УДК:621.762.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЕГРЕГАЦИИ ЧАСТИЦ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИИ



Л.П.Пилиневич
Профессор кафедры инженерной психологии и эргономики БГУИР, доктор технических наук, профессор, кавалер медали Франциска Скорины

Pilinevich@bk.ru

М.В.Тумилович
Начальник управления подготовки научных кадров вышей квалификации БГУИР, доктор технических наук, доцент
tumilovich@bsuir.by

А.Г.Кравцов
Заместитель академика-секретаря физико-технического отделения наук Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор

Л.П.Пилиневич
Профессор кафедры инженерной психологии и эргономики БГУИР, доктор технических наук, профессор, кавалер медали Франциска Скорины.

М.В.Тумилович
Начальник управления подготовки научных кадров вышей квалификации БГУИР, доктор технических наук, доцент.

А.Г.Кравцов
Заместитель академика-секретаря физико-технического отделения наук Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор.

Аннотация. Проведено математическое моделирование процессов сегрегации дисперсных частиц при наложении вибрационных колебаний. Получены математические зависимости, описывающие кинетику процесса сегрегации и позволяющие оценить время вибрационного формования, необходимое для полной сегрегации частиц дисперсной порошковой смеси и разделения дисперсных частиц по размерам или массе.

Ключевые слова. Математическое моделирование, вибрация, дисперсные частицы, порошки, сегрегация.

Введение. Вибрацию в настоящее время используют в различных отраслях реального сектора экономики для интенсификации разнообразных, иногда взаимопротивоположных технологических процессов, таких, как: разделение дисперсных материалов по физико-механическим свойствам и их смешивание; уплотнение обрабатываемой среды и ее разрыхление; снижение и ликвидация концентраторов напряжений или, наоборот, создание при упрочнении вибронаклепом сжимающих остаточных напряжений, увеличение микротвердости; гранулирование и измельчение твердых тел; ориентирование деталей, различных тел и частиц в пространстве и создание их хаотического расположения; заполнение емкостей сыпучими материалами и их разгрузка [1].

Цель настоящей работы – провести математическое моделирование процессов сегрегации дисперсных частиц при наложении вибрации, которое позволит описать кинетику процесса сегрегации и оценить время полного разделения дисперсных частиц по размерам или массе.

В процессе вибрационного воздействия на дисперсную порошковую смесь ее частицы находятся в постоянном колебательном движении, причем характер этого движения существенно зависит от параметров вибрации, размеров частиц и их массы. Одним из основных механизмов, обусловливающих сегрегацию частиц по размерам под действием вибрационных колебаний, является образование дополнительных пустот возле крупных частиц и последующее просеивание мелких частиц в эти пустоты, что и приводит к подъему крупных частиц. Поэтому в качестве допущения о природе сил, приводящих к сегрегации, нами взято следующее положение: в процессе колебательного движения вокруг более крупной или массивной частицы создается градиент концентрации частиц основной порошковой смеси, причем эта концентрация выше под частицей, чем над ней [2].

Физическое обоснование данного допущения можно получить, исходя из анализов процессов упругого столкновения частиц различной массы. Будем считать, что частицы основной порошковой массы имеют среднюю скорость колебательного движения V и массу m, выделенная более тяжелая (крупная) частица – массу M. Тогда скорости, которые приобретают частицы с массой M и m после их столкновения, равны:

$$V_{1M} = \frac{2M}{m+M}V, \qquad V_{1m} = \frac{m-M}{m+M}V. \tag{1}$$

В свою очередь частица массой M, приобретая скорость V_{1M}, сталкиваясь с другой частицей массой m, получит скорость V_{2m}:

$$V_{2m} = \frac{2M}{m+M}V_{1M} = \frac{4mM}{(m+M)^2}V. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) определим относительную скорость частиц массой m после второго и первого столкновения:

$$V_{2M} - V_{1m} = [\frac{4mM}{(m+M)^2} - \frac{m-M}{m+M}]V = \frac{4mM + M^2 - m^2}{(m+M)^2}V. \tag{3}$$

В то же время из уравнения (3) видно, что в случае $m=M$, т.е. когда порошковая смесь однородна, $V_{2m}=V_{1m}=V$.

