∈ N, то c/a = b/a • c/b ∈ N, например, если 6/3 = 2 ∈ N и 18/6 = 3 ∈ N, то 18/3 = 18/6 * 6/3 =6 ∈ N;

в)R3 = {(a,b):a = b}:

• *рефлексивно, не антирефлексивно*, поскольку a = a для всех a ∈ N;

• симметрично, так как если a = b, то b = a;

• антисимметрично, так как если a R3 b и b R3 a, то a = b;

• транзитивно, так как если a = b и b = c, то a = c.

2. На множестве точек действительной плоскости R x R:

а) R4 = {((x1, y1), (x2, y2))} : (x1)2 + (y1)2 = (x2)2 + (y2)2} :

• *рефлексивно, не антирефлексивно*, так как x2 + y2 = x2 + y2 для любых точек (x, y) действительной плоскости R x R;

• *симметрично, не антисимметрично*, так как, например, для точек (2, 3) и (–2, 3) имеет место 22 + 32 = (–2)2 + 32, но (2, 3) ≠ (–2, 3);

• транзитивно, поскольку если (x1, y1) и (x2, y2) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, а также – (x2, y2) и (x3, y3), то и (x1, y1) и (x3, y3) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат;

б) R5 = {((x1, y1), (x2, y2)): x1 = x2, y1= –y2}:

• не рефлексивно, так как для точек плоскости (x, y), не находящихся на оси X, т.е. для точек с координатами $y \neq 0$, не выполняется (x, y) R5 (x, y);

• не антирефлексивно, так как точка плоскости симметрична самой себе, если она лежит на оси X, т.е. для точек (x, y) с координатами y = 0 имеет место (x, y) R5 (x, y);

• симметрично, например, (2, 3) R5 (2, –3) и (2, –3) Rs (2, 3);

• не антисимметрично, поскольку имеет место, например, (2, 3) R5 (2, –3) и (2, –3) R5 (2, 3), но $(2, -3) \neq (2, 3)$;

• не транзитивно, так как, например, (2, 3) R5 (2, –3) и (2, –3) R5 (2, 3), но не выполняется (2, 3) R5 (2, 3).

3. На системе множеств β(M):

а) R6 = {(A, B): $A \cap B \neq \varnothing$, A, B $\subseteq$ β (M)} :

• не рефлексивно, поскольку для $\varnothing \in \beta(M)$ имеет место $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$;

• не антирефлексивно, так как для $A \in \beta(M)$, если A не пусто, т.е. $A \neq \varnothing$, то $A \cap A \neq \varnothing$, т.е. отношение выполняется;

• симметрично, так как если A пересекается с B, то и B – с A;

• не антисимметрично, поскольку A R6 B и B R6 A для $A \neq B$;

• не транзитивно, например, {a} R6 {a, b} и {a, b} R6 {b}, но {a} R6 {b} не выполняется;

• *не рефлексивно*, *антирефлексивно*, так как ни для каких $A \in \beta(M)$ не выполняется $A \subset A$;

• не симметрично, поскольку из $A \subset B$ не следует $B \subset A$;

• антисимметрично, так как ни для каких A и B, $A \neq B$ не выполняется одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$;

• транзитивно, так как для любых A, B, $C \in \beta(M)$ из $A \subset B$ и $B \subset C$ следует $A \subset C$.

4. На множестве людей:

а) R8 = {(a, b): a – сын b}:

• *не рефлексивно, антирефлексивно*, так как ни для каких a не выполняется: a – сын a;

• не симметрично, антисимметрично, поскольку ни для каких $a \neq b$ не выполняется: a – сын b и b – сын a;

• не транзитивно, так как если: a – сын b и b – сын c, то a не сын c;

б) R9 = {(a, b): a живет в одном городе с b}:

• *рефлексивно, не антирефлексивно*, так как a R9 a для всех a;

• симметрично, поскольку для любых a, b, если a R9 b, то b R9 a;

• не антисимметрично, так как имеет место a R9 b и b R9 a для $a \neq b$

• транзитивно, поскольку для всех a, b, c, если a R9 b n b R9 c, то a R9 c;

в) R10 ={(a, b): a – брат b}:

• *не рефлексивно, антирефлексивно* из-за очевидного отсутствия a R10 a для всех a;

• не симметрично, так как в общем случае между братом a и сестрой b имеет место a R10 b, но не b R10 a;

• не антисимметрично, так как если a и b – братья, то a R10 b и b R10 a, но $a \neq b$;

• транзитивно, если называть братьями людей, имеющих общих родителей (отца и мать).

5. На множестве элементов структуры:

а) R11= {(a, b): a – непосредственно связан с b}:

• не рефлексивно, антирефлексивно, если в конкретной интерпретации a R11 a не имеет смысла;

• симметрично, не антисимметрично, поскольку для всех a ≠ b, если выполняется a R11 b, то b R11 a;

• не транзитивно, так как при a R11 b и b R11 c не выполняется a R11 c (a и c связаны, но опосредованно);

б) R12 = {(a, b): a – начальник b}:

• не рефлексивно, антирефлексивно (см. R11);

• не симметрично, антисимметрично, так как для всех a ≠ b не выполняется одновременно a R12 b и b R12 a;

• транзитивно, так как если a – начальник b и b – начальник c, то a – начальник c.

Задача 6. Пусть на множестве M = {2, 4, 6} определено отношение R – «быть меньше». Задать характеристическим свойством и списком отношение R, обратное отношение R^{-1} и дополнение $\overline{R}$. Сравнить отношения. Определить их свойства.

Решение.

$R = \{(a, b): a < b\}$ –«быть меньше». R= {(2, 4), (2, 6), (4, 6)}.

$R^{-1} = \{(a, b): \{b, a) \in R) = \{(a, b): a > b\}$ – «быть больше». R^{-1} = (4, 2), (6, 2), (6, 4)}.

$\overline{R} = (MxM)\backslash R = \{(a, b): (a, b) \notin R) = \{(a, b): a \geq b\}$ – «быть не меньше».

$\overline{R}$ = {(2, 2), (4, 2), (4, 4), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}.

Отношения R и R^{-1} – антирефлексивны, антисимметричны, транзитивны, т.е. являются отношениями строгого порядка. Эти отношения задают полный порядок на множестве M.

Отношение $\overline{R}$ – рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, т.е. является отношением нестрогого порядка; оно также задает полный порядок на множестве M.

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать, что если R_1 и R_2 рефлексивны и симметричны, то рефлексивны и симметричны отношения $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1 * R_2$, R_1 *и* R_2 – бинарные отношения на множестве S.

2. Построить бинарное отношение:

а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

б) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;

в) рефлексивное, не симметричное, транзитивное;

г) не рефлексивное, антисимметричное, транзитивное.

3. Какими свойствами характеризуются следующие отношения:

а) отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$ $\quad R = \{(a, b) \mid (a - b) - \text{чётное};\}$

б) отношение на множестве людей $R = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имеют общего предка};\}$

в) отношение на множестве людей $R = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ родственники};\}$

г) отношение на множестве ЭВМ

$$R = \left\{(a, b) \left| \begin{array}{l} \text{ЭВМ}(a) \text{ совместима с ЭВМ}(в) \text{ (т.е. программа, написанная для } a, \\ \text{может выполняться на } в) \end{array} \right. \right\}.$$

4. Доказать, что если R_1 и R_2 – отношения эквивалентности на A, то

а) $R_1 * R_2 = A^2 \Rightarrow R_1 = A^2$;

б) $R_1 * R_2 = A^2 \Rightarrow R_2 * R_1 = A^2$.

5. Доказать, что $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$, где a и b – бинарные отношения на A.

6. Доказать, что для бинарных отношений выполняются тождества:

$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$, $\quad \overline{R^{-1}} = (\overline{R})^{-1}$,

$(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$, $\quad (R^{-1})^{-1} = R$.

7. Найти область определения $\Pi r_A R$, область значений $\Pi r_B R$ отношения $R \subseteq A \times B$, определить $R^{-1}, R * R, R * R^{-1}, R^{-1} * R$ для следующих отношений:

а) $R = \{(x, y) \mid x \text{ делит } y,\ x, y \in N\}$; N – множество натуральных чисел;

б) $R = \{(x, y) \mid x + y < 0,\ x, y \in D\}$; D – множество действительных чисел.

8. Определить тип отображений (биекция, инъекция и т.д.).

а) $\{(k, k+1) \mid k \in Z\}$, Z – множество целых чисел;

б) $\{(x, x^3) \mid x \in D\}$, D – множество действительных чисел;

в) $\{(x, 2^x) \mid x \in D\}$;

г) $\{(x, \sin x) \mid x \in D\}$.

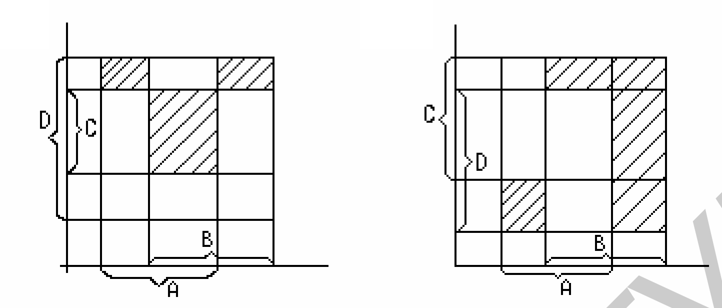
9. Доказать следующие тождества для любой функции:

а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

б) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

в) $f^{-1}(\bigcap^{k} R_i = \bigcap^{k} f^{-1}(R_i), \quad f : A \to B, \quad R_i \subseteq B$.

10. Функционирование алгоритма представляется в виде диаграммы декартовых произведений (рис. 2.9), где A, B, C, D – одномерные массивы. Описать заштрихованную часть плоскости двумя способами на теоретико-множественном уровне и доказать полученное тождество.



а б

Рис. 2.9

Тема 3. Логические функции. Нормальные формы

Пусть B = {0, 1} – двухэлементное множество, а x_i – двоичная переменная, принимающая значение из B. Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных – логическая: «Да» – «Нет», «истинно» – «ложно», «1» – «0», «и» – «л».

Алгебра, образованная множеством B, вместе со всеми возможными операциями на нем называется *алгеброй логики*. Функцией алгебры логики (или логической функцией) от *n* переменных называется *n*-арная операция на B.

Итак, логическая функция $f(x_1,..., x_n)$ – это функция, принимающая значение 0,1. Аргументы данной функции принимают значения из множества B. Другими словами, это функция вида $f(x_1,...,x_n) - B^n \to B$.

Всякая логическая функция *n* переменных может быть задана таблицей, в левой части которой перечислены все 2^n наборов значений переменных (т.е. двоичных векторов длины *n*), а в правой части – значения функции на этих наборах. В этой таблице (*таблице истинности*) наборы расположены в лексикографическом порядке, который совпадает с порядком возрастания значений наборов, рассматриваемых как двоичные числа.

Характеристическое множество логической переменной функции – это множество M_1 двоичных наборов, на котором функция принимает значение 1. Логическая функция может быть задана с помощью своего характеристического множества M_1 или с помощью множества M_0 наборов, на котором она равна 0.

Переменная x_i в функции $f(x_1,\ldots x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots x_n)$ называется фиктивной (несущественной), если изменение значения x_i в любом наборе значений переменных не меняет значение функции, т.е. $f(x_1,\ldots x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots x_n) = \quad = f(x_1,\ldots x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots x_n)$.

В табл. 3.1 и 3.2 представлены булевы функции одной и двух переменных.

Таблица 3.1

Разд.	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

φ_0 и φ_3 – константы 0 и 1

$j_1(x) = x$, $j_2(x) = \bar{x}$ – отрицание x (функция НЕ).

Таблица 3.2

Разд. *1*	X_2	Ψ_0	Разд. *1*	Ψ_2	Разд. *3*	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}	Ψ_{13}	Ψ_{14}	Ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функции Ψ_0 и Ψ_{15} – константы 0 и 1, т.е. функции с двумя несущественными переменными.

Функция Ψ_1 называется *конъюнкцией* (логическим умножением) и обозначается как $x_1\&x_2$, $x_1\wedge x_2$, $x_1\cdot x_2$. Иногда её называют функцией «И».

Функция Ψ_7 называется *дизъюнкцией* x_1 и x_2 и обозначается как , $x_1\vee x_2$, x_1+x_2. Её часто называют функцией ИЛИ.

Функция Ψ_6 – это *сложение по модулю 2* и обозначается как $x_1\oplus x_2$, $x_1\Delta x_2$, $x_1\not\equiv x_2$.

Функция Ψ_9 называется *эквивалентностью,* или *равнозначностью*; её обозначают как $x_1\infty x_2$, $x_1\equiv x_2$.

Функция Ψ_{13} называется *импликацией*; её обозначение $x_1\rightarrow x_2$, $x_1\supset x_2$. (читается «если x_1, то x_2»).

Функция Ψ_8 называется *стрелкой Пирса* (функция Вебба); ее обозначение $x_1\downarrow x_2$.

Функция Ψ_{14} называется *штрихом Шеффера*; ее обозначение $x_1 \mid x_2$.

Остальные функции специальных названий не имеют.

Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).*

Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ).*

Любую логическую функцию, не равную тождественно единице, можно представить в *ДНФ*. Любую логическую функцию, не равную тождественно нулю, можно представить в *КНФ*.

Дизъюнктивная нормальная форма логической функции называется *совершенной (СДНФ),* если все ее составляющие есть конституенты единицы.

Всякую, не равную тождественно нулю, логическую функцию можно представить в виде *СДНФ*.

Конъюнктивная нормальная форма называется *совершенной* (*СКНФ),* если все ее составляющие есть конституенты нуля.

Всякую, не равную тождественно единице, *логическую функцию* можно представить в виде *СКНФ*.

Занятие 4
Логические функции и их задание

Вопросы к занятию

1. Таблицы истинности основных логических функций.
2. Алгебра логических функций (основные тождества и теоремы).
3. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

Примеры решения задач

Задача 1. В табл. 3.3 представлена логическая функция трех переменных. Задать функцию множествами.

Таблица 3.3

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение

Функцию f можно задать множествами:

M_1 = { 001, 010, 101, 111} или M_0 = { 000, 011, 100, 110}.

Задача 2. Построить *ДНФ* функции *f*, используя равносильные формулы:

$$(x_1 \to x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2, \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$$

$$f = (x_1 \to x_2) \to \left(\overline{x_3 \to x_1}\right).$$

Решение

Приведение к *ДНФ* сводится к раскрытию скобок в соответствии с первым дистрибутивным законом в булевой формуле функции, содержащей знаки инверсии на самих переменных, с последующим исключением тождественных нулей и объединением равных членов.

$$f = (x_1 \to x_2) \to \left(\overline{x_3 \to x_1}\right) = \overline{\bar{x}_1 \vee x_2} \vee \left(\overline{\bar{x}_3 \vee x_1}\right) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_1 \,.$$

Задача 3. Построить *КНФ* функции *f*, используя полученную выше *ДНФ* этой функции:

$$f = (x_1 \to x_2) \to \left(\overline{x_3 \to x_1}\right) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_1 \,.$$

Решение

Приведение к *КНФ* сводится к раскрытию скобок в соответствии со вторым дистрибутивным законом в булевой формуле, содержащей знаки инверсии на самих переменных, с последующим исключением тождественных единиц и объединением равных членов:

$$f = (x_1 \to x_2) \to \left(\overline{x_3 \to x_1}\right) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_1 = (x_1 \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) =$$

$$= (x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_1)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) = (x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \,.$$

Задача 4. Привести к *СДНФ* функцию $f = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_3 \cdot \bar{x}_1$.

Решение

При аналитическом приведении *ДНФ* к *СДНФ* элементарные конъюнкции *k*, не содержащие переменной x_e, заменяются равносильными формулами вида $k = k(x_e \vee \bar{x}_e)$, к которым применяется первый дистрибутивный закон:

$$f = x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_1 = x_1 \bar{x}_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_3 \bar{x}_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_1 x_2 \vee x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \,.$$

Задача 5. Привести к *СКНФ* функцию $f = (x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

Решение

При аналитическом приведении *КНФ* к *СКНФ* элементарные дизъюнкции q, не содержащие переменной x_e, заменяются равносильными формулами $q = q \vee x$, к которым затем применяется второй дистрибутивный закон:

$$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) = (x_1 \vee x_3 \vee x_2 \overline{x}_2)(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_1 \overline{x}_1)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \overline{x}_3) =$$

$$= (x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_1)(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_1)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) =$$

$$= (x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) .$$

Задача 6. Построить *СДНФ* и *СКНФ* функции f, заданной таблицей истинности.

Таблица 3.4

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Решение

Алгоритм построения *СДНФ* по таблице истинности функции состоит из трех шагов.

1. В таблице истинности выбираются наборы, на которых функция принимает значение 1 (единицы).
2. Для наборов, выбранных на первом шаге, составляются конституенты единицы, в которые переменная входит с инверсией, если в соответствующем наборе она принимает значение 0 (ноль), и без инверсии, если в соответствующем наборе она принимает значение 1 (единицы).
3. Составляется дизъюнкция построенных на втором шаге конституент единицы.

Алгоритм построения *СКНФ* по таблице истинности логической функции состоит из трех шагов.

1. В таблице истинности функции выбираются наборы, на которых функция принимает значение 0 (нуля).
2. Для этих наборов составляются конституенты нуля, в которые переменная входит с инверсией, если в наборе она принимает значение единицы, и без инверсии, если в наборе она принимает значение нуля.
3. Составляется конъюнкция конституент нуля, построенных на предыдущем шаге.

1) $M_1 = \{000, 011, 100, 110\}$;

2) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$; $\bar{x}_1 x_2 x_3$; $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$; $x_1 x_2\bar{x}_3$;

3) $СДНФ = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3$;

4) $M_0 = \{001, 010, 101, 111\}$;

5) $x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$; $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$; $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$;

6) $СКНФ = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Задача 7. Доказать тождественную истинность формулы, задающей логическую функцию *f*, с помощью: а) таблицы истинностей; б) приведением формулы к *ДНФ*:

$$f = (x \to y) \to ((x \to z) \to (x \to yz)).$$

Решение

а) Строим таблицу истинностей.

Таблица 3.5

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
x y z	*(x→y)*	→	*((x→z)*	→	*(x→*	*yz))*
0 0 0	1	1	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1	1	0
0 1 0	1	1	1	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	0	0	0
1 1 0	1	1	0	1	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1
	3	6	4	5	2	1

Результат вычисления находится в 6-м столбце. Поскольку 6-й столбец состоит из одних «1», исходная формула тожественно истинна, а соответствующая ей функция равна константе 1.

