Математические структуры и моделирование
2024. № 2 (70). С. 13–20

УДК 510.2+101.1
DOI 10.24147/2222-8772.2024.2.13-20

ФИЛОСОФСКИ-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГЕНЕЗИСА ОБОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Н.В. Михайлова
канд. филос. наук, доцент, e-mail: n.mikhajlova@bsuir.by

Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация. В статье доказывается тезис о необходимости нового системно-методологического подхода к проблеме обоснования современной математики на основе раскрытия продуктивности основных направлений обоснования и экспликации недостаточности методологических предпосылок программ формализма и интуиционизма в приращении математического знания. Опираясь на синтез различных аспектов математической реальности для целостного обоснования познавательных теорий математики, автор обращается за помощью к реальному системному развитию направлений математики в контексте единства современной математики.

Ключевые слова: философско-методологический анализ, современная математика, обоснование.

Введение

Для полноценного анализа проблемы обоснования математики необходимо прояснить различие математической и философской методологий. Если первая стремится определить «дорогу» к математическому знанию, будучи убеждённой в его объективной истинности, то вторая пытается выяснить, что считать истиной, как получить истинное знание, то есть как система принципов выявляет философские критерии достоверного знания, которые использует наука в процессе познания. С точки зрения проблемы обоснования математики нельзя абсолютизировать ни один из этих подходов. Можно выделить следующие два понимания методологии: во-первых, как учения о методах познания, которые являются объектом методологических исследований, что приводит к представлению об их относительно самостоятельном характере; во-вторых, как инструмента преобразования философского мировоззрения в познавательную деятельность, благодаря чему методологию можно интерпретировать как философскую рефлексию, или «мышление мышления». Более широкое определение методологии, в том числе методологии математики, состоит в том, что методология понимается как философское учение о методах познания, как применение принципов мировоззрения к процессу познания и к математической практике. При таком понимании методологическая проблема обоснования математики получает общефилософское истолкование. Поскольку математику можно рассматривать как специфическую систему понятий и идей в контексте целостного научного знания, то проблему обоснования следует обсуждать прежде всего с философской точки зрения в плане общих принципов математического познания.

В современной науке проблемы обоснования математики трактуют в широком теоретико-познавательном аспекте, подходя с необходимой степенью строгости к философским выводам по вопросам сущности самого понятия системы обоснования. Сущность понимания системной составляющей в интерпретации системно-методологического подхода к обоснованию математики и созданию её целостного образа состоит в определении взаимосвязей направлений развития, оказывающих методологическое влияние на формирование её интегральных свойств. Отличием математических систем от математических структур является то, что система никогда не может быть описана полностью. В частности, всякая попытка описать систему на некотором логико-математическом языке всегда охватывает лишь некоторые аспекты системы. Поэтому вопросами системного обоснования современных математических теорий занимается философия математики, которая как часть философии в определённом смысле самостоятельна по отношению к математике, перенося акценты в проблеме обоснования современной математики на исследование вопросов математического познания. Хотя для философии современной математики характерна неоднозначность ответов, что в целом типично для философии, её выводы не должны рассматриваться как противоречивые или вторичные по отношению к самой математике.

Проблема обоснования математики

В философской литературе содержание категории «обоснование» традиционно сопрягается с содержанием категории «основание». Продолжавшиеся в течение первых десятилетий XX века жаркие дискуссии по поводу оснований математики не привели к решению ни одной из обсуждавшихся философских проблем. В действительности «основание» составляет лишь часть математической сущности, а другую часть составляет совокупность необходимых свойств и отношений, хотя основания математики – это реальный пример взаимодействия математики и философии. Но следует отметить, что исследование методологических аспектов оснований математики столкнулось с принципиальными философскими трудностями. В такой ситуации обоснованием математики можно считать любую деятельность, направленную на объяснение оснований таких свойств математического познания, как достоверность, строгость и незаменимость. В разделе «Вопросы обоснования математики» известной энциклопедической статьи «Математика» выдающийся математик А.Н. Колмогоров определяет обоснование так: «Чрезвычайное расширение предмета математики привлекло в 19 в. усиленное внимание к вопросам её «обоснования», т. е. критического пересмотра её исходных положений (аксиом), построения строгой системы определений и доказательств, а также критического рассмотрения логических приёмов, употребляемых при этих доказательствах» [1, с. 29]. Важность такой работы становится понятной, если учесть изменившийся характер взаимоотношений между формированием математической теории и её практической проверкой.