Возникающие дополнительные расстояния между частицами порошка вблизи более тяжелой (крупной) частицы можно оценить из следующего соотношения:

$$\Delta l = \frac{4mM + M^2 - m^2}{(m+M)^2} - 1 \quad V\frac{1}{f} \tag{4}$$

где f – частота колебаний.

Из выражения (4) с учетом того, что средняя скорость колебательного движения частиц связана с параметрами вибраций выражением:

$$V \approx \frac{a}{f}, \tag{5}$$

где a – ускорение вибрационных колебаний, получаем:

$$\Delta l \approx \frac{m(M-m)}{(m+M)^2}\ \frac{a}{f^2} \tag{6}$$

Таким образом, если $M>m$, то около частицы массой M в процессе колебаний будут возникать пустоты, через которые под действием сил тяжести будет происходить просеивание мелких частиц, что и обусловливает увеличение их концентрации под тяжелой частицей и соответственно уменьшение под ней.

Описанное формирование градиента концентрации приводит к перемещению тяжелой (крупной) частицы вверх за счет действия дополнительной силы, связанной с тем, что импульс иглы, переданный нижними частицами, становится больше соответствующего импульса, переданного верхними частицами при столкновениями с крупной.

Для количественного описания сегрегации при виброформовании запишем уравнение движения более тяжелой частицы в вертикальном направлении:

$$M\frac{dU(t)}{dt} = -Mg\left(1-\frac{\rho_c}{\rho_M}\right) - \frac{1}{B}U(t) + \varsigma(t), \tag{7}$$

где $U(t)$ – скорость движения частицы массой M в вертикальном направлении; ρ_c, ρ_M – плотности порошковой среды и материала более крупной (тяжелой) частицы; $B = \frac{1}{3\pi\mu D}$ – подвижность тяжелой частицы (здесь D – размер тяжелой частицы); $\xi(t)$ – случайная сила, обусловленная возникающим градиентом концентрации частиц среды.

Запишем частное решение уравнения (7) в следующем виде:

$$U(t) = U_0(t)\exp\ -\frac{1}{BM}t\ \ -BMg\left(1-\frac{\rho_c}{\rho_M}\right), \tag{8}$$

где $U_0(t)$ определяют из выражения:

$$U_0(t)\exp\ -\frac{1}{BN}t\ \ = \frac{\xi(t)}{M}. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (9) получаем:

$$U_0(t) = \frac{1}{M}\int_0^t \exp\ \frac{1}{BM}\tau\ \ \xi(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Так как время упругого столкновения частиц бесконечно мало, и сила $\xi(\tau)$ связана с передачей импульса частице M при практически одновременном воздействии на нее окружающих частиц порошковой смеси, то будем считать, что случайная сила $\xi(\tau)$ описывается следующей функцией:

$$\xi(\tau) = \Phi\delta(t), \tag{11}$$

где Ф – случайная константа, зависящая от размеров и масс частиц порошка и параметров вибрации; $\delta(t)$ – дельта функция.

Подставляя (10) в 9), получим:

$$U_0(t) = \frac{\Phi}{M} - \int_0^t exp\left(-\frac{1}{BM}t\right)\delta(\tau)d\tau = \frac{\Phi}{M}, \tag{12}$$

Из уравнений (8) и (12) получаем уравнение движения рассматриваемой частицы в виде:

$$U_0(t) = \frac{\Phi}{M}\exp\left(-\frac{1}{BM}t\right) - BMg\left(1-\frac{\rho_c}{\rho_M}\right). \tag{13}$$

Так как в (13) входит случайная константа Ф, то *U(t)* также является случайной функцией и сам процесс движения частицы *M* является случайным.

Как видно из уравнения (13), скорость *U(t)* с течением времени уменьшается, и через промежуток времени t_* своего движения в вертикальном направлении тяжелая частица останавливается. Значение t_* равно

$$t_* = -BM\ln\left(\frac{BM^2 g\left(1-\frac{\rho_c}{\rho_M}\right)}{\Phi}\right). \tag{14}$$

За это время она переместиться в вертикальном направлении на расстоянии *S*, равное:

$$S = \int_0^{t_*} U(\tau)d\tau = BM\left(\frac{\Phi}{M}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{BM}\right)\right) - g\left(1-\frac{\rho_c}{\rho_M}\right)t_*\right). \tag{15}$$