б) Воспользуемся равносильной формулой $x \to y = \bar{x} \vee y$ для преобразования формулы $f = (x \to y) \to ((x \to z) \to (x \to yz)) = \overline{\bar{x} \vee y} \vee (\overline{\bar{x} \vee z} \vee \bar{x} \vee yz) \Rightarrow$ (применяем закон де Моргана) $\Rightarrow x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x} \vee yz \Rightarrow$ (применяем теорему обобщенного склеивания) $\Rightarrow x\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{z} \Rightarrow$(применяем теорему поглощения)

$\Rightarrow x\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee x \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy \Rightarrow$ (применяем закон исключения третьего)

$\Rightarrow 1 \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy = 1$, что и требовалось доказать.

Задача 8. Привести к *ДНФ* и *КНФ* формулу $f = (x \to (y \to z)) \to$ $\to ((x \to \overline{z}) \to (x \to \overline{y}))$

Решение

Приведение к *ДНФ* сводится к раскрытию скобок в соответствии с 1-м дистрибутивным законом в булевой формуле функции, содержащей знаки инверсии на самих переменных с последующим исключением тождественных нулей и объединением равных членов:

$$f = (x \to (y \to z)) \to ((x \to \overline{z}) \to (x \to \overline{y})) =$$
$$= \overline{\overline{x} \vee \overline{y} \vee z} \vee \overline{\overline{x} \vee \overline{z}} \vee \overline{x} \vee \overline{y} = x(\overline{\overline{y} \vee z}) \vee xz \vee \overline{x} \vee \overline{y}.$$

Приведение к *КНФ* сводится к раскрытию скобок в соответствии со 2-м дистрибутивным законом в формуле, содержащей знаки инверсии на самих переменных, с последующим исключением тождественных единиц и объединением равных членов:

$$f = (x \to (y \to z)) \to ((x \to \overline{z}) \to (x \to \overline{y})) = xy\overline{z} \vee xz \vee \overline{x} \vee \overline{y} =$$
$$= (xz \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(xz \vee \overline{x} \vee y \vee xy) =$$
$$= (\overline{x} \vee \overline{y} \vee xy \vee x)(xy \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z)\ (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee x)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee z) =$$
$$= (xy \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z) = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee x)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee y) = 1.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Построить таблицы истинностей для формул:

$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$;

$\overline{xy} \to x \vee x(\overline{y \vee z})$;

$(x \to z) \to ((\overline{y \vee z}) \to x)$;

$((((x \to y) \to \overline{x}) \to y) \to \overline{z}) \to z$.

2. Доказать тождественную истинность формул:

$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

$(x \to y)\overline{y} \to \overline{x}$;

$(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;

$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

3. Доказать равносильность формул:

$P \leftrightarrow Q \to PR = PR \vee P\overline{Q} \vee Q\overline{P}$;

$(P \vee Q \vee R)(Q \vee P \vee S)(R \vee S \vee P) = P \vee ((Q \vee RS)(S \vee R))$;

$x \mid y = y \mid x$;

$x \mid y = x \to \bar{y}$.

4. Привести к *ДНФ* и *КНФ* формулы:

$((x \to y) \to ((x \to \bar{z}))) \to (\bar{y} \to z)$;

$((((x \to y) \to \bar{x}) \to \bar{y}) \to \bar{z}) \to z)$;

$(x \to (y \to z)) \to ((x \to \bar{z}) \to (x \to \bar{y})$;

$(xy \to x) \to (x(y \vee z))$.

5. Привести к совершенной *ДНФ* и совершенной *КНФ* формулы:

$(z \to z) \to ((\overline{y \vee z}) \to x)$;

$(xy \to x) \mid (x \vee yz))$;

$((x \vee y) \to z) \uparrow (yz \to x)$;

$((x \leftrightarrow y) \to z) \mid ((x \leftrightarrow z) \to y)$.

6. Доказать, что выражения тождественно равны нулю:

$P(\overline{PQ})Q$;

$\overline{P \to (Q \to PQ)}$;

$(P \leftrightarrow Q)(Q \oplus P) \vee (Q \leftrightarrow P)(P \oplus Q)$.

7. Найти совершенные нормальные формы для функций, заданных таблицей истинностей (табл. 3.6), и характеристическим множеством

Таблица 3.6

а

$x\,y\,z$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

б

$x\,y\,z$	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

в

$x\,y\,z$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

$M_1 = \{0000, 1001, 1000, 0101, 1010, 1101, 1011, 1111, 1110\}$;

$M_0 = \{0000, 1001, 1000, 0101, 1010, 1101, 1011, 1111, 1110\}$;

$M_1 = \{0001, 1101, 1000, 0100, 1010, 1001, 0011, 1111, 0110\}$;

$M_0 = \{0001, 1101, 1000, 0100, 1010, 1001, 0011, 1111, 0110\}$;

$M_1 = \{0100, 0110, 1100, 0111, 0010, 1001, 0101, 1111, 1110\}$;

$M_0 = \{0100, 0110, 1100, 0111, 0010, 1001, 0101, 1111, 1110\}$.

8. С помощью *ДНФ* и *КНФ* установить выполнимость формул:

1. $A \to B \leftrightarrow A \vee B \wedge C$;
2. $\overline{A} \to B \wedge C \leftrightarrow B \vee \overline{C} \to A \wedge C$;
3. $A \to \overline{A} \vee \overline{C} \leftrightarrow B \to A \vee C$;
4. $A \vee B \vee C \leftrightarrow C \to \overline{A \vee B}$.

9. С помощью совершенных нормальных форм установить, равносильны ли формулы α и β:

1. $\alpha = (A \to B) \vee (C \to D)$; $\beta = (D \to B) \vee (A \to C)$.
2. $\alpha = (A \to \overline{B}) \to (\overline{C} \to A)$; $\beta = (B \to \overline{A}) \to (\overline{A} \to C)$.
3. $\alpha = (A \to \overline{B}) \vee (C \to AB)$; $\beta = (A \wedge B \to \overline{B}) \vee (\overline{B} \to A)$.
4. $\alpha = A \to (B \to \overline{B \to \overline{C}})$; $\beta = A \to B$.

10. Указать, для каких из приведенных ниже формул достаточно приведенных сведений для определения значений этой формулы. Если достаточно, укажите это значение:

$(P \to Q) \to R, \quad R = 1$

$\overline{P \vee Q} \leftrightarrow \overline{P}\overline{Q}, \quad Q = 1$

$(P \to Q) \to (\overline{Q} \to \overline{P}), \quad Q = 1$

Тема 4. Полнота и замкнутость

Алгебра над множеством логических функций с двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\oplus$, двумя константами 1 и 0 называется алгеброй Жегалкина, если в ней выполняются следующие законы:

$$x \oplus y = y \oplus x; \qquad x(y \oplus z) = xy \oplus xz; \qquad x \oplus x = 0; \qquad x \oplus 0 = x;$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}; \quad xy = yx; \quad x(yz) = (xy)z; \quad xx = x.$$

В алгебре Жегалкина дизъюнкция $x \vee y$ выражается формулой $xy \oplus x \oplus y$, из которой видно, что $x \vee y = x \oplus y$ тогда, когда $xy = 0$ (когда x и y ортогональны).

Действительно,

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{xy}} = \overline{(x \oplus 1)(y \oplus 1)} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$$

Всякую формулу алгебры Жегалкина можно представить в виде полинома Жегалкина:

$$f(x_1, \ldots x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \ldots \oplus c_n x_n \oplus c_{n+1} x_1 x_2 \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus c_{n2} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus c_{2n-1} x_1 x_2, \ldots x_{n-1} x_n, \text{ где } c_i \in \{0,1\}.$$

Для всякой логической функции существует единственный полином Жегалкина.

Алгоритм построения полинома Жегалкина (совершенной полиномиальной формы Жегалкина) логической функции состоит из следующих шагов:

1) построить формулу с использованием связок $\{\wedge, \neg\}$ или построить *СДНФ* функции;

2) заменить всюду $\overline{x}$ на $x \oplus 1$. Если построена *СДНФ*, то заменить в ней все операции $\vee$ на операции $\oplus$, т.к. для ортогональных элементарных конъюнкций имеет место соотношение $p \vee q = p \oplus q$, если $pq = 0$;

3) раскрыть скобки, используя дистрибутивный закон $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$, и привести подобные члены по правилу алгебры Жегалкина $x \oplus x = 0$.

Рассмотрим логические функции $g(y_1, y_2, ..., y_k)$, $f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n)$. Будем считать, что функции $f_1, f_2, ..., f_k$ зависят от одних и тех же аргументов $x_1, ..., x_n$. При необходимости это достигается добавлением фиктивных переменных (аргументов) к аргументам некоторых функций.

Некоторый класс А логических функций назовём *замкнутым*, если для любых функций $g(y_1, y_2, ..., y_k)$, $f_1, f_2, ..., f_k$ из *А* их суперпозиция

$h(x_1, ..., x_n) = g(f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n))$ содержится в *А*.

Перечислим пять замкнутых классов логических функций:

1. Класс функций T_0, сохраняющих константу 0, содержит функции, обладающие свойством *f*(0, 0, ..., 0) = 0.

2. Класс функций T_1, сохраняющих константу 1, содержит функции, обладающие свойством *f*(1, 1, ..., 1) = 1.

3. Класс линейных функций *L*, для которых полином Жегалкина линеен: $f(x_1, ..., x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus ... \oplus c_n x_n$, $c_i \in \{0,1\}$.

4. Класс самодвойственных функций *S*, для которых выполняется условие $f(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$, т.е. на всех инверсных наборах значения функций различны.

5. Класс монотонных функций М, для которых выполняется условие монотонности *f(A)* ≥ *f(A`)* при *A* > *A`*. Здесь $A = (a_1, ..., a_n)$ и $A' = (a'_1, ..., a'_n)$ – двоичные наборы. Набор *A* больше набора *A`*, если каждый элемент $a_i$ набора *A* больше или равен соответствующему элементу $a'_i$ набора *A`*.

Рассмотрим совокупность R всех логических функций от n переменных. Система функций $f_1, f_2, ..., f_k$ называется *полной* в классе R (базисом), если любую функцию из этого класса можно представить суперпозицией функций $f_1, f_2, ..., f_k$. Базис, для которого удаление любой из функций превращает полную систему в неполную, называется *минимальным*.

Теорема о функциональной полноте (критерий полноты системы логических функций). Система функций $f_1, f_2, ..., f_k$ является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов (T_0, T_1, L, S, M).

Занятие 5
Алгебра Жегалкина. Полнота и замкнутость системы логических функций. Критерий полноты

Вопросы к занятию:

1. Алгебра Жегалкина. Построение полинома Жегалкина.
2. Пять основных замкнутых классов логических функций.
3. Критерий полноты системы логических функций.

Примеры решения задач

Задача 1. Построить полином Жегалкина для логической функции $f=(x_1, x_2, x_3)$ с характеристическим множеством $M_1=\{001, 101, 110\}$.

Решение

На первом шаге алгоритма строятся *СДНФ* функции:

$$f=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3}.$$

После выполнения второго шага получается следующее выражение:

$$f=(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)x_3\oplus x_1(x_2\oplus 1)x_3\oplus x_1x_2(x_3\oplus 1),$$

А после третьего шага (приведение подобных членов)получаем окончательное выражение для полинома Жегалкина:

$$f=(x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1)x_3\oplus(x_1x_2\oplus x_1)x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2=$$

$$=x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2=$$

$$=x_1x_2x_3\oplus x_2x_3\oplus x_3\oplus x_1x_2.$$

Задача 2. Построить полином Жегалкина для функции $f=((x_1\to x_2)\vee\overline{x_3})\,|\,x_1$.

Решение

Воспользуемся алгоритмом построения полинома Жегалкина:

$$f=((x_1\to x_2)\vee\overline{x_3})\,|\,x_1=(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})\,|\,x_1=\overline{(\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3})x_1}=\overline{(\overline{x_1\overline{x_2}}\vee\overline{x_3})x_1}=$$

$$=\overline{(\overline{\overline{x_1\overline{x_2}}}\,x_3)}\,x_1=\overline{x_1\overline{x_2}x_3x_1}=\overline{x_1\overline{x_2}x_3}=x_1(x_2\oplus 1)x_3\oplus 1=x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus 1.$$

Полином Жегалкина построен.

Задача 3. Выяснить, каким из пяти замкнутых классов (T_0, T_1, L, S, M) принадлежит функция, заданная характеристическим множеством $M_1 = \{001, 011, 101, 111\}$.

Решение

Строим таблицу истинности для функции:

Таблица 4.1

x_1 x_2 x_3	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

Исходя из определения функций, сохраняющих константу 0 (ноль) и 1 (единицу), самодвойственных выясняем, что $f \in T_0, T_1, S$.

Исходя из определения монотонности функций, следует, что функция $f \in M$, где М – класс монотонных функций.

Построив для функции полином Жегалкина

$f = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$

$= (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)x_3 \vee (x_1 \oplus 1)x_2 x_3 \vee x_1(x_2 \oplus 1)x_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$

$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 = x_3$,

убеждаемся в том, что он имеет линейный вид. Следовательно, $f \in L$, где L – класс линейных функций.

Задания для самостоятельной работы

1. Разложить функцию в полином Жегалкина, выяснить, является ли она линейной или самодвойственной:

$f = (x_1 x_2 \vee x_1 x_2) \to x_3$;

$f = x_1 x_2 (x_1 \to x_2)$;

$f = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_4} x_1$;

$f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \leftrightarrow x_3$;

$f = \overline{(x_1 \to x_2) \to x_1 x_3} \to (x_2 \to x_3)$;

$f = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$.

2. Какие из перечисленных ниже функций являются монотонными:

$f = x \to (y \to x)$;

$f = x \to (x \to y)$;

$f = xy(x \oplus y)$;

$$f = \overline{(x_1 \to x_2) \to x_1 x_3} \to (x_2 \to x_3);$$

$$f = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3};$$

$$f = x_1 x_2 (x_1 \to x_2).$$

3. Выяснить, какому из множеств $T_0 \cup T_1, T_0 \setminus T$ принадлежат перечисленные ниже функции:

$$f = ((x \vee y) \to (x \mid yz)) \downarrow ((y \leftrightarrow z) \to x);$$

$$f = (xy \to z) \mid ((x \to y) \downarrow (z \oplus \overline{x} y);$$

$$f = (x \to y) \wedge (y \downarrow z) \vee (z \to y);$$

$f = x \to (y \to x)$;

$f = x \to (x \to y)$;

$f = xy(x \oplus y)$.

4. Сколько существует самодвойственных функций, удовлетворяющих условию: $f(000) = 1$, $f(010) = 0$.

5. Сколько существует монотонных функций, удовлетворяющих условию:

а) $f(000) = 1$; в) $f(101) = 1$.

б) f(001)=1;

6. Доказать полноту системы функций:

а) $P = \{x \wedge y, x \vee y, \bar{x}\}$;

б) $P = \{x \vee y, \bar{x}\}$;

в) $P = \{x \wedge y, \bar{x}\}$;

г) $P = \{x \to y, \bar{x}\}$;

д) $P = \{x \mid y\}$;

е) $P = \{x \downarrow x\}$.

7. Доказать, что нельзя выразить с помощью суперпозиции функций из P функцию f, если

а) $f = \bar{x}$, $P = \{x \vee y, x \wedge y, x \to y, x \sim y\}$;

б) $f = x \to y$, $P = \{x \vee y, x \wedge y\}$;

в) $f = x \wedge y$, $P = \{x \vee y, x \to y\}$.

8. Используя критерий полноты, выяснить, является ли система функций полной:

а) $P = \{x \to y, x \to \bar{y} z\}$;

б) $P = \{x \bar{y}, \bar{x} \sim yz\}$;

в) $P = \{0, 1, x(y \sim z) \vee \bar{x}(y \oplus z)\}$.

9. Сформировать множество булевых функций, принадлежащих классу L и удовлетворяющих условиям: на наборах (000, 001, 100) значение функции 1. Постройте *СДНФ* одной из сформированных функций.

10. Сформировать множество булевых функций, одновременно принадлежащих классам T_0 и S и удовлетворяющих условиям: на наборах $f(001) = f(011) = f(101) = 1$. Записать одну из сформированных функций в полиномиальной форме Жегалкина.

11. Доопределить функцию $f(x,y,z)$, заданную на 3-х наборах $f(100) = f(101) = f(111) = 1$, так чтобы она одновременно принадлежала классам S и M. Единственно ли это доопределение? Если нет, то какими способами можно это сделать? Построить *СДНФ* одной из таких функций, найти ее минимальную *ДНФ* и по ней построить функциональную схему.

12. Образуют ли базис следующие системы функций: $\{\wedge, \rightarrow\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$, $\{\leftrightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \vee, \leftrightarrow\}$? Ответ обосновать.

Тема 5. Минимизация логических функций

Логическая функция $g = g(x_1,...,x_n)$ называется импликантой функции $f = f(x_1,...,x_n)$, если на любом наборе значение переменных $x_1,...,x_n$, на котором значение функции g равно 1 (единице), значение функции f тоже равно единице. Простой импликантой p функции f называется элементарная конъюнкция, являющаяся импликантой функции f и такая, что никакая ее собственная часть не является импликантой. Дизъюнкция любого множества импликант булевой функции является импликантой этой функции.

Дизъюнкция всех простых импликант булевой функции совпадает с этой функцией и называется сокращенной дизъюнктивной нормальной формой (*СкДНФ*) этой функции.

Сокращенная *ДНФ* является в общем случае более экономным способом представления булевой функции, чем *СДНФ*. Однако зачастую и она допускает дальнейшие упрощения за счет того, что некоторые из простых импликант могут поглощаться дизъюнкциями других простых импликант. Появляется задача минимизации логических функций.

Например, в сокращенной *ДНФ* функции $f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz$ простая импликанта yz поглощается дизъюнкцией остальных членов формы, так что

$f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$.

Система S простых импликант функции f называется *приведенной*, если эта система полна, а никакая её собственная часть не является полной системой импликант функции f.

Дизъюнкция всех простых импликант, составляющих систему S, называется тупиковой дизъюнктивной нормальной формой (*ТДНФ*) функции f. Всякая тупиковая *ДНФ* функции f совпадает с этой функцией. Если сокращенная *ДНФ* однозначно определяема логической функцией, то для одной и той же функции может существовать несколько различных тупиков *ДНФ*.

