УДК 168.51

Н.В. Михайлова
(Минск, Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники)

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОГО СИНТЕЗА В КОНТЕКСТЕ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Исходным пунктом философско-методологического синтеза в обосновании математического анализа становятся объединяющие коннотации философских основ всех математических идеализаций и методов логического оперирования с ними исходя из факта особой достоверности современной математики и неправомерности отождествления ее с опытными науками. Методологическая сущность новой концепции обоснования математики состоит в конкретизации философско-методологического синтеза для реально работающих направлений развития математического знания. Научная новизна предлагаемого философского подхода к проблеме обоснования математического анализа связана с таким пониманием доминирующего статуса математических моделей, который снимает методологически неоправданные ограничения на принципы метатеории, определяемые исключительно в рамках математических критериев.

Ключевые слова: *философско-методологический синтез, проблема обоснования. математический анализ*

* * *

Синтез знаний людей о природе и социальной реальности образует общую картину мира, создание которой – задача всех областей знания, включая математику и философию. Математический анализ предполагает не только соответствие математических высказываний реальности, но и философскую обоснованность такого знания. Взгляд на проблему обоснования под углом зрения философско-методологического синтеза способствует приращению знания, открывая новые способы коммуникации в математическом знании. «Исключение синтеза из числа методов познания по той причине, что его задача уже включена в задачу наивно понимаемого анализа, распространено не только в философии, но и в конкретных науках. Например, в математике есть раздел «Математический анализ», который включает дифференциальное и интегральное исчисление, но нет раздела «Математический синтез», что для наивной трактовки анализа вполне логично»[1]. Практическая деятельность человека и развитие его интеллекта раздвигали границы окружающего мира, выявляя в нем все новые для нас подробности и указывая на ограниченность нашего знания. Уверенность в высокой степени объективности научного знания и его обоснования создает философские основания для онтологизации картины мира. Это совершенно

[1] Левин Г.Д. Анализ и синтез // Вопросы философии. 2016. № 2. С. 97.

необходимо потому, что математическая логика отчасти деформировала современное мышление как математиков, так и философов, идя по пути, намеченному аристотелевской логикой. Однако целостные свойства системы математического анализа получают определенное обоснование, связанное с проникновением во внутренний мир этой системы.

Можно также специально отметить, что необходимость философско-методологического синтеза программ обоснования обусловлена еще и тем, что философия акцентирует свои когнитивные задачи на выявлении теоретически универсального в обосновании разделов высшей математики, а методология – на развитии практической деятельности в конструктивном аспекте и создании условий для дальнейшего развития направлений математики. Математика – это идеальная структура науки, поскольку, в отличие от гуманитарных наук, субъективность не присутствует в ней в процессе дедуктивного развертывания мысли. Но философы, в связи с всевозрастающей сложностью математической аргументации, стремились отгородиться от когнитивной рефлексии математического анализа, поэтому в XX веке разрыв понимания между математиками и философами, по сути, только увеличился. Основным мотивом при создании подходящего языка для каждого фрагмента математики является стремление получить результаты наиболее простым и ясным методом. Формальный язык математического анализа не должен допускать неопределенности и чрезмерно избыточной информации. Формальные языки, как и естественные разговорные языки, обладают ограниченными возможностями, поэтому в полной мере сила неформализованных и формализованных языков проявляется в их совместном использовании. В этом синтезе проявляется сила языка как посредника между духом и природой.

Стремление к синтезу и новой методологической целостности, заменяющей недостижимую полноту, не случайно, так как естественный синтез программ обоснования математического знания является результатом исторических процессов генезиса математических теорий, которые как бы сами по себе происходят в результате конструирования абстрактных понятий и взаимодействующих систем философии и математики. В частности, использование термина «синтез» во взаимодействии философии и математики, по мнению философа математики В.В. Мороз, обусловлено тем, что «мы интерпретируем «философско-математический синтез» как особый тип философско-математического взаимодействия, в котором философия и математика, соединяясь тем или иным образом в процессе рассуждения, участвуют в построении целостной картины действительности»[2]. В таком контексте синтез – это аналитическое движение вглубь, соответствующее не только пониманию частей, из которых состоит конкретное научное знание, но и пониманию изучаемой науки как целого. Экспликация синтеза в истории математики важна не только тем, что воздает должное каждому

---

[2] Мороз В.В. Философско-математический синтез как специфический тип взаимодействия философии и математики // Философский текст в современной текстовой культуре: XIV Таврические философские чтения «Анахарсис». 2018. С. 55.

разделу по научным заслугам, но и учит радикальному искусству творчества.

