И. А. Лебедев, М. Б. Шабаева

Профессионально-ориентированное преподавание математики на примере задачи оценки площади плоской области

Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II,
г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *Обсуждаются вопросы практико-ориентированной подготовки по математике студентов младших курсов технических вузов. Рассматривается задача оценки площади плоской области произвольной формы по наименьшему числу точечных измерений.*

Ключевые слова: задачи практического содержания; ирактико-ориентированное обучение; оценка площади

Переход к стандартам ФГОС3+++ ставит задачу формирования у выпускников инженерных направлений вузов профессиональных и самообразовательных компетенций. Важной проблемой математической подготовки является поддержание баланса между ее фундаментальностью и ориентацией на практику [1–2]. Сокращение количества аудиторных часов не позволяет в полной мере рассмотреть задачи практического содержания на занятиях. Частичным решением проблемы может быть комплексно-системный подход к проектированию математической подготовки, сопряжение учебной программы с практико-ориентированным наполнением дополнительных образовательных программ для студентов.

Рассмотрим задачу определения из чисто геометрических соображений приближенного значения (оценки) площади плоской области произвольной формы (например, ортогональной проекции месторождения на земную поверхность) по минимальному количеству точечных измерений. Задача имеет практическое значение, поскольку при подсчете запасов полезных ископаемых исходными параметрами являются объем или площадь месторождения (его части) [3].

Оценки получим для простых областей, ограниченных одним контуром. Рассмотрение сложных областей, содержащих "дыры" и "языки", геометрическим построением сводится к случаю простой области.

Главной характеристикой области является её диаметр – отрезок наибольшей длины, соединяющий две точки области. Пусть длина диаметра равна d. Ясно, что концы диаметра будут лежать на границе области, и поэтому вся область расположена в пересечении двух замкнутых кругов радиуса d с центрами в концах диаметра (точки O и M, где $OM = d$).

Введем декартову систему координат Oxy, направив ось Ox по диаметру OM, тогда координаты точек: $O(0;\ 0)$ и $M(d;\ 0)$.

Кроме точек O и M введем в рассмотрение две граничные точки области, наиболее удаленные от диаметра: $M_1\ (x_1, y_1)$ и $N_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$, где $\tilde{y}_1 < 0$.

Так как точки M_1 и N_1 наиболее удалены от диаметра OM (по одну и другую стороны диаметра), то они задают размах области по оси Oy, и поэтому область лежит в прямоугольнике площади

$$S_0 = d \cdot (y_1 + |\tilde{y}_1|). \tag{1}$$

Эта оценка сверху достаточно груба. Найдем площадь четырехугольника OM1MN1:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (y_1 + |\tilde{y}_1|). \tag{2}$$

Эта оценка лучше, чем оценка S_0, но вряд ли область будет четырехугольником. Поэтому «сгладим» четырехугольник с помощью четвертинок эллипсов с полуосями x_1 и y_1, $(d - x_1)$ и y_1, $\tilde{x}_1$ и $|\tilde{y}_1|$, $(d - \tilde{x}_1)$ и $|\tilde{y}_1|$. Фигура из этих четвертинок эллипсов вписана в прямоугольник $ABCD$ (по свойствам эллипсов) и заключает в себе четырехугольник OM_1MN_1. Площадь этой фигуры равна

$$S_2 = \frac{\pi}{4} \cdot x_1 \cdot y_1 + \frac{\pi}{4} \cdot (d - x_1) \cdot y_1 + \frac{\pi}{4} \cdot \tilde{x}_1 \cdot |\tilde{y}_1| + \frac{\pi}{4} \cdot (d - \tilde{x}_1) \cdot |\tilde{y}_1| = \frac{\pi}{4} \cdot d \cdot (y_1 + |\tilde{y}_1|). \tag{3}$$

Если область по дополнительной информации, например, визуальной, оказывается меньше четырехугольника OM_1MN_1, то «сгладим» четырехугольник в обратную сторону теми же четвертинками эллипсов и получим еще одну оценку площади области проекции, равную площади получившейся звездообразной фигуры:

$$S_3 = S_0 - S_2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot d \cdot (y_1 + |\tilde{y}_1|). \tag{4}$$

Эти оценки составляют последовательность

$$S_3 < S_1 < S_2 < S_0$$

и соответствуют последовательности их коэффициентов в (1-4):

$$1 - \frac{\pi}{4} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4} < 1,$$

что определяет эту последовательность в процентах:

$$21{,}5\% < 50\% < 78{,}5\% < 100\%.$$

Таким образом, оценки отличаются друг от друга примерно на 25%. Оценки получаются просто на основании четырех измерений: определения координат точек O, M, M_1, N_1.

Используя формулу площади выпуклого четырехугольника через векторное произведение векторов его диагоналей, оценку S_1 можно записать следующим образом:

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|\overline{OM} \times \overline{N_1 M_1}\right|.$$

Площадь фигуры из четвертинок эллипсов (оценка S_2) равна площади $S_Э$ эллипса, вписанного в прямоугольник *ABCD*:

$$S_Э = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(y_1 + |\tilde{y}_1|\right) = \frac{\pi}{4} d \cdot \left(y_1 + |\tilde{y}_1|\right) = S_2.$$

Учли, что полуоси этого вписанного эллипса есть половины сторон *ABCD*:

$$\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\left(y_1 + |\tilde{y}_1|\right) \text{ и } \frac{AD}{2} = \frac{d}{2}.$$

Аналитические выражения для оценки площади плоской области произвольной формы, использующие минимальное количество измерений, могут быть востребованы в экспресс-расчетах, для проверки подсчетов, выполненных другими способами, в автоматизированных комплексах оценки и подсчета запасов.

Список литературы:

1. Краснощеков В.В. О современной проблематике преподавания математических дисциплин в инженерном вузе //Вопросы методики преподавания в вузе. 2022. Т. 11. № 2. С. 27–40. DOI: 10.57769/2227-8591.11.2.02

2. Толкачев Е.А., Поздняков С.Н., Пирог В.П., Мустафин Н.Г., Степуленок Д.О. Запрос промышленности на математическое образование, как основа формирования содержания профессионального обучения // Современное образование: содержание, технологии, качество. 2022. Т. 1. С. 288–292.

3. Кушнарев П.И. Современные способы подсчета запасов и геолого-экономической оценки месторождений твердых полезных ископаемых // Разведка и охрана недр, № 2, 2018, С. 23–28.

I. A. Lebedev, M. B. Shabaeva

Professionally oriented teaching of mathematics on the example of the problem of estimating the area of a flat region

Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, Russia

Abstract. Issues of practice-oriented training in mathematics for junior year students at technical universities are discussed. The problem of estimating the area of a flat region of arbitrary shape from the smallest number of point measurements is considered.

Keywords: practical tasks; practice-oriented training; area estimation