ДНФ логической функции называется *минимальной*, если сумма рангов образующих ее элементарных конъюнкций будет не больше, чем в любой другой *ДНФ* этой функции.

Метод Квайна исходит из задания функции в виде *СДНФ* и заключается в последовательном применении к составляющим *СДНФ* операции неполного склеивания и поглощения. В результате этих операций *СДНФ* преобразуется в сокращенную *ДНФ* – дизъюнкция простых импликант.

Метод Блейка основывается на использовании операции обобщенного склеивания. Если функция задана в *КНФ*, то для получения ее сокращенной *ДНФ* целесообразно применять *метод Нельсона*, согласно которому достаточно в произвольной *КНФ* раскрыть скобки в соответствии с первым дистрибутивным законом и провести все необходимые поглощения.

Упрощение сокращенных *ДНФ* и составляет второй этап минимизации логических функций.

Тупиковая *ДНФ* с наименьшей суммой рангов составляющих ее простых импликант и является минимальной *ДНФ*. Нахождение тупиковой *ДНФ* и выбор из них минимальных можно реализовать *методом Петрика*.

Метод Квайна–Мак-Класки. Минимизация логических функций этим методом проводится в два этапа. На первом этапе из *СДНФ* получают сокращенную *ДНФ*. На втором этапе из сокращенной *ДНФ* получают систему тупиковых *ДНФ*, из которой затем выбирают минимальную *ДНФ*.

Этап 1. Сокращенная *ДНФ* – форма представления функции, которая получается из *ДНФ* путем склеивания вначале конституент единицы между собой (склеиваются «соседние» по той или иной переменной) по всем переменным, а затем конъюнкции ранга n-1, n-2 и т.д. Простая импликанта есть элементарная конъюнкция, которая не склеивается ни с какой другой конъюнкцией, входящей в данную логическую функцию.

При реализации этого метода удобно конституенты единиц задавать в виде условных чисел, рассматривая набор, на котором они обращают в единицы, как двоичную запись этого числа. Индексом условного числа будем называть число единиц в двоичном представлении этого числа. Очевидно, что склеивать легче только те конституенты единиц, для которых индексы различные только на единицу.

Часто сокращенная *ДНФ* допускает дальнейшие упрощения, т.к. содержит простые импликанты, которые поглощаются дизъюнкцией других простых импликант. Упрощение сокращенной *ДНФ* и составляет второй этап минимизации функции.

Этап 2. Отыскивается система тупиковых *ДНФ*. Выбор из них минимальных *ДНФ* можно реализовать *методом Петрика*. В соответствии с этим методом строим импликантную матрицу – булеву матрицу, строки которой соответствуют импликантам тупиковых *ДНФ*, а столбцы – конституентам единиц *СДНФ*. Элемент матрицы равен 1, если простые импликанты являются составной частью соответствующей конституенты единицы. Затем отыскивают кратчайшее строчное покрытие этой матрицы.

Визуально-матричный метод. Логическая функция может быть представлена в матричной форме (рис. 5.1). Матричная форма – таблица, каждая клетка которой соответствует одному из наборов таблицы истинности. Множество переменных разбито на подмножество младших и старших переменных. Строкам (столбцам) таблицы соответствуют различные комбинации значений младших (старших) переменных. Единичное значение переменной отмечено чертой над соответствующими столбцами или строкой, нулевое – отсутствием черты. В клетки матрицы заносятся значения логической функции на соответствующем наборе – единичные значения функции отмечаются точкой, нулевые – отсутствием точки.

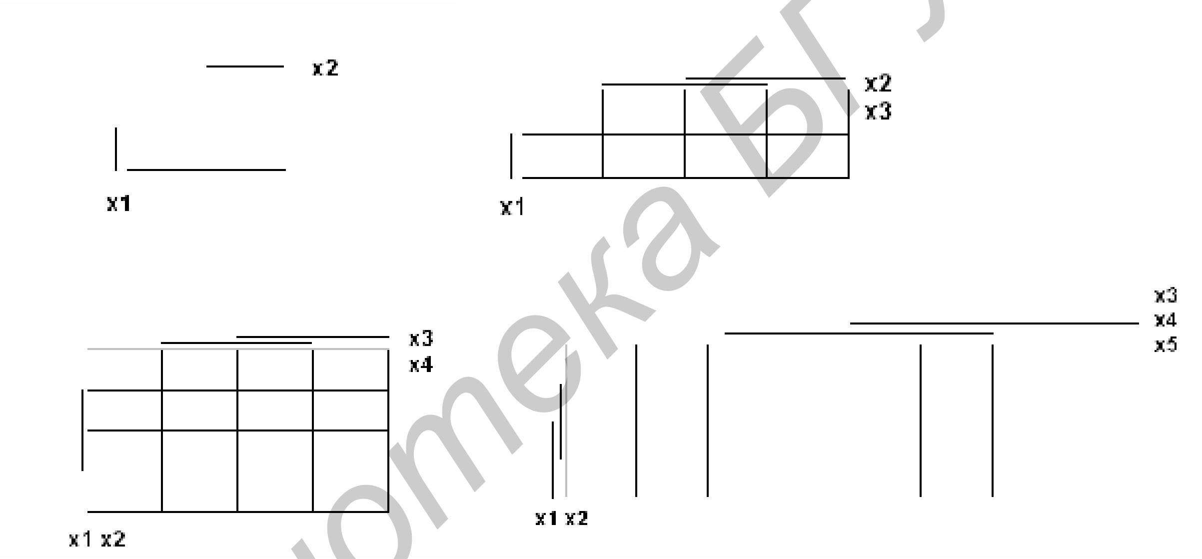


Рис. 5.1

На каждой матричной форме выделены оси симметрии той или иной переменной x_i (линии смены значения этой переменной). Каждой оси симметрии соответствует зона симметрии, серединной линией которой является ось симметрии, а ширина зоны равна 2^r, где r – ранг оси симметрии.

Два элемента α и β называются соседними, если их значения различаются значениями только одной переменной. Соседними по переменной x_i считаются те элементы булева пространства, которые лежат симметрично относительно соответствующей оси этой переменной и полностью в зоне ее симметрии.

Интервал – множество наборов значений переменных, на которых элементарная конъюнкция принимает значение «1», т.е. характеристическим множеством элементарной конъюнкции.

Интервал, соответствующий элементарной конъюнкции k-го ранга, получаем путем пересечений опорных интервалов, соответствующих k конъюнкциям 1-го ранга.

Задание булевых функций в *ДНФ* сводится к размещению точек (единиц) по клеткам матричной формы ее элементарных конъюнкций.

Например, на рис. 5.2 матричной форме функции 4-х переменных представлена элементарная конъюнкция 2-го ранга x_1x_2.

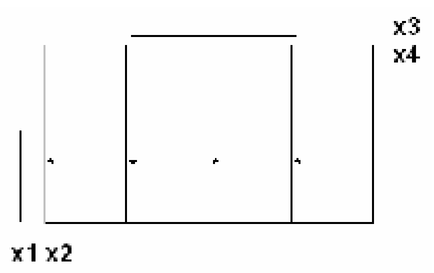


Рис. 5.2

На матричной форме функции 4-х переменных, изображенной на рис. 5.3, представлена элементарная конъюнкция 2-го ранга $\overline{x}_1 x_3$ (рис. 5.3).

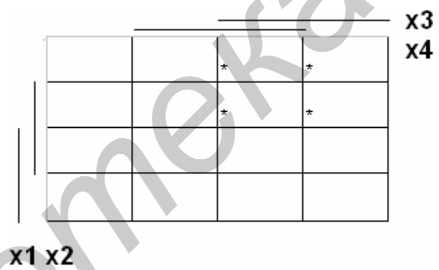


Рис. 5.3

На матричной форме функции 4-х переменных (рис. 5.4) представлена элементарная конъюнкция 3-го ранга $\overline{x}_1 x_2 x_3$.

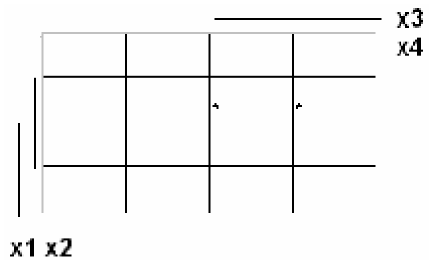


Рис. 5.4

Если две элементарные конъюнкции – соседние по переменной x_i, то их можно склеить по этой переменной $x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2$ и получить элементарную конъюнкцию меньшего ранга. На матричной форме это соответствует тому, что интервалы, соседние по переменной x_i, можно покрыть более крупным интервалом (т.е. найти покрывший их интервал).

Минимизация логической функции визуально-матричным методом сводится к нахождению наиболее крупных интервалов, покрывающих характеристическое множество данной функции. Целесообразно вначале искать покрывающий интервал для максимального элемента булева пространства, у которого меньше соседей.

Занятие 6
Минимизация логических функций

Вопросы к занятию

1. Виды ДНФ.
2. Метод Квайна–Мак-Класки.
3. Визуально-матричный метод.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти минимальную *ДНФ* функции, заданной характеристическим множеством M_1 = {000, 100, 010, 101, 011, 110}.

Решение

Процесс решения удобно представить в виде таблицы. Знаком (*) отмечают конъюнкции, которые склеиваются в процессе решения (рис. 5.5).

0	000*	-00* 0-0*	--0
1	100* 010*	10- 1-0* 01- -10*	
2	101* 011 110*		

Рис. 5.5

Как видно из таблицы, к элементарным конъюнкциям, не отмеченным знаком (*), нельзя применить операцию неполного склеивания. Следовательно, они являются простыми импликантами. Сокращенная *ДНФ* имеет вид

$\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$.

Далее упростить данную функцию нельзя, поэтому она является также и минимальной *ДНФ*.

Задача 2. Найти минимальную ДНФ функции, заданной своим характеристическим множеством M_1 ={0000, 0001, 1100, 1001, 1110, 1101}.

Решение

Знаком (*) отметим конъюнкции, которые склеиваются в процессе решения (рис. 5.6).

0	0000*	000-
1	0001*	-001
2	1100* 1001*	11-0 110- 1-01
3	1110* 1101*	

Рис. 5.6

Строим импликантную матрицу. Она дополнена строкой, содержащей дизъюнкцию тех простых импликант, которые соответствуют строкам, покрывающим тот или иной столбец матрицы (табл. 5.1).

Таблица 5.1

		0000	0001	1100	1001	1110	1101
p1	000-	1	1				
p2	-001		1		1		
p3	11-0			1		1	
p4	110-			1			1
p5	1-01				1		1
$\vee p_i$		p_1	$p_1 \vee p_2$	$p_3 \vee p_4$	$p_2 \vee p_5$	p_3	$p_4 \vee p_5$

Далее строится конъюнкция, для которой находится минимальная *ДНФ*. Каждая ее составляющая будет соответствовать тупиковой *ДНФ* исходной функции. Из полученной системы тупиковых *ДНФ* выбирается та, у которой суммарный ранг составляющих ее элементарных конъюнкций наименьший.

$p_1(p_1 \vee p_2)(p_3 \vee p_4)(p_2 \vee p_5)p_3(p_4 \vee p_5) = p_1(p_2 \vee p_5)p_3(p_4 \vee p_5) = p_1p_2p_3p_4 \vee p_1p_2p_3p_5 \vee p_1p_3p_5 \vee p_1p_3p_4p_5 = p_1p_2p_3p_4 \vee p_1p_3p_5 \vee p_1p_3p_4p_5$.

Как видно из последней формулы, исходная функция имеет три тупиковые *ДНФ*. Минимальная *ДНФ* соответствует слагаемому $p_1p_3p_5$ и представляет собой дизъюнкцию импликант, входящих в это слагаемое. Таким образом, найденная минимальная *ДНФ* имеет следующее характеристическое множество {000-, 11-0, 1-01}, т.е. имеет вид $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3x_4$.

Задача 3. На матричной форме 4-х переменных найти элементы, соседние выделенным элементам (рис. 5.7).

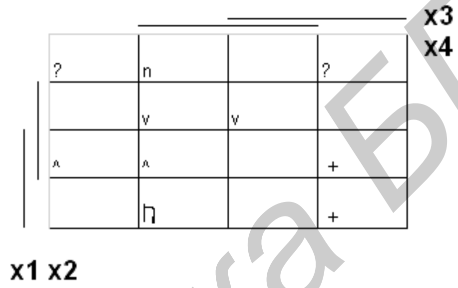


Рис. 5.7

Решение

? – соседи по переменной x_3;
v – соседи по переменной x_3;
^ – соседи по переменной x_4;
n – соседи по переменной x_1;
+ – соседи по переменной x_2.

Задача 4. Найти минимальную *ДНФ* для функции, заданной в матричной форме (рис. 5.8).

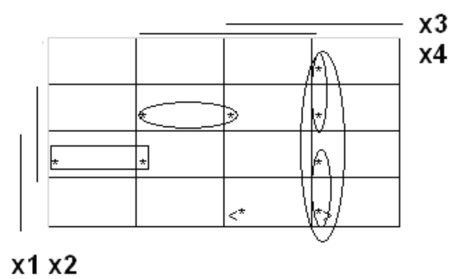


Рис. 5.8

Решение

Элемент $x_1x_2\bar{x}_3x_4$ склеиваем с элементом $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ по переменной x_4. Покрывающий их интервал соответствует элементарной конъюнкции $x_1x_2\bar{x}_3$. Далее элемент $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$ склеиваем с $\bar{x}_1x_2x_3x_4$ по переменной x_3 и получаем покрывающий интервал $\bar{x}_1x_2x_4$ и т.д. Окончательно получаем минимальную *ДНФ* функции в виде $x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3$.

Задания для самостоятельной работы

1. Показать, что минимизация функции *f* приводит к получению представленных ниже сокращенной *ДНФ (СКДНФ)* и тупиковых *ДНФ (ТДНФ)*. Какая из этих тупиковых *ДНФ* является минимальной *ДНФ*?

а) *f* = (01110110) – исходная функция;

$\bar{a}c \vee \bar{b}c \vee \bar{a}b \vee b\bar{c}$ – СкДНФ;

$\bar{a}c \vee \bar{b}c \vee b\bar{c}$ – ТДНФ;

$\bar{b}c \vee \bar{a}b \vee b\bar{c}$ – ТДНФ;

б) f = (11100110) – исходная функция;

$\bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}\bar{c} \vee \bar{b}c \vee b\bar{c}$ – СкДНФ;

$\bar{a}\bar{b} \vee \bar{b}c \vee b\bar{c}$ – ТДНФ;

$\bar{a}\bar{c} \vee \bar{b}c \vee b\bar{c}$ – ТДНФ.

2. Найти визуально-матричным методом минимальную *ДНФ* функции, заданной характеристическим множеством.

$$M_1 = \{0000, 1001, 1000, 0101, 1010, 1101, 1011, 1111, 1110\}$$

$$M_0 = \{0000, 1001, 1000, 0101, 1010, 1101, 1011, 1111, 1110\}$$

$$M_1 = \{0001, 0101, 1000, 0111, 1010, 1001, 0011, 1111, 1100\}$$

$$M_0 = \{0001, 0101, 1000, 0111, 1010, 1001, 0011, 1111, 1100\}$$

3. Найти методом Квайна–Мак-Класски минимальную *ДНФ* функции, заданной в табличной форме или своим характеристическим множеством.

Таблица 5.2

а

x y z	*f*
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

б

x y z	*f*
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

в

x y z	*f*
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

$$M_1=\{0000, 1001, 1000, 0101, 1010, 1101, 1011, 1111, 1110\}$$
$$M_0=\{0000, 1001, 1000, 0101, 1010, 1101, 1011, 1111, 1110\}$$
$$M_1=\{0001, 1101, 1000, 0100, 1010, 1001, 0011, 1111, 0110\}$$
$$M_0=\{0001, 1101, 1000, 0100, 1010, 1001, 0011, 1111, 0110\}$$
$$M_1=\{0100, 0110, 1100, 0111, 0010, 1001, 0101, 1111, 1110\}$$
$$M_0=\{0100, 0110, 1100, 0111, 0010, 1001, 0101, 1111, 1110\}$$

Тема 6. Логические задачи и рассуждения

Решение логических задач *методом характеристического уравнения* разбивается на ряд шагов:

1. Введение булевых переменных, соответствующих простым высказываниям $x_j \in [0,1],\ j=1 \div n,\ x=\{x_1, x_2, ...x_n\}$.

2. Запись условия задачи в виде логических уравнений $f_i(x)=1, i=1,..., m,$ где $f_i(x)-$ логическая функция.

3. Сведение системы уравнений к характеристическому уравнению $\bigcap_{i=1}^{m} f_i(x)=1,$ множество корней которого совпадает с множеством корней системы (1).

4. Приведение левой части характеристического уравнения к *ДНФ* и решение его:

– приравнивание каждого слагаемого *ДНФ (СДНФ)* независимо от других к единице, извлечение из уравнения значений переменных. Каждый их набор является решением задачи.

– если после упрощения в *ДНФ* осталось только одно слагаемое, задача имеет единственное решение. В случае, когда в левой части уравнения все слагаемые уничтожены, задача не имеет решения.

Проверка правильности рассуждений. Рассуждение есть утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) следует из других высказываний (посылок). Рассуждение будет правильным, если из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. между конъюнкцией посылок и заключением установлено отношение следствия.

В этом случае импликация должна быть тавтологией.

$$p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q \qquad (6.1)$$

Правильность рассуждения можно установить, построив таблицу истинности высказывания (6.1) и убедившись в том, что оно тождественно истинно.

Правильность рассуждения можно установить и методом «от противного». Этот метод заключается в том, что, полагая заключения q ложным, а некоторые посылки p_i истинными, проверяем, найдётся ли хотя бы одна посылка, принимающая значение «ложно». Если да, то рассуждение правильно.

Занятие 7
Решение логических задач методом характеристического уравнения

Вопрос к занятию

1. Метод характеристического уравнения.

Примеры решения задач

Используем данный метод для решения задач из книги Р. М. Смаллиана «Принцесса и тигр».

Условие задачи. В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узнику отгадать, в какой комнате находится принцесса, а в какой тигр. Узнику было объявлено, что в каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр, однако может оказаться, что сразу в обеих комнатах будет обнаружено по тигру или по принцессе.