Философско-математическому мировоззрению, которое представляет собой теоретический синтез философских и математических воззрений на познание, присуща абстрактно-понятийная форма постижения действительности. С точки зрения философии познания одно из наиболее поразительных свойств математики состоит в том, что истинность математических утверждений может быть установлена с помощью абстрактных рассуждений, а по сравнению с естествознанием в математике процесс абстрагирования идет значительно дальше. Образно говоря, там, где естествоиспытатель останавливается, математик только начинает исследование, хотя «онтологические структуры мышления» сами по себе не задают системы исходных понятий математики. История математики служит доказательством того, что математизация многих областей науки, не подвергающих сомнению реальность окружающего мира, не проходила методологически гладко.

Суть математизации знаний состоит в том, чтобы из точно сформулированных исходных предпосылок выводить следствия, а также с помощью математического аппарата не только описывать установленные факты, но и предсказывать новые закономерности и возможность прогнозировать течение исследуемых явлений. Однако возможности математизации ограничиваются только сложностью исследуемых явлений. Математизация исследуемого явления предполагает формализацию в широком смысле слова, а соответствующий язык математики – это формализованный язык, со всеми присущими ему достоинствами и недостатками. Формальность теории состоит в том, что, максимально отвлекаясь от содержания, с помощью логики она пытается оценить правильность рассуждения, хотя реализовать это полностью никогда не удается. Формализация дает возможность воспринимать процессы действительности как хорошо организованную систему элементов, связанных между собой. Фундаментальное разнообразие «семантического мира» объясняет неизбежность формализации в математике, хотя в самой математике невозможно исключительно формальное обоснование.

Почему в аргументации выделяется обоснование математического анализа? «В 30-х годах прошлого века П. Бернайс сформулировал некоторый критерий успешной, или состоявшейся, программы обоснования математики, который сводится к тому, что любая такая программа должна быть способной обосновать математический анализ. Смысл критерия ясен. Математический анализ – центральная дисциплина современной математики, являющаяся идейным истоком большинства существующих математических теорий и основой большей части приложений математики»[3]. Усложненные объекты математического знания теряют изначальную интуитивную ясность, хотя введенные Ньютоном в математический анализ понятия флюксии и флюенты были недостаточно строго определены. Тем не менее традиционное

---

[3] Перминов В.Я. Проблема обоснования математики у А.Н. Колмогорова // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. С. 20.

понимание обоснования математического анализа, интерпретируемого как совокупность абстрактных структур, сводилось к задаче обоснования надежности его доказательных утверждений и установлению непротиворечивости его теорий. Но что можно считать достаточным обоснованием математических теорий? Этот вопрос до сих пор остается в центре философско-математических дискуссий. Например, согласно философскому определению, обоснование – это способ рациональной аргументации в пользу истинности или практической значимости какого-либо высказывания или теории.

Если бы можно было найти объективные утверждения, т.е. очевидно истинные, не подлежащие сомнению, то они могли бы претендовать на основание математического знания, с учетом того, что надежность теорий математического анализа исторически означала соответствие необходимому уровню теоретической строгости. В теоретической и прикладной математической деятельности приходится анализировать различные абстрактные функциональные зависимости, поскольку они становятся проблемно-ориентированными из-за того, что они не связаны с интуитивной ясностью и требуют когнитивно-логического оправдания. Примером сказанного является дифференциальное исчисление, позволившее решать практические задачи исследования, не поддававшиеся решению разработанными ранее традиционными методологическими средствами и, несмотря на практическую ценность этого исчисления в задачах механики, внутренние противоречия математического анализа устранялись до середины позапрошлого века.

Проблема в том, что сейчас ни одно из направлений обоснования математического знания не претендует на право представлять все направления развития математики. Философские исследования по обоснованию математики состоят в разделении формальных, интуитивистских и платонистских элементов в структуре современной математики, а также в конкретном выявлении областей действия и возможном ограничении этих элементов. Для того чтобы философские взгляды на сущность развития математики обосновывали философско-математический синтез, приходится преодолевать недостоверные установки и даже предубеждения, сложившиеся не только в истории философии математического образования, но и прежде всего в нетривиальной истории математического анализа. Заметим, что ни одна из известных на сегодня программ обоснования современной математики не удовлетворяет критерию успешности Бернайса. Трудность построения концепции обоснования математического анализа связана с тем, что никакой опыт и изощренное экспериментирование не соответствуют с абсолютной точностью природе математических идеализаций[4]. История построения математического анализа дает возможность понять закономерности развития системы объектов ее исследования. Она необходима также для стимулирования интереса не

[4] Михайлова Н.В. Проблемно-ориентированное обоснование современного математического анализа // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4. С. 53–59.

только к самой математике, но и к ее философским вопросам.