За это время своего движения вверх частица массой *M* сможет либо перейти в следующий слой частиц порошка, либо, не достигнув его, вернуться в исходное положение. Причем возможность такого перехода связана с величиной случайного воздействия, которая в уравнениях (14 и 15) описываются случайным параметром Ф. Следовательно, движение более тяжелой частицы в вертикальном направлении представляет собой систему скачков, один из которых заканчивается ее перемещением на следующий слой мелких частиц, а другие – возвращением в исходное положение. Условием перемещения частицы *M* на следующий слой порошковой массы является неравенство

$$S \quad d, \tag{16}$$

где d – размер мелких частиц порошковой смеси; S – определяется из уравнения (15) и принимает случайные значения в соответствии со значением случайного параметра Ф, который также зависит от размеров и массы частиц порошка и параметров вибрационных колебаний.

В соответствии с определением (11) параметр Ф имеет размерность импульса. Вследствие этого будем считать, что величина Ф пропорциональна импульсу, передаваемому частице массой *M* частицами порошковой смеси, одновременно сталкивающимися с ней

$$\Phi \approx \Delta p \ \Delta N, \tag{17}$$

где Δp – величина импульса, передаваемого частице массой *M* при ее столкновении с частицей массой *m*; ΔN – разность числа мелких частиц среды, окружающих крупную частицу в нижней и верхней ее частях.

Согласно выражению (1) $\Delta p = MV_{1M} = \frac{2mM}{m+M}V$, откуда с учетом (5) получаем:

$$\Delta p \approx \frac{mM}{m+M}\frac{a}{f}\,. \qquad (18)$$

Число мелких частиц в верхней части крупной частицы можно оценить, исходя из следующего соотношения:

$$N_{в} = 2\rho_{B}\left(\frac{D}{d}\right)^{2}, \qquad (19)$$

где $\rho_в$ – относительная плотность укладки частиц порошка в верхней части.

Аналогично для нижней части можно записать:

$$N_{н} = 2\rho_{н}\left(\frac{D}{d}\right)^{2}, \qquad (20)$$

Из последних двух выражений получаем значение величины ΔN: $\Delta N = N_н - N_в$, или

$$\Delta N = 2\left(\rho_{н} - \rho_{в}\right)\left(\frac{D}{d}\right)^{2}, \qquad (21)$$

где $\rho_н$ – относительная плотность укладки частиц порошка в нижней части.

Значение $\Delta\rho = \rho_н - \rho_в$ зависит от формы и размеров частиц порошковой смеси, а также, как показывают результаты экспериментальных исследований, от высоты засыпки

$$\Delta\rho = \Delta\rho f_{1}(h)\,, \qquad (22)$$

где $\Delta\rho'$ – изменение относительной плотности, связанное со свойствами частиц порошка; h – высота засыпки порошковой смеси.

Учитывая, что в левой части уравнения (22) стоит безразмерная величина, то и в правой части выражение должно быть безразмерным. Поэтому перейдем от высоты засыпки к безразмерному параметру – числу слоев частиц мелкого порошка, равному h/d. В этом случае уравнение (22) примет следующий вид:

$$\Delta\rho = \Delta\rho f_{1}\left(\frac{h}{d}\right), \text{ или } \Delta\rho \approx f_{1}\left(\frac{h}{d}\right). \qquad (23)$$

Для определения функции $f_1(h/d)$ предположим, что данная зависимость обусловлена переупаковкой частиц порошка в нижних слоях засыпки под действием верхних слоев. По аналогии с уравнением прессования запишем следующее уравнение уплотнения порошковой смеси под действием собственной массы порошка:

$$\rho \approx \rho\left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad (24)$$

где m` – постоянная, которая для большинства порошков близка к 5 [3]. Преобразуя данное соотношение получаем зависимость:

$$\rho \approx \frac{h}{d}^{1/4}. \tag{25}$$

Тогда
$$f_1 \frac{h}{d} \approx \rho \approx \frac{h}{d}^{1/4}, \text{ или } \Delta\rho \approx \frac{h}{d}^{1/4}. \tag{26}$$

С учетом (26) запишем (21) в следующем виде:

$$\Delta N \approx \frac{D}{d}^{2} \frac{h}{d}^{1/4}. \tag{27}$$

Подставляя соотношение (18) и (27) в (17), получаем:

$$\Phi \approx \frac{mM}{m+M} \frac{D}{d}^{2} \frac{h}{d}^{1/4} \frac{a}{f},$$

или
$$\Phi \approx \alpha \frac{mM}{m+M} \frac{D}{d}^{2} \frac{h}{d}^{1/4} \frac{a}{f}, \tag{30}$$

где α − множитель, который вследствие того, что параметр является случайным, также представляет собой случайное число.