На табличках, прикрепленных к двери каждой из комнат, было написано:

1. В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр. ($f_1 = x_1\bar{x}_2\bar{y}_1y_2$)	2. В одной из этих комнат находится принцесса, кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр. ($f_2 = (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2)(y_1\bar{y}_2 \vee \bar{y}_1y_2)$)

Король сообщил узнику, что на одной из табличек написана правда, на другой – ложь. Какую дверь надо открыть узнику, если он предпочитает принцессу тигру?

Решение

Формулируем простые высказывания:

- x_i – «принцесса находится в комнате i»: $i = 1,2$;
- y_i – «тигр сидит в комнате i»: $i = 1,2$.

Формулируем сложные высказывания, соответствующие условию задачи:

$f_1 = x_1\bar{x}_2\bar{y}_1y_2$;

$f_2 = (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2)(y_1\bar{y}_2 \vee \bar{y}_1y_2)$,

$f_0 = x_1x_2\bar{y}_1\bar{y}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2y_1y_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{y}_1y_2 \vee \bar{x}_1x_2y_1\bar{y}_2$.

Получаем систему уравнений:

$f_0 = 1$;

$f_1\bar{f}_2 \vee \bar{f}_1f_2 = 1$.

Составляем характеристическое уравнение:

$(f_1\bar{f}_2 \vee \bar{f}_1f_2)f_0 = 1$.

Приводим левую часть характеристического уравнения к *ДНФ*. Реализуем логические функции с помощью матричного представления (рис. 6.1).

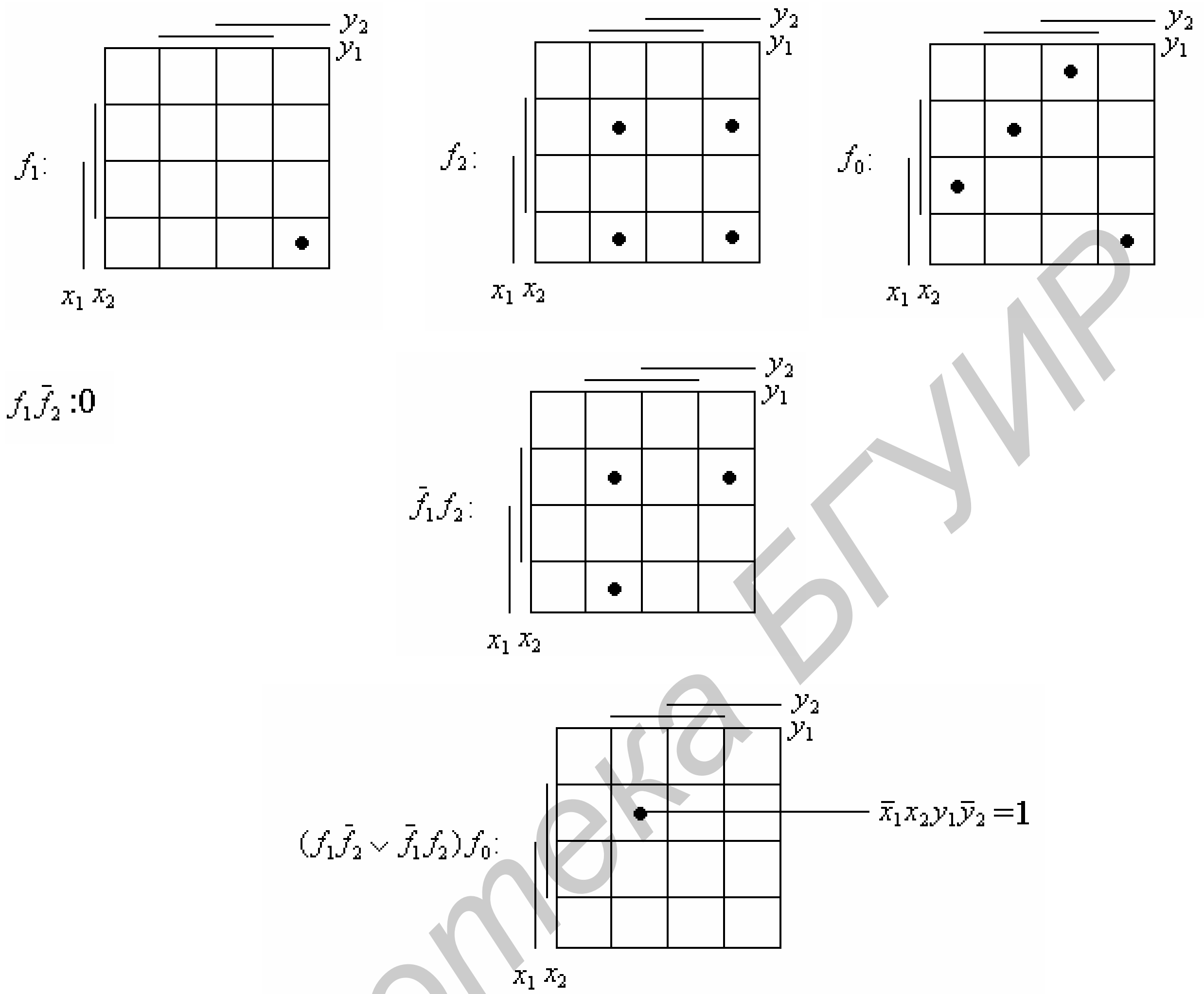


Рис. 6.1

Из последней матрицы видно, что *ДНФ* содержит только одно слагаемое.

Решением уравнения является набор 0110, т.е. принцесса находится в комнате 2, а тигр в комнате 1.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. «Принцесса или тигр». *Испытание первого дня*

В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узникам угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой – тигр. Узникам было объявлено, что в каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр. Однако может оказаться, что сразу в обеих комнатах будет обнаружено по тигру или по принцессе.

1.1. Для одного узника таблички на дверях сменили.
(первая дверь) – По крайней мере в одной из этих комнат находится принцесса;
(вторая дверь) – Тигр сидит в другой комнате.

Король сообщил узнику, что утверждения на табличках могут быть оба истинны, а могут быть оба ложны. Какую из комнат следует выбрать второму узнику?

1.2. Другому узнику король объявил, что утверждения на табличках могут быть оба истинны, а могут быть оба ложны. Надписи же были такие:
(первая дверь) – Либо в этой комнате сидит тигр, либо принцесса находится в другой комнате;
(вторая дверь) – Принцесса находится в другой комнате.

Кто же обнаруживается в комнате 1 , а кто – в комнате 2?

Задача 2. «Принцесса или тигр». *Испытания второго дня*

В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узникам угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой – тигр. Испытания второго дня начались с того, что король объявил узнику относительно комнаты 1 следующее: если в этой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, если же тигр, то оно ложно. Для комнаты 2 все было наоборот.

Вновь узникам было объявлено, что в каждой комнате будет находиться либо принцесса, либо тигр, но может оказаться, что в обеих комнатах окажется либо по принцессе, либо по тигру.

2.1. Первый узник увидел другие таблички
(первая дверь) – По крайней мере в одной из комнат находится принцесса;
(вторая дверь) – Принцесса в другой комнате.

В какой комнате сидит принцесса?

2.2.Второй узник прочитал следующие надписи:
(первая дверь) – Что ни выберешь – все едино;
(вторая дверь) – Принцесса в другой комнате.

Как должен поступить узник?

Задача 3. Задачи о хищениях

3.1. На складе было совершено хищение. Преступник (или преступники) вывез награбленное на машине. Подозрение пало на трех человек A, B и C, которые были допрошены. Установлено следующее:1) Никто, кроме A, B и C, не был замешан в хищении; 2) C никогда не ходил «на дело» без A (и, возможно, других соучастников); 3) B не умеет водить машину. Виновен или не виновен A?

3.2. Подозреваемые в хищении A, B и C были вызваны на допрос. Установлено следующее: 1) Никто, кроме A,B и C, не был замешан в хищении; 2) A никогда не идет «на дело», по крайней мере, без одного соучастника; 3) C не виновен. Виновен или не виновен B?

Задача 4. Задачи о Рыцарях и Лжецах

На острове «Двоичном» живут Рыцари и Лжецы. Рыцари говорят только правду, Лжецы – только ложь.

4.1. Прохожий незнакомец встретил трех жителей острова, разговаривающих между собой, A, B и C. Он спросил у A: «Вы Рыцарь или Лжец?» Тот ответил, но неразборчиво, ничего нельзя было понять. Тогда незнакомец спросил у B: «Что сказал A?». Тот ответил: «A сказал, что он Лжец». В разговор вмешался C: « Не верьте B! Он лжет!» Кто из островитян B и C Рыцарь, а кто Лжец?

4.2. Есть три островитянина A, B и C. При этом высказываются следующие утверждения – *A:* «B – Лжец», *B:* «A и C – оба одновременно Лжецы или одновременно Рыцари». Кто такой C – Рыцарь или Лжец?

Задача 5. Записать логической формулой следующие умозаключения и уточнить их справедливость.

5.1. Если Марианна – не дочь Педро, то либо Хосе Игнасиас – отец Марианны, либо Луис Альберто – не ее брат. Если Луис Альберто – брат Марианны, то Марианна – дочь Дона Педро и Хосе Игнасиас лжет. Если Хосе Игнасиас лжет, то Луис Альберто – не брат.

5.2. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью и убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

Занятие 8
Проверка правильности рассуждений

Вопрос к занятию

1. Способы проверки правильности рассуждений.

Примеры решения задач

Задача 1. Следует установить, правильно ли рассуждение: «Если функция на данном интервале непрерывна и имеет разные знаки на концах, то внутри данного интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль внутри данного интервала, но на концах интервала имеет разные знаки. Следовательно, функция разрывна».

Решение

Посылки и заключения в данном рассуждении состоят из следующих элементарных высказываний:

A – «Функция непрерывна на данном интервале».

B – «Функция обращается в нуль внутри данного интервала».

C – «Функция имеет разные знаки на концах интервала».

Используя эти обозначения, запишем посылки (P_1 и P_2) и заключение (Q) в виде формул для проверки правильности рассуждения построим таблицу истинности (табл. 6.1):

Таблица 6.1

A	B	C	AC	P_1=AC→B	$\overline{B}$	$P_2 = \overline{B}C$	P_1P_2	Q= $\overline{A}$	P_1P_2→Q
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	I
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Убеждаемся, что рассуждение верно.

Проведем проверку правильности рассуждения методом «от противного». Предположим, что в этом случае конъюнкция посылок ложна. В самом деле, если $Q = \overline{A}$ ложно, то *A* истинно. Пусть $P_2 = \overline{B}C$ – истинна, тогда *C* – истинно, $\overline{B}$ – истинно, т.е. *B* – ложно, но в этом случае посылка P_1 принимает значение «ложно», что противоречит условию.

Правильность данного рассуждения можно проверить также, преобразовав формулу $P_1P_2 \to Q$ к некоторой равносильной ей формуле, которая задает заведомо тождественно истинное высказывание.

Задача 2. Представить логической формулой следующий текст (составное высказывание): «Если фирма продолжает выпуск существующего продукта и ориентирована на существующий рынок, то для нее целесообразна стратегия «малого корабля», или экономии издержек. Такая стратегия привлекательна, если интенсивный маркетинг – стратегический хозяйственный фактор, но слабая сторона организации. Если интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором и сильной стороной фирмы, то фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта».

Решение

Введем обозначения простых высказываний, содержащихся в первом предложении:

A – «Фирма продолжает выпуск существующего продукта».

B – «Фирма ориентирована на существующий рынок».

C – «Для фирмы целесообразна стратегия «малого корабля».

D – «Для фирмы целесообразна стратегия экономии издержек».

С учетом введенных обозначений логическая формула для первого предложения примет вид:

$(A \wedge B) \to (C \leftrightarrow D)$.

Второе предложение содержит новые простые высказывания:

K – «Интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором организации».

L – «Интенсивный маркетинг является слабой стороной организации».

Логическая формула, представляющая второе предложение:

$(K \wedge L) \to (C \leftrightarrow D)$.

В третьем предложении содержатся новые простые высказывания:

M – «Интенсивный маркетинг является сильной стороной организации».

N – «Фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта».

Логическая формула для третьего предложения:

$(K \wedge M) \to N$.

Окончательно текст записывается следующей логической формулой:

$((A \wedge B) \to (C \leftrightarrow D)) \wedge ((K \wedge L) \to (C \leftrightarrow D)) \wedge ((K \wedge M) \to N)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Из определения логической формулы выявить, являются ли формулами следующие выражения:

а) $(((A \vee B) \to \overline{C}) \leftrightarrow D) \wedge ((A \oplus C) \to \overline{D})$;

б) $((A \oplus \overline{B}) \to C) \leftrightarrow (D \to B)$.

2. Записать логическими формулами следующие сложные высказывания:

а) «Этот человек студент или предприниматель»;

б) «Петров женат на Марье Ивановне или Лукерье Ильиничне»;

в) «Если при выполнении программы отклонение контролируемых параметров превышает предусмотренные нормы (стандарты), то требуется оперативная корректировка программы или уточнение стандартов».

3. Представить формулами логики высказываний следующие суждения (сложные высказывания):

а) «Если темпы роста рынка продукта корпорации высокие и размер контролируемой ею доли рынка также высок, то в соответствии с матрицей портфельного анализа этот продукт относится к категории «звезда»; он дает большой доход, но требует значительных вложений»;

б) «Стратегическая хозяйственная единица корпорации занимает сильные позиции на рынке и работает в привлекательной отрасли, следовательно, имеет наиболее высокий приоритет при распределении ресурсов»;

в) «Если стратегическая хозяйственная единица корпорации – лидер в непривлекательной (возможно, старой) отрасли, ее стратегией может быть максимизация прибыли на уже вложенный капитал, но не вложение нового»;

г) «Если при высокой доле рынка темпы роста рынка низкие, то продукт относится к категории «денежного мешка», или «дойной коровы»; он дает большие доходы и характеризуется малыми затратами в связи со стабильностью рынка»;

д) «Если прогноз показывает, что можно получить крупную прибыль на выпуске новых товаров, то при разработке стратегии развития фирме следует сделать упор на маркетинг и сеть распределения, а также целесообразно открыть более крупные магазины и расширить торговую сеть»;

е) «В ситуации, где жизненно необходимо расширение фирмы или где ключевые патенты или ключевые ресурсы находятся в руках у других компаний, а данной фирме недостает технических знаний, лучшей стратегией для нее является приобретение (предприятий)».

4. Записать логической формулой следующий текст: «Если компьютер при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то она исправна. Если при запуске он выдает ошибку при проверке оперативной памяти и память установлена правильно, то либо оперативная память дефектна, либо дефектна материнская плата. Если эта оперативная память правильно установлена в другой (контрольный) компьютер и он при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то оперативная память исправна».

5. Записать логической формулой следующую пословицу:

«Не ел – не мог, поел – без ног».

Тема 7. Основные понятия теории графов

7.1. *Маршруты, цепи, циклы*

Граф есть упорядоченная пара $G = (X,E)$, где X – непустое множество, называемое множеством вершин; E – неупорядоченное бинарное отношение на X, т.е. множество неупорядоченных пар (x_i, x_j), называемых ребрами.

Любой граф $G = (X,E)$ можно задать бинарным отношением инцидентности между множествами X и E, а также отношением смежности на множестве X. Поскольку любое бинарное отношение задается матрицами, то и граф можно задать матрицей инцидентности и матрицей смежности.

Пусть G – неориентированный граф. Маршрутом в G называется такая последовательность ребер $(e_1, e_2,\ldots,e_i,\ldots e_k)$, в которой каждые два соседних ребра $e_{i\text{-}1}$ и e_i имеют общую вершину. Начало маршрута – вершина x_0, инцидентная ребру e_i и не инциндентная ребру e_2. Конец маршрута – вершина x_k, инциндентная e_k и не инциндентная e_{k-1}. Маршрут называется замкнутым, если совпадают его начальные и конечные вершины($x_0 = x_k$). Маршрут, в котором все ребра различны, называются цепью. Цепь, не содержащая повторяющихся вершин, именуется простой цепью.

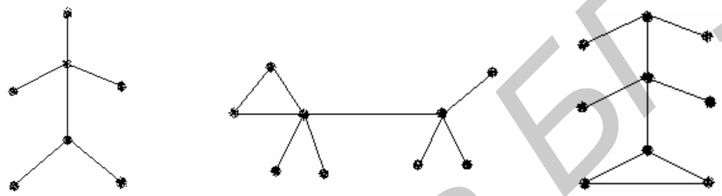
Замкнутая цепь называется циклом, простая замкнутая цепь – простым циклом. Ниже приведены аналогичные понятия для ориентированного графа (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Маршрут	Путь
Замкнутый маршрут	Контур
Цепь	Орцепь
Простая цепь	Простая орцепь
Цикл	Орцикл
Простой цикл	Простой орцикл

Граф G называется связным, если каждая пара его вершин может быть соединена цепью. Граф, не являющийся связным, можно разбить на конечное число связных подграфов, называемых компонентами связности. Обозначим через k – число компонент связности графа. Так, граф G_1 имеет 3 компоненты связности (рис. 7.1).

G_1:



(k = 3)

Рис. 7.1

Разрезом графа называется множество ребер, удаление которых увеличивает число компонент связности графа. Разрез называется простым, если никакая его собственная часть не является разрезом. Вершинная связность графа – наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу. Реберная связность графа – наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Орграф называется сильно связным, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует, по крайней мере, один путь, соединяющий их. Сильная компонента – максимально сильный связный подграф графа $\vec{G}$.

7.2. *Достижимость и связность.*

Если существует путь, идущий от вершины x_i к вершине x_j, то говорят, что x_j достижима из вершины x_i. Обозначим через $R(x_i)$ множество вершин графа, достижимых из вершины x_i. Определим матрицу достижимостей $R = (r_{ij})$ с элементами

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j \text{ достижима из } x_i; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть через $\Gamma(x_i)$ обозначено множество вершин, которые достижимы из x с использованием путей длины 1, через $\Gamma^2(x_i)$ – множество вершин, достижимых из

x_i с использованием путей длины 2,…, $\Gamma^p(x_i)$ – множество вершин, достижимых из x_i с использованием путей длины p. Тогда $R(x_i)$ можно представить в виде

$R(x_i)$ = $\{x_i\}$È$\Gamma(x_i)$È$\Gamma^2(x_i)$È…È$\Gamma^p(x_i)$, где $\cup$ – операция объединения множеств.

Алгоритм Кристофидеса. Множество $R(x_i)$ получается последовательным выполнением (слева направо) операций объединения в соотношении () до тех пор, пока «текущее» множество не перестает увеличиваться по размеру при очередной операции объединения.

