КОНТРОЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ НАЗНАЧЕНИЯ СЛОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРУЕМЫХ КОМПЛЕКТОВ УЧЕБНЫХ ЗАДАНИЙ

М.П. Ревотюк, Т.В. Тиханович, О.В. Кот

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь, rmp@bsuir.by

Abstract. An efficient algorithm for evaluating the interval of stability of solutions of traveling salesman problems, based on a review of the results of optimization iterations, is considered. Economical one-step transition to the nearest vertex of the polytope of problem one is almost an order of magnitude reduces the computational complexity of evaluating the stability of the current optimal solution.

Обновление комплектов учебных заданий при необходимости поддержки заданного уровня сложности порождает задачу выбора состава заменяемых задач в отдельном комплекте. Такая задача формально соответствует известной задаче коммивояжера с оценкой устойчивости ее решения к изменениям элементов матрицы исходных данных. Матрица здесь отражает разделы программы обучения и задания с экспертными оценками сложности решения и взаимосвязи разделов в заданиях. Последнее позволяет не ограничивать учебное задание тематикой отдельного раздела, что важно при изучении дисциплин системно-технического направления.

В классической постановке формальная модель задачи коммивояжера имеет вид

$$Y_{\min} = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1;\ x_{ij} \ge 0,\ i, j = \overline{1,n}; \\ u_i - v_j + nx_{ij} \le n-1,\ i = \overline{2,n},\ \ j = \overline{2,n},\ \ i \ne j \end{array} \right. \right\} \tag{1}$$

Решение (1) обычно представлено вектором $R = \{ r(j) = i \mid c_{ij} = u_i + v_j,\ i, j = \overline{1,n} \}$. Для оценки устойчивости задачи коммивояжера необходимо найти интервалы $(s_{ij},\ f_{ij})$, в которых изменение значений элементов $c_{ij} \in (s_{ij},\ f_{ij}),\ i, j = \overline{1,n},$ не нарушает структуру оптимального решения. В общем случае задача оценки устойчивости задачи коммивояжера имеет экспоненциальную вычислительную сложность. Однако для случаев, когда изменяются лишь элементы матрицы с индексами $(i, j) = (r_j, j),\ j = \overline{1,n}$, ее сложность оказывается полиномиальной.

Предлагаемая схема оценки интервалов устойчивости базируется на инвариантности вектора R от метода его формирования. Известно, что одним из точных методов решения (1) является метод ветвей и границ [1]. Наиболее успешный способ порождения дерева вариантов базируется на решении линейных задач о назначении (ЛЗН), анализе получающихся циклов и, если таких циклов более одного, последующем переборе вариантов разрыва циклов. Рекурсия обхода дерева ЛЗН строится на матрице расстояний, где разрывы циклов задаются назначением бесконечных значений длин запрещаемых дуг. В каждом узле дерева вариантов, включая и искомый оптимальный вариант, решается ЛЗН фиксированной размерности

$$Z_{\min} = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c^{*}_{ij}x_{ij} \left| \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1;\ x_{ij} \ge 0,\ i, j = \overline{1,n} \right. \right\} \tag{2}$$

Библиотека БГУИР

где $(c_{ij}^*,\ i, j = \overline{1,n})$ – матрица текущей ЛЗН, в которой некоторые элементы исходной матрицы задачи (1) заменены бесконечными значениями. Очевидно, что элементы оптимального решения не меняются: $(c_{ij}^* = c_{ij},\ i = r_j,\ j = \overline{1,n})$.

Отсюда следует, что задача анализа устойчивости задачи (1) может быть сведена к полиномиально сложной задаче оценки устойчивости решения задачи (2): для каждого элемента матрицы $(c_{ij}^*,\ i, j = \overline{1,n})$ на этапе формирования окончательного решения задачи (1) необходимо найти интервал $(s_{ij},\ f_{ij}),\ i, j = \overline{1,n},$ в котором изменение значения таких элементов не нарушает оптимального назначения.

Используя элементы решения в виде (2), легко выделить ребра графа совершенного паросочетания: $E_m = \left\{(r_j, j) \middle| (r_j < m),\ j = \overline{1,n}\right\}$. Интервал значений веса любого ребра такого графа, когда назначение остается неизменным, может быть описан как $(s_{ij}, f_{ij})_m = (-\infty, c_{ij} + \Delta_{ij}^m], (i, j) \in E_m$. Последнее означает, что для минимизации (1) существующий вес назначенных ребер можно увеличить без нарушения структуры текущего решения на величину $\Delta_{ij}^m, (i, j) \in E_m$. Превышение такой величины приведет к скрытию соответствующего ребра.

Пусть оценка оптимального назначения есть Z^0. Очевидно, что если $c_{xy} = \infty$, то ребро $x \to y$ будет скрыто. Реоптимизация решения может быть проведена относительно строки x, а изменение ее потенциала составит $u_x^m - u_x^0 = Z_{xy}^m - Z^0$ [1]. Здесь Z_{xy}^m – оценка нового решения без ребра $x \to y$. Скрытие ребра $x \to y$ не влияет на значения потенциалов других строк. Процесс реоптимизации, начинающийся в вершине x, завершится в вершине y, потенциал которой тоже не изменится [1]. Меняется только потенциал u_x, поэтому $\Delta_{xy}^m = Z_{xy}^m - Z^0$.

Элементы $E_u = \left\{(i, j),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right\} \setminus E_m$ представляют множество скрытых ребер графа решения задачи (2). Интервал значений веса любого скрытого ребра, для которого назначение остается неизменным – $(s_{ij}, f_{ij})_u = [c_{ij} - \Delta_{ij}^u, +\infty), (i, j) \in E_u$. Ребро открывается лишь после назначения веса из интервала $(-\infty,\ c_{ij} - \Delta_{ij}^u)$. Таким образом, выполнив реоптимизацию решения ЛЗН после фиксации $c_{xy} = -\infty$, получим значение Z_{xy}^u оценки решения с ребром $x \to y$. В результате получаем $\Delta_{xy}^u = Z_{xy}^u - Z^0$.

Таким образом, определение интервалов устойчивости задачи коммивояжера может проводиться посредством реоптимизации ЛЗН текущего оптимального решения, если инвертировать принадлежность дуг графа задачи соответствующему совершенному паросочетанию и учесть эту принадлежность направлением нумерации состояний. Вычислительная сложность оценок устойчивости на основе разности потенциалов изменяемых строк ЛЗН – $O(n^4)$. Дополнительная память для хранения наследуемых значений потенциалов строк не превышает объема $O(n^2)$.

Литература

1. Ревотюк, М. П. Быстрая оценка интервалов устойчивости решения линейных задач о назначении /М. П. Ревотюк, М. К. Кароли, П. М. Батура //Доклады БГУИР. – 2013. – № 5(75). – С. 30-36.

Библиотека БГУИР