Другого рода трудности поджидают на пути построения семантики формальных естественных языков аргументации математического анализа. Наивное убеждение о том, что каждой фразе русского языка можно непротиворечивым образом придать значение истинности, опровергается известным философам «парадоксом лжеца». Недостаточная разработанность естественного языка особенно остро чувствуется в математическом анализе, где доказательства не проверяются в опыте, а обосновываются логически. В идеале формальный язык математики не должен создавать дополнительных трудностей обоснования при восприятии сообщаемой через него информации, он должен доносить идеи и факты в однозначном, не допускающем разночтения виде. На практике дело обстоит гораздо сложнее, поскольку у каждого языка при его интерпретации есть сильные и слабые стороны. Чтобы проследить математическую мысль во всей ее глубине, иногда недостаточен только математический язык формул, необходим также философский контекст, изложенный обычным языком. Мысли, свободные от контекста, часто не имеют глубокого смысла. Поэтому столь высоки требования к языку математики как средству выражения математических суждений.

Хорошо известно, что после того, как немецкий математик Карл Вейерштрасс переформулировал важнейшие определения математического анализа на языке ε-δ, появились математические объекты, неподвластные интуитивному восприятию. Например, функции, непрерывные на всем интервале, но тем не менее нигде не дифференцируемые, или непрерывные функции, не являющиеся монотонными ни на каком интервале их области определения, которые изначально представлялись как парадоксальные, потому что они абсолютно оторваны от геометрической интуиции. «Даже когда студенты начинают осваивать тонкости дифференциального и интегрального исчисления, составляющих основу математического анализа, их не учат математическому анализу на основе тех эвристических способов, с помощью которых его открывали Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц, использовавшие интуитивные понятия «флюксии» и «бесконечно малые величины», которые в обосновательных целях были заменены на понятие предел»[5]. Востребованность в философско-методологическом истолковании математического анализа проявляется на направлениях развития математического знания, характеризующих эвристический процесс, в котором ощущается недостаточность разработанной методологической базы исследования.

Заметим, что для многих областей математического знания, таких как вещественный, комплексный и нестандартный анализ, их обоснование непосредственно связано с «проблемой бесконечного» вариативно разрабатываемого в математическом анализе. Поэтому при раскрытии концептуальных различий основных программ обоснования в философии

[5] Еровенко В.А. Методологическая направленность эвристических стратегий в когнитивном осмыслении математического анализа // Российский гуманитарный журнал. 2021. Т. 10. № 1. С. 25.

математики приходится переносить акценты на философско-методологический синтез. Концептуальное развитие обоснования формально-абстрактных теорий математического анализа связано с пониманием доминирующего статуса математических моделей реальности, что снимает неоправданные ограничения на реализацию синтеза в обосновании математики, обусловленного многообразием направлений, которые можно использовать в обосновании, выдвигая новую философскую проблему синтеза. Взгляд на проблему обоснования в духе философско-методологического синтеза способствует приращению математического знания, открывая новые способы коммуникации в математике. Опираясь на принцип системности, можно объединить различные методологические подходы в обосновании математического анализа, что способствует осмыслению и установлению путей указанного синтеза.

Поскольку математический анализ можно рассматривать как специфическую систему понятий, объектов математики и идей, подчиненных математическому знанию в целом, то проблему обоснования современного математического анализа нужно обсуждать с философско-методологической точки зрения в плане общих принципов математического познания. В частности, философско-методологический синтез отличается от простого соединения принципов тем, что он представляет собой слияние исходных принципов в концептуальную идею, имеющую новый смысл, сущность которой состоит в том, что она задает совокупность необходимых методов исследования как составляющую часть своего методологического арсенала. Но для этого надо выявлять, упорядочивать и даже прогнозировать эффективность их результирующих пересечений, с целью создания теоретико-мировоззренческой программы обоснования современных разделов математического анализа. Такую программу можно реализовать, если доработать концепции обоснования математики, рассматривая их в качестве предварительного знания, которое исследовалось в философии математики двадцатого столетия. Для конкретных реализаций философско-методологического синтеза направлений обоснования математического анализа, возможно, понадобится более емкая триадическая структура, хотя богатейший тринитарный опыт человечества все еще находится на периферии современных парадигм. Например, английский математик и философ Роджер Пенроуз выделял среди основных направлений обоснования формализм, платонизм и интуиционизм.

В качестве теоретического конструкта для решения проблемы обоснования математического анализа можно использовать эвристический потенциал философско-методологического синтеза обосновательных подходов, учитывая, что такой синтез является в определенной степени «недедуктивным», так как основан на идее интеграции, которая характеризует тенденцию к соединению в рамках целостной системы соответствующих математических теорий. Заметим, что такой эпистемологический поворот заметен не только по отношению к программе обоснования математического знания, но и в философии математики в целом.