Обозначим через $Q(x_i)$ множество вершин, из которых можно достичь вершину $\mathbf{x_i}$. Определим матрицу контрдостижимостей $Q = (q_{ij})$ с элементами

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j \text{ достижима из } x_i; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть через $\Gamma^{-1}(x_i)$ обозначено множество вершин, из которых можно достичь вершину x_i. С использованием путей длины 1 $\Gamma^{-p}(x_i)$ – множество вершин, из которых можно достичь вершину x_i с использованием путей длины p. Тогда $Q(x_i)$ можно представить в виде

$Q(x_i) = \{x_i\}\cup\Gamma^{-1}(x_i)\cup\Gamma^{-2}(x_i)\cup\ldots\cup\Gamma^{-p}(x_i)$,

7.3. Инварианты графов

Два графа называются изоморфными тогда и только тогда, когда имеется взаимно однозначное соответствие между их вершинами и ребрами при сохранении отношения инцидентности.

Инварианты графа – характеристики графа, которые не меняются при изоморфных преобразованиях графа.

Существуют следующие инварианты графов

1. Количество вершин, n.
2. Количество ребер, r.
3. Количество граней, f.
4. Число связности, k.
5. Толщина графа, $t(G)$.
6. Плотность графа, $q(G)$.
7. Число независимости, $a_0(G)$.
8. Число вершинного покрытия, $b_0(G)$.
9. Число паросочетания, $a_1(G)$.
10. Число реберного покрытия, $b_1(G)$.
11. Число доминирования, $m(G)$.
12. Хроматическое число, $c(G)$.
13. Реберно-хроматическое число, $c_E(G)$.
14. Коцикломатическое число, $g^*(G)$.
15. Цикломатическое число, $g(G)$.

Для плоского связного графа можно найти *количество граней*. Плоский граф – граф, который укладывается на плоскости так, что никакие два его ребра не пересекаются нигде, кроме как в инцидентной им обоим вершине. Граф называется связным, если между любыми его вершинами существует цепь.

Грань – область плоскости, ограниченная ребрами, любые две точки которой могут быть соединены линией, не пересекающей ребра графа.

Формула Эйлера. Для любой геометрической реализации графа $G = (X,E)$ на плоскости верно: $n – r + f = 2$, где n – число вершин, r – число ребер, f – число граней.

Любой граф можно разбить на подграфы, каждый из которых окажется связным. Минимальное число таких связных компонент называется числом связности графа.

Толщина графа – минимальное количество его плоских подграфов, при наложении которых образуется исходный граф.

Клика – полный подграф графа G. Количество вершин максимальной клики графа называется плотностью графа.

Независимое множество вершин – множество вершин графа, никакие две вершины которого не инцидентны.

Максимальное независимое множество вершин – независимое множество вершин, которое не содержится ни в каком другом независимом множестве вершин.

Наибольшее независимое множество вершин – независимое множество вершин максимальной мощности.

Мощность наибольшего независимого множества вершин называется числом независимости графа (а также неплотностью, числом внутренней устойчивости или числом вершинной упаковки графа).

Нахождение наибольшего независимого множества достаточно сложная алгоритмическая задача, поэтому чаще всего ищут близкое к наибольшему независимому множеству и применяют более простые алгоритмы, например:

1. В графе выбрать вершину с наименьшей степенью в качестве элемента исходного множества.

2. Удалить выбранную вершину из графа вместе с ее окрестностью (смежные вершины и инцидентные им ребра).

Шаги 1–2 повторять до тех пор, пока множество вершин не станет пустым.

Независимое множество ребер, или паросочетание – множество ребер графа, никакие два ребра которого не инцидентны.

Мощность наибольшего паросочетания называется числом паросочетания графа.

Алгоритм поиска числа паросочетания:

1. Выбираем ребро с наименьшей степенью (число инцидентных вершин) и включаем в искомое паросочетание. Если таковых несколько, то выбираем ребро, для которого степень второй граничной вершины наименьшая.

2. Удаляем из графа это ребро и ребра, смежные с ним.

Шаги 1–2 повторять до тех пор, пока множество ребер не станет пустым.

Доминирующее множество вершин – такое множество вершин графа, при котором каждая вершина графа либо принадлежит доминирующему множеству вершин, либо инцидентна некоторой вершине из него. Мощность наименьшего доминирующего множества называется числом доминирования графа.

Для решения задачи о нахождении числа доминирования графа применяется следующий алгоритм:

1. Дополнить матрицу смежности единицами по главной диагонали.

2. Выбрать из матрицы смежности строку с наибольшим числом единиц и ввести ее в искомое покрытие.

3. Вычеркнуть эту строку из матрицы и столбцы, покрываемые ею.

Повторять шаги 2 и 3 до тех пор, пока в матрице множество столбцов не окажется пустым.

Вершинное покрытие – такое множество вершин графа, при котором каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине, принадлежащей доминирующему множеству вершин.

Мощность наименьшего вершинного покрытия называется числом вершинного покрытия графа.

Для решения задачи о наименьшем вершинном покрытии необходимо найти кратчайшее строчное покрытие для матрицы инцидентности по алгоритму:

1. В матрице инцидентности графа выбирается столбец с наименьшим числом единиц (если таких столбцов несколько, берем самый левый).

2. Среди строк, покрывающих столбец, выбирается строка с наибольшим числом единиц и включается в искомое покрытие (если таких строк несколько, выбирается самая верхняя).

3. Из матрицы вычеркивается выбранная строка и столбцы, которые она покрывает.

Повторять шаги 1–3 до тех пор, пока в матрице множество столбцов не окажется пустым.

Доминирующее множество ребер, или реберное покрытие – такое множество ребер связного графа, при котором каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру, входящему в доминирующее множество ребер.

Мощность наименьшего доминирующего множества ребер называется числом реберного покрытия графа.

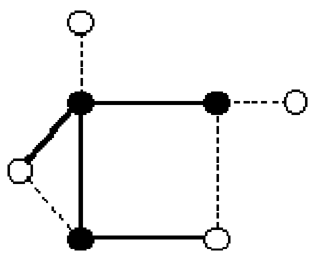


Рис. 7.2

На рис. 7.2 обозначены реберное покрытие графа (пунктиром), максимальное независимое множество вершин (белые вершины) и вершинное покрытие (черные вершины).

Между этими инвариантами существует связь, устанавливаемая следующими леммами.

Лемма 1. Для любого графа *G = (X,E)* сумма числа вершинного покрытия и числа независимости постоянна и равна количеству вершин: $a_0(G) + b_0(G) =$ $= |X(G)|$.

Лемма 2. Если граф *G = (X,E)* не имеет изолированных вершин, то сумма его числа паросочетания и числа реберного покрытия постоянна и равна количеству вершин: $a_1(G) + b_1(G) = |X(G)|$.

Раскраска вершин графов – разбиение множества вершин графа на подмножества таким образом, чтобы внутри каждого подмножества никакие две вершины не были смежными. Минимальное число красок при решении задачи называется хроматическим числом графа — *c (G).*

Всякое множество одноцветных вершин графа является независимым подмножеством, поэтому раскраску графа в минимальное количество цветов можно осуществить следующим образом:

1. Найти все независимые подмножества.
2. В булевой матрице получить кратчайшее вершинное покрытие графа независимыми подмножествами.

Раскраска ребер – разбиение множества ребер на подмножества таким образом, чтобы внутри каждого подмножества никакие два ребра не были смежными. Минимальное число красок при раскраске ребер называется хроматическим числом графа – $c_E(G)$. Если $r(x)$ – максимальная степень вершины графа, то r £ $c_E(G)$ £ $r+1$.

Деревом в неориентированном графе называют связный граф, не имеющий циклов. Если все вершины цикла принадлежат дереву, оно называется покрывающим (остовным). Ребра графа, принадлежащие покрывающему дереву, называются ветвями, все остальные хордами.

Цикломатическое число – число ребер, удаление которых приводит к покрывающему дереву (число хорд в графе) $g(G) = r – n + 1$

Коцикломатическое число – число ребер в основном дереве $g^*(G) = n – 1$.

Занятие 9
Достижимость и контрдостижимость. Вычисление инвариантов графов

Вопросы к занятию

1. Основные понятия теории графов.
2. Матрицы достижимости и контрдостижимости. Алгоритм Кристофидеса.
3. Инварианты графов и их нахождение.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти в графе (рис. 7.3) маршрут, цепь, цикл.

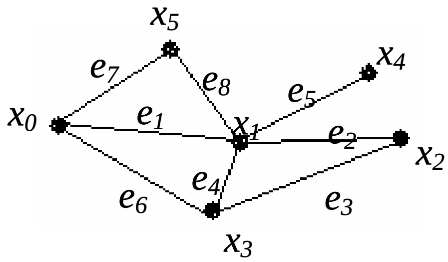


Рис. 7.3

Решение

$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_2\}$ – маршрут, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – цепь, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_8, e_7\}$ – цикл, $\{e_1, e_2, e_3\}$ – простая цепь, $\{e_2, e_3, e_4\}$ – простой цикл, $\{e_5\}$ – простой разрез (мост), $\{e_2, e_3, e_5\}$ – разрез, $\{e_2, e_3\}$ – простой разрез.

Задача 2. Построить матрицы смежности, достижимости и контрдостижимости для графа (рис. 7.4).

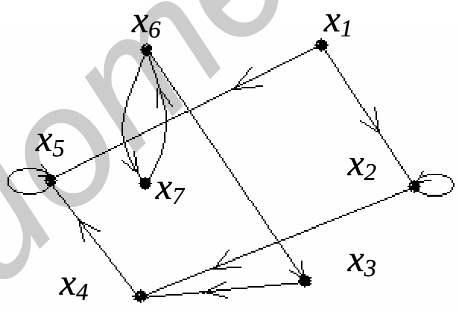


Рис. 7.4

Решение

Матрица смежности $C = (C_{\text{ij}})$ =

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	1	0	1	0

Матрица достижимости $R = (r_{ij})$ =

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	1	0	1	1	0	0
2	0	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	1	1	1	1
7	0	0	1	1	1	1	1

Матрица контрдостижимости $Q = (q_{ij})$ =

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	0	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	0	0	1	1

Задача 3. Найти инварианты графа (рис. 7.5).

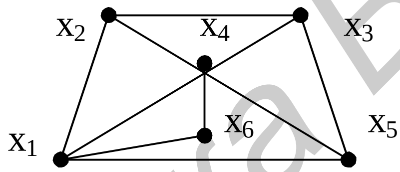


Рис. 7.5

Решение

Количество вершин $n = 3$. Количество ребер $r = 10$. Количество граней $f = 6$ ($f_1 = x_1x_2x_4$, $f_2 = x_2x_3x_4$, $f_3 = x_3x_4x_5$, $f_4 = x_1x_4x_6$, $f_5 = x_1x_6x_4x_5$, f_6 – внешняя).

Так как данный граф является плоским и связным, то число связности $k = 1$.

Толщина графа для данного графа $t(G) = 1$, так как он является плоским.

Количество вершин максимальной клики в данном графе равно 3, и поэтому плотность графа $q(G) = 3$.

Найдем наибольшее независимое множество вершин графа. Найдем вершину с наименьшей степенью – x_6 ($r(x_6) = 2$ и включим ее в независимое множество. Удалим из графа саму вершину x_6, смежные ей вершины x_1 и x_4 и инцидентные им ребра x_1x_2, x_1x_4, x_1x_5, x_1x_6, x_2x_4, x_3x_4, x_4x_5, x_4x_6. В итоге получим граф, изображенный на рис. 7.6.

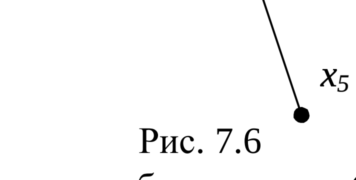


Рис. 7.6

Повторяем шаги алгоритма, выбираем x_2 с $r(x_2) = 1$ и включаем ее в искомое множество, а после удаления смежных вершин и инцидентных им ребер оставшуюся вершину x_5.

Таким образом, получим наибольшее независимое подмножество $\{x_6, x_2, x_5\}$ и соответственно число независимости графа $a_0(G) = 3$. Построим матрицу инцидентности графа (табл. 7.2).

Таблица 7.2

	x_1x_2	x_1x_4	x_1x_6	x_1x_5	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5	x_4x_6
x_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	1	0	1		0	0
x_4	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
x_5	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
x_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Столбец, содержащий наименьшее число единиц (x_1x_2), покрывает две строки – x_1 и x_2. Среди них выбираем строку с максимальным числом единиц и включаем в искомое покрытие – это строка x_1. Исключаем из матрицы строку x_1 и столбцы, которые она покрывает. В результате получаем преобразованную матрицу инцидентности и повторяем заново шаги алгоритма.

На этом этапе столбец x_2x_3 задает следующую строку искомого покрытия – x_3, которая покрывает столбцы x_2x_3, x_3x_4, x_3x_5. Переходим к упрощенной матрице инцидентности (табл. 7.3; 7.4).

Таблица 7.3

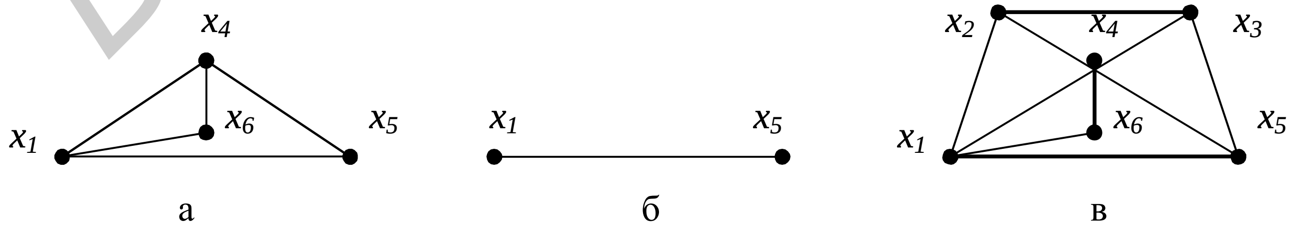
	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5	x_4x_6
x_2	1	1	0	0	0	0
x_3	1	0	1		0	0
x_4	0	1	1	0	1	1
x_5	0	0	0	1	1	0
x_6	0	0	0	0	0	1

Таблица 7.4

	x_2x_4	x_4x_5	x_4x_6
x_2	1	0	0
x_4	1	1	1
x_5	0	1	0
x_6	0	0	1

Удалению из матрицы подлежит строка x_4 и покрываемые ею оставшиеся столбцы. Из этого можно сделать вывод: наименьшее вершинное покрытие составляют вершины $\{x_1, x_3, x_4\}$ и число вершинного покрытия $b_0(G) = 3$.

Найдем наибольшее паросочетание. Следуя вышеописанному алгоритму, первым исключим ребро x_2x_3 и смежные ему ребра x_1x_2, x_2x_4, x_3x_4, x_3x_5. Затем исключим ребро x_4x_6, и смежные с ним ребра. Далее в искомое паросочетание на последнем этапе включается оставшееся ребро x_1x_5. На рис. 7.7, а, б, в изображены преобразования графа в ходе последовательного исключения ребер.



а б в

Рис. 7.7

В итоге получаем, что в искомое покрытие включаются 3 ребра (на рис. 7.7, в ребра, выделенные жирными линиями) и число паросочетания $a_1(G) = 3$.

Согласно лемме 2 число реберного покрытия графа $b_1(G) = 3$.

Найдем хроматическое и ребернохроматическое числа графа. Согласно правилам раскраски вершин и ребер, и, алгоритму раскраски графа, сначала строим булеву матрицу, строки которой представляют собой независимые подмножества, а столбцы – вершины графа. Решаем задачу о кратчайшем покрытии, последовательно включаем строки в искомое покрытие (табл. 7.5, а–в).

Таблица 7.5

а

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$x_2x_5x_6$		1			1	1
x_1x_3	1		1			
x_2x_5		1			1	
x_2x_6		1				1
x_3x_6			1			1
x_5x_6					1	1
x_4				1		

б

	x_1	x_3	x_4
x_1x_3	1		
x_3x_6		1	
x_4			1

в

	x_4
x_4	1

В результате получаем покрытие, представляющее собой совокупность независимых подмножеств $\Pi = \{\{x_2x_5x_6\},\{x_1x_3\},\{x_4\}\}$, и следующий граф с хроматическим числом графа $c\ (G) = 3$ и ребернохроматическим числом графа $c_E\ (G) = 5$ (рис. 7.8).

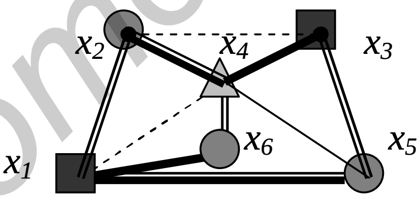


Рис. 7.8

Найдем наименьшее доминирующее множество. Для этого построим матрицу смежности и дополним ее единицами по главной диагонали (табл. 7.6).

Таблица 7.6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	0	1	1	1
x_2	1	1	1	1	0	0
x_3	0	1	1	1	1	0
x_4	1	1	1	1	1	1
x_5	1	0	1	1	1	0
x_6	1	0	0	1	0	1

Вводим в искомое покрытие строку x_4, так как она содержит наибольшее число единиц, вычеркиваем из матрицы ее и столбцы, которые она покрывает. В результате получаем доминирующее множество вершин $\{x_4\}$ и число доминирования графа $m = 3$.

Найдем social коцикломатическое и цикломатическое числа графа. Для этого построим покрывающее дерево (рис. 7.9) и подсчитаем число ветвей и количество хорд.

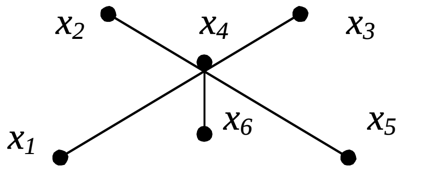


Рис. 7.9

Цикломатическое число $g(G) = 5$, коцикломатическое число $g^*(G) = 5$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти инварианты графов, заданных матрицей смежности.