Для экспликации системно-методологического подхода к анализу обоснования современной математики необходимо предварительно выявить общую схему, по которой в настоящее время строятся по-философски обобщённые системные концепции. Учитывая разнообразие подходов к исследованию систем и структур, на первых этапах анализа такое исследование, как правило, сопряжено с некоторым приближением к реальной ситуации. Это обусловлено тем, что системный подход – это не созидание, не воссоздание, не конструирование, а реконструкция системы. Соответственно, получаются два метода реконструкции системы: с одной стороны, анализ, то есть разложение целого на части, а с другой стороны, концептуальный синтез, то есть придание системе упорядоченности, единства и целостности. Системный подход в обосновании математики можно рассматривать как философскую реакцию на длительный процесс дифференциации в обосновании математических теорий, рассматривающий действующие направления обоснования в контексте методологического единства математического знания. Методологический подход акцентирует внимание на развитии практической деятельности в конструктивном аспекте и условиях дальнейшего развития математики. Например, теоретико-множественная аксиоматика позволяет с единой точки зрения рассмотреть математические теории, предметное содержание которых раскрывается на основании соответствующей системы аксиом.

В философии математики одним из аргументов объяснения успешной практики математических приложений является аргумент о «незаменимости математики» в науке. Тезис о незаменимости математики можно интерпретировать как «принцип необходимости» признания существования математических объектов, исходя из полезности современной математики в её применимости к реальным эмпирическим явлениям. Философ и логик В.А. Светлов, считающий, что математика занимает особое место среди остальных наук, и подчёркивающий, что её утверждения не просто истинны, а необходимо истинны, задаётся вопросами: «В чём источник необходимости математических утверждений? Что может служить достаточным основанием их принятия? – Ответы на эти принципиальные вопросы образуют содержание проблемы обоснования математики» [2, с. 12]. Философами математики были предложены различные ответы, в которых источник необходимости математических истин интерпретируется через особенности математического знания, по-разному понимаемых в программах обоснования математики. В таком контексте можно выделить умеренно платонистский взгляд на природу и особенности математических объектов и эмпирическую доктрину необходимости и эффективности в приложениях математического знания, хотя они не объясняют, а постулируют необходимость существования этих объектов, поскольку математические теории, зависящие от некоторых допущений, утверждают не абсолютное существование определённых абстрактных идеальных объектов, а, по существу, только лишь их условную необходимость.

Проблема «правильных рассуждений» в контексте их эффективности остаётся актуальной в современной математике высокого уровня. Эффективность многих разделов математики состоит в том, что математические теории имеют более широкое смысловое содержание, чем это изначально закладывается в их аксиоматику. Может быть, вопрос о непостижимой эффективности математики имеет смысл только в контексте взаимодействия математики и физики? От ответа на этот философский вопрос зависит понимание роли современной математики. Так что же можно сказать о причине непостижимой эффективности математики в естественных науках? Одно из объяснений связано с общностью методологических принципов, определяющих возможность эффективного взаимодействия. В самой природе математики заложена возможность абстрактного отвлечения от природы тех объектов, для описания которых в математику вводится некоторое исходное смысловое содержание, поскольку после решения математической проблемы философскому исследованию подвергается оказавшаяся плодотворной математическая структура. Эта универсальная значимость методологии современной математики, с одной стороны, проявляется как эффективность её инструментального использования, а с другой стороны, например, благодаря теории струн, говорит о непостижимой эффективности современной физики в математике.

При всём разнообразии математических теорий их развитие связано с тремя факторами – её приложениями, решением научных проблем и систематической разработкой новых теорий. Двум первым компонентам развития современной математики, а именно вопросам, связанным с физикой, и проблемам, возникающим в самой математике, были посвящены доклады выдающихся математиков А. Пуанкаре и Д. Гильберта на I и II Международных математических конгрессах. Говоря о физических приложениях, следует заметить, что значение других приложений для развития самой математики в то время было значительно меньше. Широко распространено мнение, что математика – это область научного знания, предметом которой является исследование количественных отношений, пространственных форм и структур в чистом виде. Заметим, что упорядочение математических теорий на основе понятия структуры, которое было предпринято во второй половине XX века знаменитой группой Бурбаки, не решило философской проблемы взаимоотношения мира физической реальности и математического знания. По существу, в концепции Бурбаки факт соответствия математических структур явлениям окружающего мира только констатируется. Реальное развитие математического знания показало, что современную математику нельзя свести только к математическим структурам, поэтому основная методологическая идея Бурбаки «объяснения» практической эффективности математики не подлежит дальнейшей философской конкретизации.