Так как, множитель α отражает случайный характер воздействия мелких частиц на крупные, причем величина воздействия зависит от большого числа факторов, то можно считать, что случайные числа α распределены по нормальному закону. В этом случае α связано с равномерно распределенным случайным числом β_0, которое может быть получено на компьютере, используя следующее соотношение:

$$\alpha = K_1\ 1 + K_2 \sqrt{\ln\frac{1}{\beta_0}} \cos(2\pi\beta_0) \tag{31}$$

где $0<\beta_0<1$.

При такой записи параметр K_1 характеризует среднее значение нормального распределения чисел α; а параметр K_2 характеризует отношение дисперсии распределения α к их среднему значению:

$$K_2 = \frac{\sigma_\alpha}{\alpha}. \tag{32}$$

В этом случае величина K_2 должна зависеть от отношения размеров мелких и крупных частиц d/D, так как чем меньше значение d/D, тем большее число мелких частиц воздействует на крупную, и тем более стабильна величина воздействия. Для учета влияния указанного фактора запишем выражение для K_2 в следующем виде:

$$K_2 = K_3 \frac{d}{D}, \tag{33}$$

где K_3 – параметр.

Значение параметра K_3 оценим исходя из следующего условия: при d=D функция распределения случайного воздействия становится практически равномерной; это обусловлено равномерным положением частиц в данном случае. Определим численное условие того, что функция распределения становится равномерной. Функция нормального распределения в общем виде представляет собой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^x \exp\left(-\frac{(t-\bar{x})}{2\sigma^2}\right)dt. \tag{34}$$

Тогда распределение случайных величин можно считать равномерным, если выполняется условие:

$$\frac{\varphi(2\bar{x}) - \varphi(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})} \quad 0{,}01. \tag{35}$$

Подставляя уравнение (34) в неравенство (35), получаем соотношение между $\bar{x}$ и σ: $\frac{\bar{x}}{\sigma} \quad 0{,}13,$

или в случае равенства

$$\left(\frac{\sigma}{x_{кр}}\right) = 7{,}5. \tag{36}$$

Из выражений (32) и (33) получаем:

$$\frac{\sigma_\alpha}{\bar{\alpha}} = K_3 \frac{d}{D},$$

а в случае d=D получим:

$$\frac{\sigma_\alpha}{\alpha}_{кр} = K_3 \tag{37}$$

Подставляя выражение (36) в (37), определяем значение параметра K_3= 7,5, тогда в соответствии с равенством (33) получим, что:

$$K_2 = 7{,}5\frac{d}{D}. \tag{38}$$

Из выражений (31) и (38) можно получить следующее уравнение для случайного параметра α:

$$\alpha = K_1 \ 1 + 7{,}5\sqrt{\ln\frac{1}{\beta_0}}\cos(2\pi\beta_0)\frac{d}{D}. \tag{39}$$

Подставляя выражение (39) в (33), определим значение параметра Ф в виде

$$\Phi = K_1 \;\; 1 + 7{,}5\sqrt{\ln\frac{1}{\beta_0}}\cos(2\pi\beta_0)\frac{d}{D} \;\; \frac{mM}{m+m} \;\; \frac{D}{d}^{\;2} \;\; \frac{h}{d}^{\;1/4} \; \frac{a}{f}. \qquad (40)$$

С учетом (23) получаем выражение для эффективной вязкости порошковой среды:

$$\mu = \frac{5}{6} \;\; \frac{2}{\pi}^{\;1/2} \rho^2 \rho_M \;\; \frac{1}{1-\rho} + \frac{3\rho}{2\left(1-\rho^2\right)} + \frac{\rho^2}{2\left(1-\rho\right)^3} \;\; d\overline{V}, \qquad (41)$$

где ρ_M – плотность материала порошка; $\overline{V}$ – средняя скорость вибрационного движения частиц.