а

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1		1
2	1		1			1
3	1	1		1	1	1
4	1		1			1
5			1			1
6	1	1	1	1	1	

б

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		1
2			1		1	
3				1		1
4					1	
5						1
6						

в

	1	2	3	4	5	6
1		1	1			1
2			1	1	1	
3					1	1
4					1	
5						1
6						

г

	1	2	3	4	5	6
1		1	1			1
2			1		1	
3				1		1
4					1	
5						1
6						

д

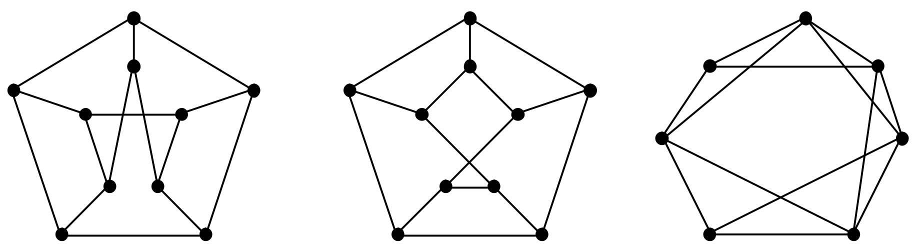
	1	2	3	4	5	6
1		1		1	1	
2			1		1	
3				1	1	1
4					1	1
5						1
6						

е

	1	2	3	4	5	6
1		1	1		1	
2	1		1		1	
3	1	1			1	1
4		1			1	1
5		1	1			1
6			1	1		

2. Доказать, что любой граф можно уложить в трехмерном пространстве.

3. Какие из графов, изображенных на рис. 7.10, являются планарными?



а б в

Рис. 7.10

4. При каких *n* графы порядка *2n*, изображенные на рис. 7.11, являются планарными?

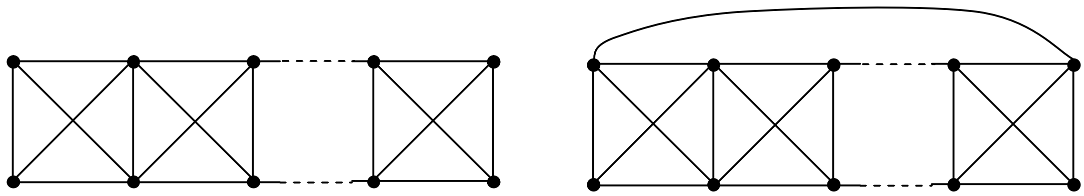


Рис. 7.11

5. С помощью алгоритма укладки графа на плоскость построить плоские укладки или установить непланарность графов, изображенных на рис. 7.12.

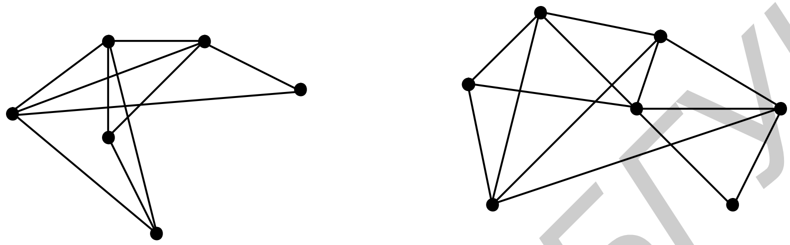


Рис. 7.12

6.Найти число планарности и толщину графов:

а) K_5;

б) $K_{3,3}$.

7. Определить хроматические числа графов, изображенных на рис. 7.13.

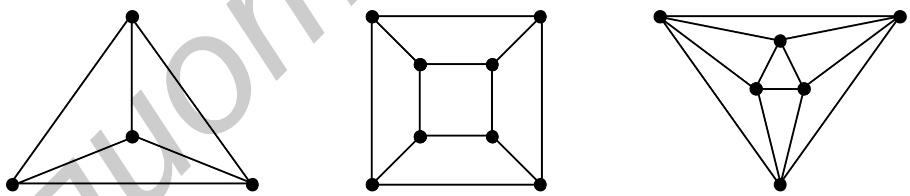


Рис. 7.13

8. Приведите пример графа, последовательная раскраска вершин которого не является минимальной.

Тема 8. Элементы комбинаторного анализа

8.1. *Элементы комбинаторики. Задачи на подсчет комбинаторных конфигураций.*

В комбинаторном анализе рассматриваются задачи о расположении элементов в соответствии с точно определенными правилами, выясняется, могут ли быть осуществлены такие расположения и сколькими способами.

Особенностью комбинаторных исследований является то, что в них используются преимущественно три операции: отбор подмножеств некоторого множества, упорядочение и размещение элементов этих подмножеств. Набор элементов $a_{i1}, a_{i2},\ldots, a_{ir}$ множества $A = \{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ называется выборкой объема r из n-множества или (n,r)-выборкой. Выборки бывают упорядоченными и неупорядоченными, с повторениями и без повторений элементов. Любое допустимое расположение элементов в выборке называют решением комбинаторной задачи.

Среди задач комбинаторного анализа выделяют перечислительные задачи (задачи на подсчет числа возможных решений), задачи о существовании допустимых решений и экстремальные задачи, в которых из множества допустимых решений выделяют экстремальное, обладающее некоторым свойством в большей или меньшей степени.

Главными средствами для подсчета числа решений комбинаторных задач являются аналитические методы (перестановки и сочетания, производящие функции, рекуррентные соотношения) и логические методы (метод включений и исключений).

Сочетания и перестановки. Упорядоченная (n,r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n,r)-перестановкой с повторениями (размещением). Число последних будем обозначать символом $\hat{P}(n,r) = n^r$. Если все элементы упорядоченной (n,r)-выборки различны, то она называется (n,r)-перестановкой (размещением) $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Приведем формулу для числа различных перестановок из n элементов, среди которых r_1 элементов 1-го типа, r_2 элементов 2-го типа, ..., r_k элементов k-го типа:

$$P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot \ldots \cdot r_k!}, \sum_{i=1}^{k} r_i = n$$

По данной формуле подсчитывается число неупорядоченных разбиений n-множества на S на r_i-подмножества S_i, $i = 1$–k такие, что $\bigcup_1^k S_i = S$, $S_i \cap S_j = \varnothing$, для $i \neq j, \sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

Неупорядоченная (n,r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n,r)-сочетанием с повторениями. Их число обозначают символом $\hat{C}(n,r)$. Если все элементы неупорядоченной (n,r)-выборки различны, она называется (n,r)-сочетанием, а число таких сочетаний обозначается через $C(n,r)$:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

При подсчете числа комбинаторных решений используются два правила. *Правило суммы*: если объект A может быть выбран n способами, а объект B – другими m способами, то выбор «*либо A, либо B*» может быть осуществлен $(n+m)$ способами. *Правило произведения*: если объект A может быть выбран

n способами и после каждого такого выбора объект B в свою очередь может быть выбран m способами, то выбор «*А и В*» в указанном порядке может быть осуществлен $m \cdot n$ способами. Применяя оба правила, нетрудно получить формулы для числа перестановок и сочетаний:

$$C_{n+r-1}^{r} = \hat{C}(n, r).$$

Размещения. Операцию размещения можно интерпретировать как отображение множества элементов на множество классов («ячеек») в соответствии с определенными требованиями. Задачей на размещение будем называть задачу о числе размещений элементов по ячейкам. Разнообразие задач на размещение связано с тем, что необходимо учитывать вид элементов и их число, вид ячеек и их вместимость, порядок элементов в ячейках. Выделяют следующие классы задач на размещение: (A) элементы различимы, ячейки различимы; (B) элементы неразличимы, ячейки различимы; (C) элементы различимы, ячейки неразличимы; (D) элементы неразличимы, ячейки неразличимы. Если на характер отображения не накладывается ограничений, то типичными задачами класса А являются:

1) размещение n различных элементов по r различным ячейкам, 2) образование слов длины r из алфавита в n букв, 3) образование (n,r)-перестановок с повторениями. Число возможных размещений определяется формулой $\hat{P}(n, r) = n^{r}$. Взаимно-однозначное отображение накладывает на размещения ограничения, соответственно: 1) каждая ячейка вмещает один и только один элемент; 2) буква внутри слов не повторяется, 3) в перестановках не допускается повторений. В этом случае число возможных размещений вычисляется по формуле $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

К задачам класса В можно отнести следующие: а) элементы n-множества размещаются по r ячейкам так, что ни одна ячейка не пуста; б) элементы n-множества размещаются по r ячейкам так, что могут быть пустые ячейки.

Решение задачи «а» сводится к подсчету числа способов проведения (r-1) линий в (n-1) промежутках между элементами, которое равно C_{n-1}^{r-1}. При решении задачи «б» к n-множеству элементов присоединяют r символически «пустых» элементов и подсчитывают число способов провести (r-*1*) линий в (n-1) промежутках между элементами C_{n+r-1}^{r-1}.

Общие задачи на размещение из класса С сложные. При отсутствии ограничений по занятости любой ячейки получен простой результат: число размещений n различных элементов по r одинаковым ячейкам (ячейки могут быть пустыми) равно $\dfrac{r^{n}}{r!}$. Теория решений задач класса D почти не разработана, однако и для этого класса задач получены интересные формулы. Например, число способов размещения n различных элементов по r различным ячейкам с учетом их порядка в ячейках равно $n!\ C_{n+r-1}^{r-1}$. Если среди n элементов есть n_1 элементов 1-го типа, n_2 – элементов 2-го типа, ... , n_k – элементов k-го типа, то число различных размещений определяется формулой $P_3 = C_{n+r-1}^{r-1}$. $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$

8.2. *Метод производящих функций.* Производящие функции были введены в комбинаторный анализ в качестве средства, позволяющего с большей общностью подходить к комбинаторным задачам перечислительного типа. Рассмотрим множество элементов

X={$x_1, x_2, \ldots, x_n$}.

Построим полином вида

$$\Pi_{k=1}^{n}(1 + x_k \cdot t) = 1 + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)t + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots)t^2 = \sum_{r=0}^{n} a_r t^r$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $a_2 = \sum_{i1<i2} x_{i1} \cdot x_{i2}$. $a_r = \sum_{i1<i2<\cdots<ir} x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot \ldots \cdot x_{ir}$ есть функции от (n,r)-выборки множества X, r = 0÷n. Каждый бином вида ($1 + x_k t$) отражает две возможности: элемент x_k вошел в выборку один раз (слагаемое $x_k t$); элемент x_k не вошел в выборку ни разу (слагаемое 1). Если все $x_k = 1$, то $\Pi(1 + x_k \cdot t) = (1 + t)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^r t^2$ и коэффициенты a_r есть число *(n,r)*-сочетаний без повторений. Функция $f(t) = (1 + t)^n$ называется производящей функцией для последовательности чисел $C_n^r, r = 0,1,\ldots n.$ Она однозначно связана с этой последовательностью.

Дадим общее определение производящей функции. Для этого рассмотрим последовательность целых чисел a = {$a_1, a_2, \ldots, a_n$}. Ей взаимно однозначно соответствует функция $f_n(t) = \sum_{r=0}^{n} a_r t^r$, называемая обычной производящей функцией для последовательности a. Функция вида $E_n(t) = \sum \frac{a^r t^r}{r!}$ называется экспоненциальной производящей функцией для последовательности a.

При конечном n функция $f_n(t)$ соответствует неупорядоченным (n,r)-выборкам или функциям от них, а функция $E_n(t)$-упорядоченным (n,r)-выборкам или функциям от них. С помощью производящих функций можно находить число *(n,r)*-выборок с заданными свойствами.

8.3. *Метод включений и исключений.*

Применяется при разделении множества на подмножества, элементы которых обладают определенной совокупностью свойств, а также при подсчёте числа элементов в этих подмножествах. Пусть дано n-множество S некоторых элементов и m-множество свойств P={$p_1, p_2, \ldots, p_m$}, которыми элементы из S могут как обладать, так и не обладать. Выделим r-выборку свойств {$p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ir}$}. Обозначим через $n(p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ir})$ число элементов множества S, каждый из которых обладает всеми выделенными r свойствами. Отсутствие у элемента свойства p_r будем обозначать $\overline{p_r}$. Так, число элементов, обладающих свойствами p_1, p_3, p_5 и не обладающих свойствами p_2, p_4 из выборки свойств P={p_1, p_2, p_3, p_4, p_5} запишется как $n(p_1, \overline{p}_2, p_3, \overline{p}_4, p_5)$. Если имеется только одно свойство p, т.е.

$P=\{p\}$, то $n(\overline{p})=n-n(p)$ число элементов n-множества, не обладающих свойством p. Если $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ – конечное множество свойств, не совместимых друг с другом, то число элементов, не обладающих ни одним из этих свойств, определяется формулой

$$n=(\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_m)=n-\sum_{i_1=1}^{n} n(p_{i_1})$$

Если $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ – конечное множество совместимых между собой свойств, то имеет место формула

$$n(\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_m)=n-\sum_{i_1=1}^{n} n(p_{i_1})+\sum_{i_1<i_2} n(p_{i_1}, p_{i_2})-\sum_{i_1<i_2<i_3} n(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3})+...(-1)^m n(p_1, p_2, ..., p_m).$$

известная как формула включений и исключений. Её можно записать и в несколько ином виде:

$$n(p_1,...,p_k, \overline{p}_{k+1},...,\overline{p}_m)=n(p_1, p_2,...,p_k)-\sum_{i_1>k} n(p_1,...,p_k, p_{i_1})+\sum_{i_1<i_2<k} n(p_1, p_2,...,p_k, p_{i_1}, p_{i_2})+$$

$$+\sum_{i_1<i_2<k} n(p_1, p_2,..., p_k, p_{i_1}, p_{i_2})+...(-1)^{m-k} n(p_1,..., p_k, p_{k+1},..., p_m).$$

Область применения метода включений и исключений довольно широка. С его помощью решаются задачи на подсчет числа перестановок с запретами, задачи теории вероятностей, задачи из теории чисел.

Рассмотрим одну из задач на перестановки с запретами. Ее принято называть задачей о беспорядках. Имеется упорядоченное множество чисел 1, 2, ..., n. Из них могут быть образованы перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Число всех возможных перестановок из n элементов равно $n!$. Перестановки, в которых ни один элемент не сохранил своего первоначального места $(a_i \neq i,\ i=1+n)$, называются беспорядками. Число беспорядков из n элементов можно найти по формуле включений и исключений:

$$N(\overline{P}_1,...\overline{P}_n)=n!-\sum N(P_{i_1})+\sum N(P_{i_1}, P_{i_2})+...+(-1)^n N(P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_n),$$

где P_i означает свойство «i-ый элемент перестановки стоит на i-м месте», $P=\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ – множество свойств элементов оставаться на своих местах, $N(P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_k})$ – число перестановок из n элементов, в которых на своих местах стоят k элементов. Если k элементов из n закрепляются на своих местах, то $N(P_{i_1}, ..., P_{i_k})=(n-k)!$. При этом «неподвижных» k элементов из n можно выбрать C_n^k способами, тогда по правилу произведения получим, что $\sum N(P_{i_1}, ..., P_{i_2})=C_n^k(n-k)!$. Окончательно имеем формулу для числа беспорядков:

$$N(\overline{P}_1,...,\overline{P}_n)=n!\ -\ C_n^1(n-1)!\ +...+\ (-1)^n C_n^n 0!\ =n!\ (1\ -\ \frac{1}{1!}\ +\ \frac{1}{2!}\ +...+\ \frac{(-1)^n}{n!}).$$

Задачи на подсчет числа перестановок с запретами можно решать и с помощью аппарата булевых матриц.

Задаче о беспорядках можно дать следующую техническую интерпретацию: пусть проектируется дискретное устройство, состоящее из нескольких узлов и работающее в различных режимах. Каждый режим работы устройства определяется вектором $(a_{i_1}^{(1)}, a_{i_2}^{(2)}, \ldots, a_{i_n}^{(n)})$, компоненты которого соответствуют состояниям узлов (верхний индекс обозначает номер узла, нижний – номер состояния). В процессе проектирования устройства следует исключить запретные состояния узлов, в которых ни один номер состояния узла не соответствует номеру узла устройства.

Занятие 10
Задачи на подсчет комбинаторных конфигураций

Вопросы к занятию

1. Элементы комбинаторики.
2. Типы задач комбинаторного анализа.
3. Методы решения задач комбинаторного анализа.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти число (n,r)-сочетаний с повторениями.

Решение

Для нахождения числа (n,r)-сочетаний с повторениями воспользуемся методом рекуррентных соотношений, в соответствии с которым решение задачи с r элементами выражается через решение этой же задачи с меньшим числом элементов.

Зафиксируем в множестве $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ некоторый элемент. Каждое (n,r)-сочетание с повторениями либо содержит этот элемент, либо не содержит. Если имеет место 1-й случай, то остальные r-1 элементов этой выборки можно выбрать $\hat{C}(n,r-1)$ способами. Если имеет место 2-й случай, то (n,r)-сочетания с повторениями выбирается из $(n-1)$ элементов и число их равно $\hat{C}(n-1,r)$. По правилу суммы получаем рекуррентное соотношение

$\hat{C}(n,r) = \hat{C}(n,r-1) + \hat{C}(n-1,r)$

со следующими граничными условиями:

$\hat{C}(n,r) = n,\ \hat{C}(1,r) = 1.$

При r = 2 получаем, что

$\hat{C}(n,2) = \hat{C}(n,1) + \hat{C}(n-1,2) = \hat{C}(n,1) + \hat{C}(n-1,1) + \hat{C}(n-2,1) + \ldots = \hat{C}_{n+1}^{2}.$

При r = 3 можно найти, что $\hat{C}(n,3) = \hat{C}_{n+2}^{3}$ и т.д.

Окончательно имеем $\hat{C}_{n+r-1}^{r} = \hat{C}(n,r).$

Задача 2. Пусть на диск нанесены 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

Решение

$\hat{A}(n,r) = \hat{A}(12,5) = 12^5 = 248\ 832$

Число неудачных попыток равно 248 831.

Задача 3. При передаче сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифры и знаки обозначают точками и тире. Для одних букв необходим один знак (букве Е соответствует знак «-») , а для других - используется пять знаков (Э «..-..»). Почему необходимо пять знаков? Нельзя ли обойтись меньшим числом?

Решение

Нельзя. Действительно, с помощью одного знака можно передать две буквы ($\hat{A}(2,1) = 2$), с помощью двух знаков – четыре буквы ($\hat{A}(2,2) = 4$), с помощью трех знаков – восемь букв ($\hat{A}(2,3) = 8$), с помощью четырех знаков – шестнадцать букв ($\hat{A}(2,4) = 16$). По правилу суммы с помощью четырех знаков можно передать 2 + 4 + 8 + 16 = 30 букв. А в русском языке 32 буквы, да еще цифры и знаки препинания. Если используются 5 знаков, то необходимо еще прибавить $2^5 =$ $= 32$ символа.

Задача 4. В некотором государстве у двух жителей не было одинакового набора зубов. Какой должна быть наибольшая численность населения государства? (наибольшее число зубов равно 32).