«В науке XX в. математика обнаружила некоторые принципиально новые функции. Она все более стала выступать как эвристическое средство, как система представлений, которая может идти впереди знания и в определенной мере формировать его структуру»[6]. После философских работ Имре Лакатоса понятие рационального в математическом исследовании перестало быть обусловленным только лишь дедуктивной формой как методологической установкой, а стало включать в стиль математического рассуждения требование внедрения эвристических элементов. При этом акцентируется внимание на сложности эвристического подхода к исследуемым процедурам математического анализа, поскольку признание эвристических элементов в его рассуждениях, возможно, потребует переписывания части учебников по математическому анализу.

К эвристическим подходам в математическом знании относятся такие методы аргументации, которые основываются на недедуктивных способах рассуждений, используя для этого определенного вида правдоподобные рассуждения для поиска истины. Например, к категории правдоподобных выводов можно отнести индукцию, как процесс познания с помощью анализа и сопоставления частных случаев, начиная от самых простых и переходя ситуациям посложнее для обнаружения решения проблемной задачи в общей постановке, и аналогию, основанную на сходстве характеристических признаков нескольких математических понятий, которой пронизано креативное математическое мышление. При этом следует осознавать, что эвристические методы математического анализа даже при их пропедевтической значимости не являются ни точными, ни оптимальными стратегиями, так как они интуитивны и поэтому строго не обоснованы, хотя общие и специальные эвристические приемы могут облегчить успешный поиск решения проблемных задач. Важнейшая философско-методологическая функция математической эвристики направлена на решение проблемно-ориентированных задач как когнитивного средства развития мыслительных операций анализа и синтеза и различных ответов на корректно поставленные вопросы.

Курс математического анализа, сложный сам по себе в связи с нетривиальным доказательством некоторых теорем, но тем не менее является основным курсом не только для студентов механико-математических факультетов, но и для студентов технических направлений образования, поскольку понимание разделов математического анализа необходимо им для успешного обучения. Например, понятие предела числовой последовательности или предела функциональной последовательности как эвристический прием лежит в основе курса математического анализа, так как нахождение первой производной, определенного интеграла и суммы бесконечного ряда базируются на правильном понимании операции предельного перехода. Эвристическая значимость предела как математического объекта и предельного перехода обусловлена в основном

---

[6] Арепьев Е.И., Побережный И.А. Обоснование математики в рационалистической традиции западной философии // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Философия. 2020. № 3. С. 106.

тем, что его представляют как важнейший инструмент строгого обоснования математического анализа. Но в связи с такими новыми математическими объектами, как обобщенные функции Коломбо, используемые в эволюционирующей системе объектов в функциональном анализе, методологически расширяющие понятие дифференцируемых функций, трудно утверждать их полную обоснованность без использования философско-методологического синтеза направлений обоснования.

Немногие работающие математики строго исповедуют «чистый формализм» или «чистый интуиционизм», но философско-методологический синтез направлений обоснования сводит различные математические теории в системы, сохраняя при этом математические основания исходных объектов и понятий и обеспечивая тем самым единство многообразия математического знания. Напомним, что И. Кант тоже сводил к синтезу процесс получения нового знания: «Синтез многообразного (будь оно дано эмпирически или a priori) порождает прежде всего знание, которое первоначально может быть еще грубым и неясным и поэтому нуждается в анализе; тем не менее, именно синтез есть то, что, собственно, составляет из элементов знание и объединяет их в определенное содержание. Поэтому синтез есть первое, на что мы должны обратить внимание, если хотим судить о происхождении наших знаний»[7]. Разнообразие «мира математики» объясняет неизбежность формализации в новых теориях математического анализа, однако в самой математике в контексте философско-методологического синтеза направлений обоснования невозможно исключительно формальное обоснование, не учитывающее содержательную и прикладную часть математического анализа.

Список литературы

1. Левин Г.Д. Анализ и синтез // Вопросы философии. 2016. № 2. С. 95–104.
2. Мороз В.В. Философско-математический синтез как специфический тип взаимодействия философии и математики // Философский текст в современной текстовой культуре: XIV Таврические философские чтения «Анахарсис». 2018. С. 52–57.
3. Перминов В.Я. Проблема обоснования математики у А.Н. Колмогорова // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль: Издательство ЯГПУ. 2004. С. 9–25.
4. Михайлова Н.В. Проблемно-ориентированное обоснование современного математического анализа // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4. С. 53–59.
5. Еровенко В.А. Методологическая направленность эвристических стратегий в когнитивном осмыслении математического анализа // Российский гуманитарный журнал. 2021. Т. 10. № 1. С. 18–31.

[7] Кант И. Логика // Кант И. Трактаты и письма. М. Наука. 1980. С. 173.

6. Арепьев Е.И., Побережный И.А. Обоснование математики в рационалистической традиции западной философии // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Философия. 2020. № 3. С. 100–107.
7. Кант И. Логика // Кант И. Трактаты и письма. М.: Наука, 1980. 714 с.