Поскольку в философии современной математики неизменно выделяются три действующих направления обоснования математики, то в качестве формы системной структуры обоснования можно, например, рассмотреть следующую системно-методологическую триаду обоснования современной математики: «формализм Гильберта – платонизм Гёделя – интуиционизм Брауэра». В ней используются направления внутриматематического обоснования в давно сложившейся диадной парадигме «формализм Гильберта – интуиционизм Брауэра», которые гносеологически противостоят друг другу. Говоря о системном подходе к обоснованию, сошлёмся на мнение В.Я. Перминова, чьи работы по философии математики пользуются особым влиянием: «Размышляя об универсальности математических образов, об их полисемантичности и полифункциональности, мы затрагиваем, таким образом, общую системную закономерность: во всех этих случаях элемент системы, созданной в конкретной ситуации и для определённой цели, оказывается затем более универсальным, пригодным для других целей, предвосхищающих другие требования» [3, с. 49]. С точки зрения математической практики ни направление формализма, ни направление интуиционизма не являются подлинно репрезентативными для обоснования математики. Наиболее перспективная реализация философского подхода при экспликации структуры обоснования целостного комплекса современного математического знания, возможно, состоит во вложении диадной структуры обоснования в более богатую триадную структуру и переводе проблемы обоснования современной математики с логического на системно-методологический уровень. Так как логическое обоснование, в силу известных гёделевских результатов, не достигает желаемых результатов для многих математических теорий, то вера математиков в их непротиворечивость основывается на практическом отсутствии реальных противоречий в разных современных математических теориях.

Современную математику в целом можно интерпретировать как сложную систему, то есть такую систему, которой невозможно дать полное описание, во-первых, отчасти из-за того, что для этого было бы необходимо привлечь слишком большое количество сведений, а во-вторых, получение некоторых из них затруднительно в силу процесса развития математического знания. А какова коннотация объёма определения термина «современная математика»? Из-за огромного содержательного разнообразия предмет и методы современной математики не могут быть охвачены каким-то простым определением, которое выражало бы её единую сущность, поскольку сама эта сущность системна и многообразна. Но можно ли говорить о последних двух столетиях развития математики как о едином периоде? Может быть, в связи с наступившей эрой компьютеризации, правильнее говорить о первом этапе нового развития математики? При всём богатстве направлений, изучаемых современной математикой, видимо, целесообразнее, как предлагал в своё время А.Н. Колмогоров, говорить о «современном этапе развития математики», в основе которого лежат принципиально новые методы исследования весьма общих математических отношений, хотя это не мешает в философии математики пользоваться уже вполне устоявшейся терминологией.

В контексте упорядоченности сложных системных объектов современная математика с точки зрения её обоснования характеризуется таким развитием, в ходе которого происходит реальная самоорганизация математических теорий, в результате чего они обретают достоверность и системную целостность. Применительно к структурно сложным самообосновывающимся системам, например к триаде направлений обоснования современной математики, философские категории части и целого обретают новые характеристики. Новая концепция обоснования математических теорий фиксирует, что в философской дихотомии «часть – целое» разными свойствами обладает часть внутри целого и вне его. Целостная концепция обоснования современной математики уже не исчерпывается только свойствами её частей, хотя и характеризуется их свойствами. Поэтому возникает методологическая необходимость учитывать системное качество целого. Методологический сдвиг в решении проблемы обоснования зависит не только от достижений в логике и генезиса аксиоматических систем, а также от понимания проблем философии математики и от расширения допустимых подходов к обоснованию математических теорий. В философии и методологии науки происходит смена идеала, а именно переход к целостности как более фундаментальному понятию, чем полнота. Целостность и системность могут служить философскими показателями достаточно высокого уровня развития мировоззренческого сознания.

Так, математик Ю.В. Матиясевич, решивший 10-ю проблему Гильберта о разрешимости диофантова уравнения, выступает как явный сторонник полностью формализованных доказательств, которые могут проверить компьютеры, поскольку «формальные доказательства нужны для нашей большей убеждённости в правильности» [4, с. 24]. Но не каждое «серьёзное» математическое доказательство может быть полностью логически формализовано. Многие формальные рассуждения дополняются интуитивно убедительными содержательными характеристиками, делая математическое знание достаточно надёжным, отличающим его от других видов деятельности. Каждое направление обоснования приобретает значение системной целостности, поскольку целое – это всегда отношение, которое не может быть законченным, а будучи реализованным, открывается для изменения в процессе взаимодействия сторон. В этом заключается суть системно-методологического подхода к обоснованию математики на основе имеющегося опыта, в котором потенциально реализуемый синтез является существенной стороной диалектики. При этом устойчивость системного синтеза направлений обоснования математики обеспечивается ещё и тем, что если есть реальное взаимодействие противоположностей, то они не достигают антагонизма, поскольку элементы системного синтеза не исключают друг друга, а характеризуют целостность в рамках новой концепции обоснования современной математики.