Решение

$\hat{A}(n,r) = \hat{A}(2,32) = 2^{32}$.

Задача 5. У англичан принято давать детям три имени. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дать не более трех имен, когда общее число имен равно 300?

Решение

$$A(n,r) = A(300,3) = \frac{300!}{(300-3)!} = 300 \cdot 299 \cdot 298.$$

Задача 6. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга? Каков будет ответ, если ладьи отличаются друг от друга (например пронумерованы)?

Решение

Ясно, что при таком расположении на каждой горизонтали и вертикали стоит по одной ладье. Пусть a_1 – номер занятого поля на 1-й горизонтали, a_2 – на второй,..., a_8 – на восьмой горизонтали, тогда $(a_1,a_2,..,a_8)$ будет некоторая перестановка из чисел 1, 2, .., 8 (все числа в этой перестановке различны). Таким образом, число искомой расстановки равно числу перестановки P(8) = 8! = 40 320.

В этом случае из каждого расположения не пронумерованных ладей получим $n!$ расположение пронумерованных ладей. То есть $(n!)^2$ способами можно расположить ладей, чтобы они не «били» друг друга.

Задача 7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей?

Решение

Для ответа на этот вопрос необходимо определить, сколькими способами из 64 клеток можно выбрать 8 клеток.

$$C(64,\ 8) = \frac{64!}{8!\,56!}.$$

На доске из m горизонталей и n вертикалей k ладей можно поставить числом способов $C(n,m,k) = \frac{mn!}{k!\,(mn-k)!}$.

Если же ставить не k одинаковых ладей, а k различных фигур, то ответ даст формула размещений $A(n,m,k) = \frac{mn!}{(mn-k)!}$.

Задача 8. В кондитерском магазине продается четыре сорта пирожных: наполеон (*Н*), эклеры (*Э*), песочное (*П*), слоеное (С). Сколькими способами можно купить семь пирожных?

Решение

Эта задача не является задачей на размещение с повтором. Она ближе к задаче на сочетание, однако, в комбинации могут входить и повторяющиеся элементы. Эта задача на сочетания с повторами.

Для решения данной задачи поступим следующим образом: зашифруем каждую покупку с помощью 0 и 1. Возьмем столько 1, сколько куплено *Н*; затем «0», отделяющий *Н* от Э и т.д. В итоге каждой покупке будет соответствовать комбинация из 7 единиц и 3 нулей.

Например, 0| 1110 |11110|
0Э| 3Н | 4П |0С

Следовательно, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из семи единиц и трех нулей, т.е. $P_{10}(7,3)=\frac{10!}{3!\,7!}=120$.

Задания для самостоятельной работы

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из них можно использовать не более одного раза?

2. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

3. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

4. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел их получать, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

5. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз;

б) ровно один туз;

в) не менее двух тузов;

г) ровно два туза?

6. В соревнованиях по гимнастике участвовало две команды, в которых было одинаковое число участников. В итоге общая сумма баллов, полученных всеми участниками соревнований, равна 156. Сколько было участников, если каждый из них получил оценки только 8 или 9 баллов?

7. В роте – три офицера и сорок солдат. Сколькими способами может быть выделен наряд, состоящий из одного офицера и трех солдат?

8. Какова вероятность при покупке билета угадать в спортлото (из 49):

а) $к$ номеров ($к = 1,2,\ldots,6$);

б) хотя бы $к$ номеров?

9. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

10. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

11. Сколько различных делителей имеет: а) число 2310; б) число 10!?

12. На перекрестке A автомобилист разбил стекло левой фары (рис. 8.1), и теперь ему надо кратчайшим путем попасть в ремонтную мастерскую B, не попав при этом в пункт M. Сколькими способами он может выбрать маршрут?

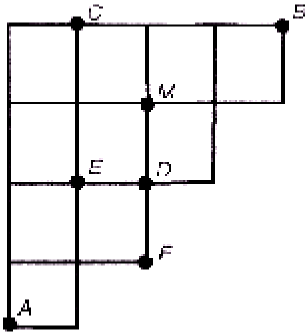


Рис. 8.1

13. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии?

Занятие 11
Метод производящих функций. Метод включений и исключений

Вопросы к занятию

1. Комбинаторные задачи перечислительного типа.
2. Метод производящих функций.
3. Метод включений и исключений.

Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотрим задачу о нахождении числа *(n,r)*-сочетаний с неограниченным числом повторений из множества элементов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Решение

Для решения воспользуемся полиномом вида $\Pi(x_1 t + x_2^2 t^2 + \ldots + x_r^k t^k)$, каждый сомножитель которого отражает появление элемента x_r «либо 0, либо 2,... либо *K*,..., либо,.. раз». Полагая, что все $x_r = 1$, приведем полином к виду $\Pi(1 + t + t^2 + \ldots) = (1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots)^n = f_{нп}(t)$.

Функция $f_{нп}(t)$. является производящей функцией для искомого числа сочетаний. Поскольку $\sum_{i=0}^{n} t^n = \dfrac{1}{1-t}$ при $|t| < 1$, $f_{нп}(t)=(1-t)^{-n}=$

$$= \sum_0^\infty C_{-n}^r (-t)^r = \sum_0^\infty((-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)/r^t)(-1)^r t^r = \sum_{r=0}^\infty C_{n+r-1}^r t^2 .$$

Из полученной формулы для производящей функции видно, что число (n,r)-сочетаний с неограниченным числом повторений равно C^r_{n+r-1}. Этот результат согласуется с полученным ранее.

Над производящими функциями можно осуществлять арифметические операции. Пусть $a=\{a_0, a_1, \ldots\}$ и $b=\{b_0, b_1, \ldots, b_k, \ldots\}$ две последовательности с производящими функциями $f_a(t)$ и $f_b(t)$ соответственно. Суммой производящих функций $f_a(t)$ и $f_b(t)$ назовем производящую функцию $f_c(t) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r t^r$ для последовательности с общим членом $C_r = a_r + b_r$. Произведением производящих функций $f_a(t)$ и $f_b(t)$ назовём производящую функцию $f_d(t) = \sum_{r=0}^{\infty} d_r t^r$ для последовательности с общим членом $d_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + \ldots + a_rb_0$.

Задача 2. Решим задачу о числе (n,r)-перестановок с повторениями при условии, что каждый элемент повторяется не менее одного раза.

Решение

Указанной комбинаторной операции соответствует производящая функция вида $\left(\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^r}{r!}+\ldots\right)^n = (e^t-1)^n$. Искомое число перестановок является коэффициентом при $\frac{t^r}{r!}$ следующего ряда:

$$(e^t-1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j e^{(n-j)t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j (n-j)^r = \sum_{r=0}^{\infty} P_1(n,r)\frac{t^r}{r!}.$$

Эта задача равносильна задаче о числе размещений n различных элементов по r различным ячейкам при условии, что ни одна ячейка не остается пустой.

Задача 3. В урне находятся 4 красных, 5 синих и 2 зеленых шара: а) сколько существует способов выбора 7 шаров из урны? б) сколько существует способов выбора из урны 7 шаров, если 1 шар красный и 2 синих.

Решение

Для части «а» производящая функция имеет вид

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2)$,

и количество способов выбора 7 шаров равно коэффициенту при x^7 в разложении этой производящей функции.

В части «б» нужно учесть, что 1 вытянутый шар красный, соответствующий многочлен имеет вид $(x + x^2 + x^3 + x^4)$, что представляет вытягивание 1, 2, 3 или 4 красных шаров. Точно так же, учитывая, что 2 вытянутых шара синие, соответствующий многочлен должен иметь вид $(x^2+x^3+x^4+x^5)$, что представляет вытягивание 2, 3, 4 или 5 синих шаров. Таким образом, производящий многочлен имеет вид

$(x + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2)$, и количество способов выбора 7 шаров равно коэффициенту при x^7 в разложении производящей функции.

Задача 4. Допустим, в урне находятся 3 красных, 8 зеленых, 9 оранжевых и 2 белых шара. Сколько существует способов выбора 12 шаров из урны, если 1 выбранный шар – красный, количество выбранных зеленых шаров – четное, а количество оранжевых – нечетное?

Решение

Учитывая, что хотя бы 1 выбранный шар должен быть красным, могут быть выбраны 1, 2 или 3 таких шара, поэтому многочлен, представляющий красные шары, имеет вид

$x + x^2 + x^3$.

Поскольку количество выбранных зеленых шаров четное, выбранными могут быть 0, 2, 4, 6 или 8 таких шаров, поэтому многочлен, представляющий зеленые шары, имеет вид

$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$.

Количество выбранных оранжевых шаров должно быть нечетным, поэтому выбранными могут быть 1, 3, 5, 7 или 9 таких шаров, так что многочлен, представляющий оранжевые шары, имеет вид

$x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9$.

Следовательно, производящей функцией для рассматриваемой задачи будет

$(x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)(x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9)(1 + x + x^2)$,

а ответ на вопрос даст коэффициент при x^{12}.

Задача 5. Найдем коэффициент при x^{24} в разложении производящей функции $(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots)^4$.

Решение

$$(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots)^4 = (x^3)^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^4 =$$

$$= (x^{12}) \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = (x^{12}) \frac{1}{(1-x)^4} = (x^{12})(1 + 4x + \binom{5}{2}x^2 + \ldots + \binom{4+n-1}{n}x^n + \ldots).$$

Следовательно, чтобы найти коэффициент при x^r в разложении этой производящей функции, необходимо найти коэффициент при x^{r-12} в разложении производящей функции

$$1 + 4x + \binom{5}{2}x^2 + \ldots + \binom{4+n-1}{n}x^n + \ldots,$$

так что коэффициент при x^r равен $C_{r-12}^{4+r-12-1} = C_{r-12}^{r-9}$,

а коэффициент при x^{24} равен $C_{24-12}^{24-9} = C_{12}^{15}$.

Задача 6. Выясним, сколько существует способов выбора 12 объектов из совокупности объектов пяти типов, если необходимо выбрать не более 2 объектов первых трех типов и неограниченное количество объектов остальных двух типов.

Решение

Производящая функция имеет вид

$(1 + x + x^2)^3(l + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2$.

Но

$$(1 + x + x^2)^3 = \left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^3.$$

Поэтому

$$(1 + x + x^2)^3(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2 = \left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^3(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2 =$$

$$= \frac{(1-x^3)^3}{(1-x)^3}\,\frac{1}{(1-x)^2} = (1- x^3)^3\,\frac{1}{(1-x)^5}.$$

Ниже используется обозначение $\binom{A}{B} = C_A^B$.

Поскольку $(1- x^3)^3 = 1- 3x^3 + 3x^6 - x^9$

$$\frac{1}{(1-x)^5} = 1+5x + \binom{6}{2} x^2 + \ldots + \binom{5+n-1}{n} x^n + \ldots,$$

то согласно правилу умножения полиномов, коэффициент при x^{12} в произведении

$$(1- 3x^3 + 3x^6 - x^9)\left(1+5x + \binom{6}{2} x^2 + \ldots + \binom{5+n-1}{n} x^n + \ldots\right)$$

равен

$$\binom{5+12-1}{12} - 3\binom{5+9-1}{9} + 3\binom{5+6-1}{6} - \binom{5+3-1}{3}.$$

Задача 7. Сколько существует способов выбора 20 объектов из множества объектов пяти типов, если количество выбранных объектов первого типа кратно 5, количество выбранных объектов второго типа кратно 3, объектов третьего типа следует выбрать не более 4, объектов четвертого типа – не менее 3, а объектов пятого типа – не более 2?

Решение

Производящая функция имеет вид

$(1 + x^5 + x^{10} + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots)(1 + x + \ldots + x^4)(x^3 + x^4 + \ldots)(1 + x + x^2)$

и может быть представлена в виде выражения

$$\frac{1}{1-x^5}\,\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1-x^5}{1-x}\,\frac{x^3}{1-x}\,\frac{1-x^3}{1-x}=\frac{x^3}{(1-x)^3}$$

исходя из этого производящая функция имеет вид

$$x^3\left(1+3x+\binom{4}{2}x^2+\ldots+\binom{3+n-1}{n}x^n+\ldots\right).$$

Коэффициент при x^r равен $\binom{r-1}{r-3}$, а коэффициент при x^{20} равен $\binom{19}{17}$.

Задача 8. Найти производящую функцию, n-й коэффициент которой дает количество неотрицательных целочисленных решений уравнения $e_1 + 4e_2 + 5e_3 + 3e_4 = n$, что эквивалентно нахождению количества способов выбора n объектов, когда объекты второго типа выбираются по 4 за один раз, объекты третьего типа – по 5, а объекты четвертого типа – по 3 за раз.

Решение

Производящая функция имеет вид

$(1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^4 + x^8 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots)$, но это равно $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^3)}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производящую функцию, в которой коэффициент при x^r описывает количество решений уравнения

а) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$, где $0 \le e_2 \le 2$ и $0 \le e_4 \le 4$;

б) $e_1 + e_2 + e_3 = r$, где $0 \le e_1 \le 3$ и e_3 четно;

в) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$, где e_1 нечетно, e_2 четно и $e_4 \ge 4$;

г) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$, где $e_i \ge i$ для всех i;

д) $e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 = r$.

2. Найти производящую функцию, которую можно использовать для нахождения количества способов выбора r элементов из:

а) 4 красных, 3 синих, 6 оранжевых и 2 зеленых шаров;

б) 2 красных, 5 зеленых, 4 оранжевых и 3 зеленых шаров, если необходимо выбрать не менее 1 шара каждого цвета;

в) 6 красных, 12 черных, 7 белых и 10 синих шаров, если необходимо выбрать не менее 4 черных шаров и четное количество синих шаров;

г) 6 красных, 12 черных, 7 белых и 10 синих шаров, если необходимо выбрать не менее 1 шара каждого типа, четное количество красных шаров и нечетное количество белых шаров.

3. Найти производящую функцию для нахождения количества способов выбора r элементов из:

а) 6 красных, 5 синих, 4 оранжевых и 3 зеленых шаров;

б) 7 красных, 5 зеленых, 8 оранжевых и 4 белых шаров, если необходимо выбрать нечетное количество зеленых и красных шаров и четное количество оранжевых и белых шаров;

в) 5 красных, 4 фиолетовых, 6 белых и 8 черных шаров, если необходимо выбрать не менее 2 черных шаров, 1 оранжевого, 3 красных и четное количество синих шаров;

г) 9 красных, 7 черных, 6 белых и 11 синих шаров, если необходимо выбрать не менее 2 шаров каждого типа, нечетное количество красных шаров и нечетное количество белых шаров.

4. Найти производящую функцию для определения количества способов составить *к* центов, используя монеты стоимостью 1, 5, 10 и 25 центов.

5. В маленьком городке 50 зарегистрированных избирателей, каждый из них либо голосует дважды, либо остается дома, за исключением мэра города, который голосует либо три раза, либо пять. Используя производящую функцию, определите, сколько существует способов собрать *n* голосов.

6. Найти производящую функцию, которая используется для нахождения количества способов разложения *к* различных типов шоколадок в 6 коробок, если в первую коробку помещать четное количество шоколадок, во вторую – нечетное, не менее 3 шоколадок помещать в третью коробку, более 3 – в четвертую коробку и любое их количество – в оставшиеся две коробки.

7. Подбрасывание *к* игральных кубиков дает в сумме *n*. Используйте производящую функцию для определения количества способов подбрасывания.

8. Найти коэффициент при x^7 в разложении производящей функции
$f(x) = (x + x^2 + x^3)^5$.

9. Найти коэффициент при x^{10} в разложении производящей функции $\dfrac{x^4}{(1-x)^5}$.

10. Найти коэффициент при x^{17} в разложении производящей функции $\dfrac{x^4}{1-x^5}$.

11. Найти коэффициент при x^{20} в разложении производящей функции
$f(x) = (x^4+x^8+x^{16} + \ldots)^3$.

12. Найдите коэффициент при x^{12} в разложении производящей функции
$f(x) = (x^2+x^3 + x^4 + \ldots)^4$.

13. Найдите коэффициент при x^{10} в разложении производящей функции
$f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x + x^5 + x^{10})$.

14. Найдите коэффициент при x^{12} в разложении производящей функции
$\dfrac{x+3}{1-2x+x^2}$.

15. Найдите коэффициент при x^{12} в разложении производящей функции
$\dfrac{x^3-3x^2}{(1-x)^4}$.

16. Найдите коэффициент при x^{12} в разложении $f(x) = (1 - 3x)^4$.

17. Найдите коэффициент при x^{12} в разложении производящей функции $\dfrac{1}{(1-x^3)^4}$.

18. С помощью производящей функции найти количество способов выбора 10 шаров из 20 красных, 20 белых и 20 синих, если:

а) следует выбрать не менее одного шара каждого цвета;

б) следует выбрать четное количество красных шаров и четное количество синих шаров.

19. С помощью производящей функции определить, сколько существует способов распределения 15 игрушек между 5 детьми, если ни один ребенок не может получить более 4 игрушек?

20. Методом включений и исключений решить следующие задачи, введя соответствующие свойства элементов во множествах.

а) Каждый из 500 студентов обязан посещать хотя бы один из трех спецкурсов: по математике, физике, астрономии. Три спецкурса посещают 10 студентов, по математике и физике – 30, по математике и астрономии – 25; спецкурс только по физике – 80 студентов. Известно также, что спецкурс по математике посещают 345 студентов, по физике – 145, по астрономии – 100 студентов. Сколько студентов посещают спецкурс только по астрономии? Сколько студентов посещают два спецкурса?

б) 500 студентов посещают три спецкурса. Спецкурс только по математике, только по математике и физике, только по физике и астрономии посещают одинаковое число студентов; три спецкурса посещают 20 студентов. Спецкурс по математике посещают столько же студентов, сколько спецкурс по физике. Один спецкурс по физике посещают 50 студентов, а спецкурс по астрономии – 250 студентов. Сколько студентов посещают только один спецкурс?

в) Экзамен по математике содержал три задачи: по алгебре, по геометрии и по тригонометрии. Из 750 абитуриентов задачу по алгебре решили 400 абитуриентов, по геометрии – 480, по тригонометрии – 420; задачи по алгебре или геометрии решили 630 абитуриентов; по геометрии или тригонометрии – 600 абитуриентов; по алгебре или тригонометрии – 620 абитуриентов; 100 абитуриентов не решили ни одной задачи. Сколько абитуриентов решили все задачи? Сколько абитуриентов решили только одну задачу?