Совместный анализ зависимостей (27) и (41) показывает, что для исследуемых в работе порошков бронзы зависимость $\mu=\mu(h)$ может быть аппроксимирована следующей функцией:

$$\mu \approx \;\; \frac{h}{D}^{\;0{,}3}.$$

Для средней скорости вибрационных колебаний частиц порошковой смеси справедливо соотношение (11), тогда уравнение (41) преобразуем к следующему виду:

$$\mu \approx \rho_M \;\; \frac{h}{d}^{\;0{,}3} d\frac{a}{f}, \text{ или } \;\; \mu = K_4 \rho_M \;\; \frac{h}{d}^{\;0{,}3} d\frac{a}{f}, \qquad (42)$$

где K_4 – параметр.

С учетом (42) подвижность крупной частицы в среде мелких описывается следующим выражением:

$$\beta = \frac{1}{3\pi K_4 \rho_M \;\; \frac{h}{d}^{\;0{,}3} d\frac{a}{f} D}. \qquad (43)$$

Как видно из полученных соотношений, разработанная модель позволяет описывать процессы сегрегации частиц порошка по размерам при вибрационном формовании с точностью до параметров K_1 и K_4, численное значение которых аналитически определить весьма сложно, так как они зависят от большого количества факторов, учесть которые практически невозможно. В целях определения значений параметров K_1 и K_4 для исследованных в работе [1] порошков бронзы были проведены модельные эксперименты при следующих условиях: D = 0,56 мм, d = 0,056 мм; a = 10 м/с^2, f = 30 Гц, h_1 = 2 мм, h = 0 мм.

Для обоих значений толщины слоя засыпки порошка определялось время подъема одиночной крупной частицы со дна формы на поверхность порошковой массы. Усредненные значения времени, подъема, полученные после проведения 10 экспериментов для каждой толщины засыпки, составили: t_1= 3,7 с; t_2= 6,6 с. Сопоставление полученных данных с результатами расчетов по приведенным уравнениям позволили определить значения K_1 и K_4: K_1 = 3,4; K_4 = 7,3.

На основании полученных соотношений была предложена следующая схема расчета кинетики сегрегации частиц по размерам при вибрационном формовании порошковой засыпки:

– определяется случайное равномерное распределенное число β_0 из интервала (0,1);

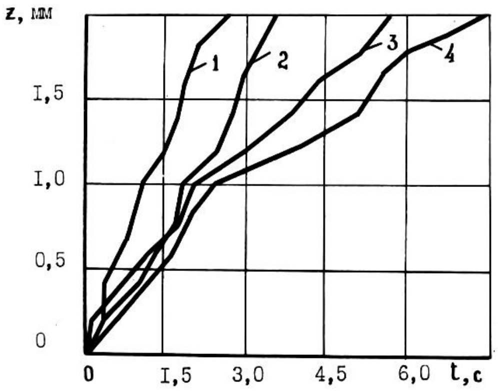
– по уравнениям (40) и (43) рассчитываются параметры Ф и B;

– из уравнений (14) и (15) определяются значения времени t_* и расстояния S, проходимого крупной частицей при элементарном скачке;

– в случае, если выполняется условие (16), крупная частица перемещается в вертикальном направлении на $\Delta Z = \frac{S}{d}$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа);

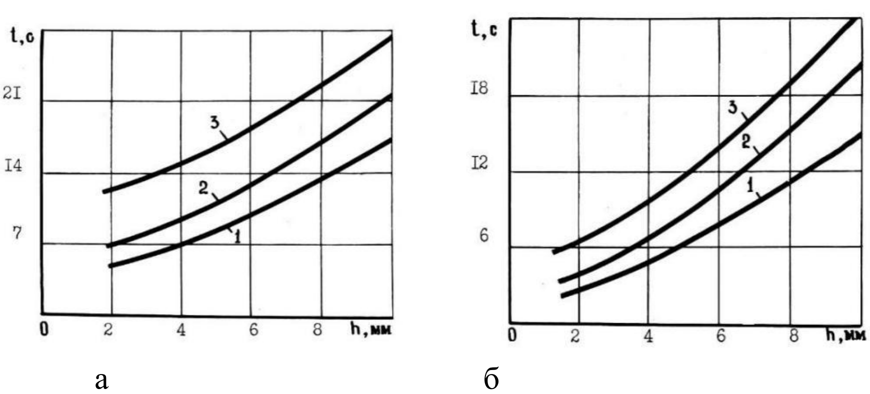
– если же соотношение (16) не выполняется, то крупная частица возвращается в исходное состояние.