г) Экзамен по математике содержал три задачи: по алгебре, геометрии и тригонометрии. Из 800 абитуриентов задачу по алгебре решили 250 человек, по алгебре или геометрии – 660 человек, по две задачи решили 400 человек, из них две задачи по алгебре и геометрии решили 150 человек, по алгебре и тригонометрии 50 человек; ни один абитуриент не решил все задачи; 20 абитуриентов не решили ни одной задачи; только по тригонометрии задачи решили 120 человек. Сколько решили только одну задачу? Сколько человек решили задачи по геометрии?

Тема 9. Комбинаторные задачи выбора

Примерами оптимизационных комбинаторных задач, решение которых предполагает комбинаторный поиск, являются рассмотренные нами в предыдущих разделах поиск наибольшего независимого и наименьшего доминирующего множеств, раскраска графа.

В отличие от задач традиционной математики, где решение получается с помощью целенаправленной вычислительной процедуры, однозначно ведущей к цели, решение комбинаторной задачи сводится зачастую к *полному перебору* различных вариантов. Перебираются и испытываются конструкции определенного вида, среди которых должно находиться решение задачи. Как только выясняется, что очередная конструкция является решением, процесс поиска решения можно считать завершенным.

В традиционной математике трудоемкость задачи обычно не очень сильно зависит от размера области возможных решений, в то время как для комбинаторных задач эта зависимость весьма велика.

Для комбинаторных задач характерно также то, что множество, среди элементов которого отыскивается решение, всегда конечно. При реализации полного перебора решение либо найдено, либо решения нет. Таким образом, всякая подобная задача может быть решена за конечное время. Однако это не значит, что она может быть решена за практически приемлемое время даже с помощью самой быстродействующей вычислительной машины.

Многие комбинаторные оптимизационные задачи сводятся к *задаче о кратчайшем покрытии*, которая ставится следующим образом. Пусть даны некоторое множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и совокупность его подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, т. е. $B_i \subseteq A$, $i = 1, 2, \ldots, m$, причем $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m = A$. Требуется среди данных подмножеств выделить такую совокупность $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k}$ с минимальным k, чтобы каждый элемент из A попал хотя бы в одно из B_{i_j} ($j = 1, 2, \ldots, k$), т. е. $B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots \cup B_{i_k} = A$.

Одной из интерпретаций этой задачи является задача о переводчиках. Из некоторого коллектива переводчиков, число которых m и каждый из которых владеет несколькими языками, требуется скомплектовать минимальную по числу членов группу, такую, чтобы она смогла обеспечить перевод с любого из заданного множества языков, число которых n. Здесь A – множество языков, перевод с которых требуется обеспечить, а B_i – множество языков, которыми владеет i-й переводчик.

Удобно рассматривать матричную формулировку данной задачи, при которой совокупность $B_1, B_2, \ldots, B_m$ задается в виде булевой матрицы, строки которой соответствуют подмножествам из данной совокупности, а столбцы – элементам множества A. Элемент i-й строки и j-го столбца имеет значение 1, если и только если $a_j \in B_i$. В этом случае говорят, что i-я строка *покрывает* j-й столбец. Требуется найти такое множество строк данной матрицы, чтобы каждый ее столбец имел единицу хотя бы в одной строке из этого множества, и при этом мощность выбранного множества должна быть минимальной.

Занятие 12
Задача о кратчайшем покрытии

Вопрос к занятию

Задача о переводчиках как комбинаторная задача выбора.

Примеры решения задач

Задача 1. *Задача о переводчиках*. Из некоторого числа переводчиков, каждый из которых владеет несколькими определенными языками, требуется скомплектовать минимальную по числу членов группу, такую, чтобы она смогла обеспечить перевод с любого из интересующих нас языков.

Введем следующие обозначения:

$A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ – множество переводчиков, $B = \{b_1, b_2 \ldots . b_n\}$ – множество языков, $D = | d_{ij} |$ – булева матрица отношения переводчиков к языкам с элементами $d_{ij} = 1 \Leftrightarrow a_i \succ b_j$ (переводчик a_i знает язык b_j), $d_{ij} = 0$ в противном случае. Решение данной задачи сводится к нахождению минимальной совокупности строк матрицы D (группы переводчиков), которая содержала бы не менее одной единицы в каждом столбце матрицы.

Решение

Рассмотрим решение данной задачи, когда матрица D имеет вид

D =

B / A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
d	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
f	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
g	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
h	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
i	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

При решении будем использовать приближенный алгоритм.

1. В матрице D отыскивается минимальный столбец (содержащий наименьшее число единиц). Если таких столбцов несколько, выбираем самый левый из них.

2. Среди строк, покрывающих этот столбец, отыскивается максимальная строка (содержащая наибольшее число единиц) и включается в искомое покрытие $П$. Если таких строк несколько, выбирается самая верхняя из них.

3. В матрице D вычеркивается строка, выбранная на шаге 2, и вычеркивается столбец, единичные элементы которого покрываются этой строкой. В результате получается новая матрица D' и шаги 1–3 повторяются до тех пор, пока все столбцы исходной матрицы не окажутся покрытыми.

⇧

D' =

⇨

	2	4	5	7	8	10
a	0	1	0	0	1	0
b	1	0	0	1	0	0
c	1	0	1	0	1	0
d	1	1	0	0	1	1
e	0	1	0	1	0	0
g	1	0	1	1	0	0
h	0	0	1	0	1	0
i	0	1	1	1	0	1

⇧

D'' =

⇨

	2	5	7
a	0	0	0
b	1	0	1
c	1	1	0
e	0	0	1
g	1	1	1
h	0	1	0
i	0	1	1

D''' =

	Ø
a	
b	
c	
e	
h	
i	

Искомое покрытие имеет вид $П = \{f, d, g\}$. Сделаем проверку, построив дизъюнкцию строк, вошедших в данное покрытие:

1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 (f)
0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 (d)
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 (g)

Следовательно, задача решена правильно.

Задания для самостоятельной работы

Решить задачу о переводчиках.

а

$D =$

B / A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
d	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
f	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
g	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
h	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
i	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

б

$D =$

B / A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
d	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
f	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
g	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
h	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
i	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

в

$D =$

B / A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 1
a	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
d	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
e	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
f	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
g	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
h	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
i	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

г

$D =$

B / A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
d	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
f **1)**	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
g	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
h	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
i	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1

д

$D =$

A \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
c	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
d	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
f	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
g	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
h	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
i	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

Тема 10. Блок-схемы алгоритмов

Основные требования, предъявляемые к алгоритмам:

– алгоритм имеет дело с *данными* и выдает *результат*, т.е. алгоритм имеет *вход* и *выход;*

– данные для своего размещения требуют памяти. Единицы измерения объема данных и памяти согласованы;

– алгоритм состоит из отдельных элементарных шагов или действий (дискретность), причем множество этих шагов конечно;

– последовательность шагов алгоритма детерминирована;

– алгоритм применяется не к одной задачи, а к классу задач (массовость).

Связь между шагами можно представить в виде ориентированного графа, называемого блок-схемой алгоритма. В этом орграфе вершины соответствуют шагам, а дуги – переходам между шагами. Вершины блок-схем могут быть двух видов: 1) вершины, из которых выходит одна дуга, так называемые *операторы;* 2) вершины, их которых выходят две дуги, так называемые *предикаты* или *логические условия*.

Важной особенностью блок-схем является то, что связи, которые они описывают, не зависят от того, являются ли шаги элементарными или представляют собой самостоятельные алгоритмы.

Декомпозиция алгоритма – способ разбиения алгоритма на блоки – широко используется в практике программирования. С помощью блок-схем можно несколько алгоритмов, рассматриваемых как блоки, связать в один большой алгоритм.

Пусть алгоритм A_1 вычисляет функцию $f_1(x)$, алгоритм A_2 – функцию $f_2(x)$, причем, исходными данными для алгоритма A_2 являются результаты алгоритма A_1. Ниже представлена блок схема, задающая композицию этих алгоритмов, позволяющая вычислить $f_2(f_1(x))$.

При всей наглядности языка блок-схем не следует переоценивать его возможности. Это скорее средство для описания детерминизма алгоритма.

Трудоемкость алгоритма, или временнЮя сложность, т. е. время, затрачиваемое на выполнение алгоритма, оценивается числом условных элементарных операций, которые необходимо выполнить при решении задачи. Естественно, эта величина зависит от объема исходных данных, который оценивается некоторым параметром. Например, для графа это может быть число вершин или число ребер. Трудоемкость алгоритма, таким образом, можно оценить некоторой функцией $f(n)$, где n – натуральное число, выражающее объем исходных данных.

Принято писать $f(n) = O(g(n))$, где $g(n)$ – некоторая конкретная функция от n, если найдется такая константа c, что $f(n) \le cg(n)$ для любого $n \ge 0$. При этом употребляют такие выражения: «трудоемкость алгоритма есть $O(g(n))$» или «алгоритм решает задачу за время $O(g(n))$». Если трудоемкость не зависит от объема исходных данных, то для ее обозначения используется символ $O(1)$. Алгоритм трудоемкости $O(n)$ называют *линейным*. Алгоритм трудоемкости $O(n^b)$, где b – константа (возможно, дробная), называется *полиномиальным*. Если $g(n)$ является показательной функцией, например 2^n, то говорят, что алгоритм обладает *неполиномиальной*, или *экспоненциальной*, сложностью.

Занятие 13
Алгоритмы и их блок-схемы

Вопросы к занятию

1. Основные требования к алгоритмам.
2. Блок-схемы алгоритмов и их особенности.

Задания для самостоятельной работы

Построить блок-схемы алгоритмов на булевых матрицах и графах.

1. «Жадный» алгоритм нахождения кратчайшего покрытия.
2. Минимаксный алгоритм нахождения кратчайшего вершинного покрытия.
3. «Жадный» алгоритм раскраски графа.
4. «Жадный» алгоритм нахождения независимых множеств графа.
5. Алгоритм нахождения минимального вершинного покрытия в графе.
6. Алгоритм нахождения минимального доминирующего множества в графе.
7. Алгоритм нахождения наибольшего паросочетания.
8. Алгоритм нахождения наименьшего реберного покрытия.
9. Алгоритм нахождения наибольшей клики.
10. Алгоритм нахождения наибольшего независимого множества с использованием задачи о кратчайшем покрытии.
11. Алгоритм построения реберного графа.
12. Алгоритм построения дополнительного графа.
13. Алгоритм нахождения наибольшего паросочетания реберного графа с использованием знания наибольшего независимого множества исходного графа.
14. Алгоритм исследования гамильтонова графа на планарность.

15. Алгоритм нахождения гамильтонова цикла в графе.

16. Алгоритм построения остовного дерева графа.

17. Алгоритм нахождения минимального остовного дерева нагруженного графа.

18. Алгоритм нахождения максимального остовного дерева нагруженного графа.

19. Алгоритм построения матрицы достижимостей графа.

20. Алгоритм построения матрицы контрдостижимостей графа.

21. Алгоритм перехода от задания графа матрицей смежности к заданию с помощью списка смежности.

22. Алгоритм перехода от задания графа списком смежности к заданию с помощью матрицы смежности.

23. Алгоритм реализации таких операций над графами как объединение и пересечение.

24. Алгоритм реализации на графе поиска в глубину.

25. Алгоритм реализации на графе поиска в ширину.

Тема 11. Представление конечных автоматов

Конечный автомат с алфавитами A и B удобно представлять таблицей переходов и таблицей выходов. При задании автомата Мили в клетках таблицы «Функция переходов» помещается состояние, в котором автомат переходит из состояния q при поступлении на его вход сигнала a. В клетках таблицы «Функция выходов» помещается выходной сигнал, который выдает автомат, при переходе из состояния q и поступления на его вход сигнала a.

Автомат Мура представляется одной таблицей переходов, к которой добавлен один столбец со значением функций выходов.

Занятие 14
Представление конечных автоматов

Вопросы к занятию

1. Основные понятия теории автоматов.
2. Автомат Мили.
3. Автомат Мура.

Примеры решения задач

Задача 1. Конечный автомат с алфавитами A и B представлен таблицей переходов (табл. 11.1) и таблицей выходов (табл. 11.2). Построить граф переходов автомата Мили. Найти для него эквивалентный автомат Мура. По заданному начальному состоянию автомата найти выходную последовательность b по известной входной последовательности a.

Таблица 11.1

Функция переходов

a	a1	a2	a3	a4
q1	q1	q2	q1	q2
q2	q3	q1	q3	q1
q3	q3	q1	q1	q1

Таблица 11.2

Функция выходов

a	a1	a2	a3	a4
q1	b1	b1	b2	b1
q2	b1	b2	b2	b1
q3	b2	b2	b1	b1

Решение

Автомат Мура представляется одной таблицей переходов, к которой добавлен один столбец со значением функций выходов (табл. 11.3).

Таблица 11.3

a	a1	a2	a3	a4	Ф
q1	q1	q2	q1	q2	b1
q2	q3	q1	q3	q1	b1
q3	q3	q1	q1	q1	b2

Можно свести таблицу переходов и таблицу выходов в одну таблицу, называемую таблицей переходов и выходов (табл. 11.4).

Таблица 11.4

a	a1	a2	a3	a4
q1	q1,b1	q2,b1	q1,b2	q2,b1
q2	q3, b1	q1,b2	q3, b2	q1,b1
q3	q3, b2	q1,b2	q1,b1	q1,b1

Зная начальное состояние автомата и входную последовательность, нетрудно получить соответствующую последовательность выходных сигналов (табл. 11.5).

Таблица 11.5

a1	a2	a2	a1	a3	a4	a1	a4
q1	q1	q2	q1	q1	q1	q2	q3
b1	b1	b2	b1	b2	b1	b1	b1

Представим автомат в виде графа переходов, (орграф), вершины которого соответствуют состоянию автомата, а дуги – переходам из одного состояния в другое. При этом дуга помечается всеми выходными сигналами, которые вызывают соответствующие переходы и выходные сигналы.

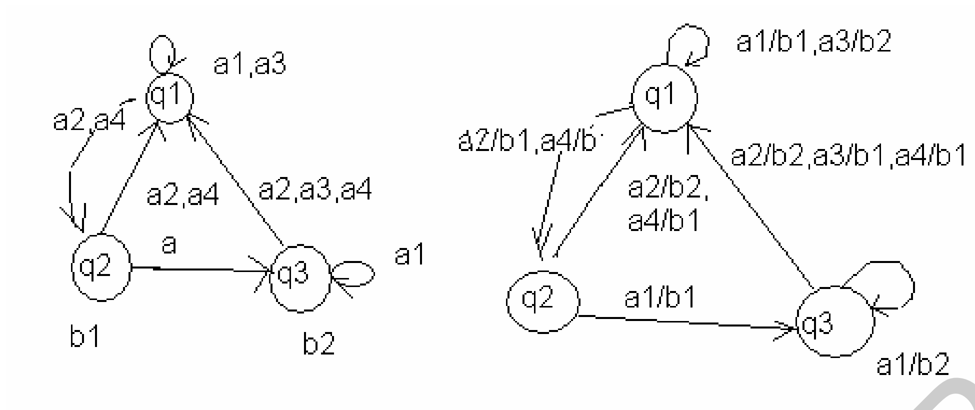


Рис. 11.1

Задания для самостоятельной работы

1. Конечный автомат с алфавитами *A* и *B* представлен таблицей переходов и таблицей выходов (табл. 11.6). Построить граф переходов автомата Мили. Найти для него эквивалентный автомат Мура. По заданному начальному состоянию q_0 автомата найти выходную последовательность b по известной входной последовательности *a*.

Таблица 11.6

	а	б	в	г
q_0	$q_0 = q_2$	$q_0 = q_2$	$q_0 = q_2$	$q_0 = q_2$
a	$a_1\ a_4\ a_2\ a_1\ a_3\ a_2$	$a_2\ a_1\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1$	$a_3\ a_4\ a_1\ a_2\ a_1$	$a_4\ a_1\ a_3\ a_2\ a_4$

2. Конечный автомат с алфавитами *A* и *B* представлен таблицей переходов и таблицей выходов (табл. 11.7). Построить граф переходов автомата Мили. Найти для него эквивалентный автомат Мура. По заданному начальному состоянию q_0 автомата найти выходную последовательность b по известной входной последовательности *a*.

Таблица 11.7

	а	б	в	г
q_0	$q_0 = q_3$	$q_0 = q_3$	$q_0 = q_3$	$q_0 = q_3$
a	$a_1\ a_4\ a_2\ a_1\ a_3\ a_2$	$a_2\ a_1\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1$	$a_3\ a_4\ a_1\ a_2\ a_1$	$a_4\ a_1\ a_3\ a_2\ a_4$

3. Конечный автомат с алфавитами *A* и *B* представлен таблицей переходов и таблицей выходов (табл. 11.8). Построить граф переходов автомата Мили. Найти для него эквивалентный автомат Мура. Найти выходную последовательность b по известной входной последовательности *a*.

Таблица 11.8

Функция переходов

	a1	a2	a3	a4
q1	q1	q2	q1	q2
q2	q3	q1	q3	q1
q3	q3	q1	q1	q1

Функция выходов

	a1	a2	a3	a4
q1	b1	b1	b2	b1
q2	b1	b2	b2	b1
q3	b2	b2	b1	b1

Литература

1. Глушков, В. М. Синтез цифровых автоматов / В. И. Глушков. – М. : ГИФМЛ, 1962. – 476 с.

2. Донской, В. И. Дискретная математика / В. И. Донской. – Симферополь : Сонат, 2000. – 354 с.

3. Карпов, Ю. Г. Теория автоматов / Ю. Г. Карпов. – СПб. : Питер, 2002. – 206 с.

4. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с.

5. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженеров / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – М. : Энергия, 1988. – 480 с.

6. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М. : Наука, 1990. – 384 с.

7. Москинова, Г. И. Дискретная математика / Г. И. Москинова. – М. : Логос, 2002. – 238 с.

8. Реингольд, Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Э. Реингольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М. : Мир, 1980. – 476 с.

9. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1986. – 384 с.

Св. план 2008, поз. 124

Учебное издание

Поттосина Светлана Анатольевна
Пинчук Татьяна Георгиевна

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

Практикум для студентов специальности
«Информационные системы и технологии в экономике»
всех форм обучения

Редактор М. В. Тезина
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка Е. Г. Бабичева

Подписано в печать 09.01.2009.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 5,23.
Уч.-изд. л. 4,6.	Тираж 150 экз.	Заказ 264.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6