По приведенной схеме проведены расчеты времени сегрегации частиц при различных соотношениях D, d и h. Зависимости перемещения крупной частицы в вертикальном направлении от времени представлены на рисунке 1. Анализ полученных кривых показывает, что сегрегации носят случайный характер, который отражается в скачкообразном изменении величины вертикального перемещения. На рисунке 2 показаны рассчитанные зависимости времени сегрегации от толщины слоя засыпки при различных значениях D и d. Анализ приведенных данных показал, что время сегрегации нелинейно возрастает с увеличением h. Скорость сегрегации также возрастает при увеличении D и уменьшении d.



1 – размер частиц крупного порошка (-0,63…+0,4); 2 – (-0,4…+0,315); 3 – (-0,315…+0,2); 4 – (-0,2…+0,16) мм

Рисунок 1. Кинетика подъема крупных частиц порошка бронзы марки БрОФ –10 –1 разного размера в порошковой засыпке толщиной 2 мм из частиц размером (-0,063…+0,04) мм



а б

1 – размер частиц крупного порошка (-0,63…+0,4); 2 - (-0,4…+0,315); 3 – (-0,315…+0,2)

Рисунок 2. Зависимость времени сегрегации от толщины слоя мелкого порошка бронзы марки БрОФ –10 –1 с размером частиц (-0,063…+0,04) мм (а) и (-0,1…+0,063) мм (б)

Таким образом, расчет по предложенной модели позволяет определить время вибрационного формования, необходимое для полной сегрегации частиц по размерам дисперсной порошковой смеси.

Заключение. В результате проведенного математического моделирования получены математические зависимости, описывающие процессы сегрегации дисперсных частиц при наложении вибрационных колебаний, которые позволяют описать кинетику процесса сегрегации и оценить время вибрационного формования, необходимое для полной сегрегации частиц дисперсной порошковой смеси и полного разделения дисперсных частиц по размерам или массе.

Список литературы

[1] Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э. Э. Лавендела. 1981. – 509 с.

[2] Мазюк, В.В. Пористые порошковые материалы с анизотропной структурой: методы получения / В.В.Мазюк, Л.П. Пилиневич Л.П., А.Л. Рак, В.В. Савич, М.В. Тумилович // Под ред. П.А.Витязя. – Мн: «Тонпик», 2006. – 268 с.

[3] Бальшин, М.Ю. Основы порошковой металлургии / М.Ю. Бальшин, С.С. Кипарисов. – М.: Металлургия, 1978. – 184 с.

Авторский вклад

Пилиневич Л.П. – *провел теоретический анализ исследуемой проблемы, сформулировал цель работы.*

Кравцов А.Г. – *совместно с* **Пилиневичем Л.П.** *математически описали процесс сегрегации дисперсных частиц по размерам и массе при наложении вибрации.*

Тумилович М.В. – *провел экспериментальные исследования влияния параметров вибрации на кинетику подъема и время сегрегации дисперсных части порошка.*

MATHEMATICAL MODELING OF PARTICLE SEGREGATION PROCESSES UNDER THE INFLUENCE OF VIBRATION

L.P. Pilinevich
Professor of Engineering Psychology and Ergonomics BSUIR, Doctor of Technical Sciences, Professor, holder of the Francis Skaryna Medal

M.V. Tumilovich
Head of the Department for the Training of Scientific Personnel of Higher Qualification of BSUIR, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor.

A.G. Kravtsov
Deputy Academician-Secretary of the Physical and Technical Department of Sciences of the Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Doctor of Technical Sciences, Professor

Abstract. Mathematical modeling of the processes of segregation of dispersed particles under the application of vibration oscillations has been carried out. Mathematical dependencies were obtained that describe the kinetics of the segregation process and allow one to estimate the vibration molding time required for complete segregation of particles of a dispersed powder mixture and separation of dispersed particles by size or mass.

Keywords. Mathematical modeling, vibration, dispersed particles, powders, segregation.