Философско-методологические соображения полезны для понимания развитой математической теории, поскольку дают реальную возможность убедиться в том, что даже глубокие противоречия в такой теории маловероятны. Целостное познание проблемы обоснования как единство включает в себя множество процессов, состояний и структур. Это, в свою очередь, создаёт дополнительные трудности обоснования математики, так как лишние возможности – это «враг хорошей концепции», поэтому надо стараться строго соблюдать принятую концептуальную целостность. Целостность программы обоснования математики позволяет объяснить и познать во всей специфике то, что нельзя вывести, исходя лишь из внешних признаков по отношению к исследуемой проблеме. Стремление к целостности неразрывно связано с системно-методологическим подходом к обоснованию, позволяющим объединить равноправные направления, а именно формализм, платонизм и интуиционизм, каждое из которых позволяет участвовать в совмещении противоположностей как специфическая философская мера компромисса. Следует также особо подчеркнуть «мягкость» системного синтеза направлений обоснования современной математики, которая в формализме Гильберта может проявиться в расширении этого направления за счёт пересмотра финитных принципов построения метатеории, в интуиционизме Брауэра может достигнута за счёт расширения истинности математических суждений, а в платонизме Гёделя выявиться в его менее жёсткой, даже умеренной философской интерпретации традиционного математического платонизма.

Заключение

На наш взгляд, как очень справедливо утверждает профессиональный математик и философ математики Вл.Д. Мазуров, «следует понимать обоснование математики как длительный процесс. Ни один подход к обоснованию математики не абсолютен, каждый справедлив только локально, при некоторых допущениях» [5, с. 64]. Но, в отличие от общей утопической идеи «абсолютной обоснованности», в самой математике тоже фиксируется определённый уровень обоснованности, который отвечает ещё и разным запросам её развития. Важное отличие самоорганизации от формирования абстрактных математических теорий состоит в том, что, несмотря на определённую аналогию с процедурой освобождения опытных теорий от ложных гипотез, очистка эмпирических подходов от некорректных допущений в принципе не может быть окончательно закончена. Однако философско-методологическая аргументация синтеза направлений обоснования математики как открытой системы всегда будет проблематичной, если не показано, каковы наиболее существенные признаки действующих направлений обоснования математики, ориентируясь на которые можно конструировать систему обоснования.

Важнейшей характеристикой философско-методологического синтеза, реализуемого с помощью общефилософского системного подхода к направлениям обоснования современных разделов математики, является то, что развитие этого синтеза происходит в результате функционирования и взаимодействия составляющих системную триаду элементов при приоритетном развитии внутренних закономерностей отдельных обосновательных направлений современной математики. Если кто-то считает данное обоснование математики недостаточным, то, возможно, выдвигает чересчур высокие философские претензии. Но следует специально подчеркнуть, что эпистемологическая надёжность предпринятого философского подхода, основанного на методологии системности, обусловлена также тем, что развитие системного синтеза в обосновании трактуется ещё и как самообоснование математических теорий в диалектическом единстве и борьбе противоположных сторон системы, поэтому потенциально синтез является существенным аспектом диалектики, системно варьирующим соотношение новых противоположностей. При этом диалектическое развитие сравнивается с движением по спирали, поскольку при обороте по спирали мы не возвращаемся к уже пройденным этапам познания на новом уровне познания, а синтез сводит различные области математики в целостную систему обоснованной математики.

Литература

1. Колмогоров А.Н. Математика // Математический энциклопедический словарь. М.: Большая российская энциклопедия, 1995. С. 7–38.
2. Светлов В.А. Почему математика требует обоснования // Сборник научных трудов SWorld. 2013. Т. 31, № 4. С. 12–15.
3. Перминов В.Я. «Предустановленная гармония» Лейбница и системный подход к обоснованию практической эффективности математики // Российский гуманитарный журнал. 2012. Т. 1, № 1. С. 42–52.

4. Матиясевич Ю.В. Математическое доказательство: вчера, сегодня, завтра // Компьютерные инструменты в образовании. 2012. № 6. С. 13–24.
5. Мазуров Вл.Д. Философия математики // Вестник Уральского института экономики, управления и права. 2016. № 1. С. 56–67.

PHILOSOPHICAL AND METHODOLOGICAL ANALYSIS OF THE GENESIS OF THE FOUNDATION OF MODERN MATHEMATICS

N.V. Michailova
Ph.D., Associate Professor, e-mail: n.mikhajlova@bsuir.by

Institute of Information Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radio Electronics, Minsk, Belarus

Abstract. The thesis is substantiated about the need for a new systemic methodological approach to the problem of substantiating modern mathematics, based on revealing the productivity of the main directions of justification and explication of the insufficiency of methodological prerequisites for formation programs malism and intuitionism in the increment of mathematical knowledge. Leaning on for a holistic substantiation of cognitive theories of mathematics, for the synthesis of personal aspects of mathematical reality, the author seeks help from real systematic development of areas of mathematics in the context of a unified aspects of modern mathematics.

Keywords: philosophical and methodological analysis, modern mathematics, foundations.

Дата поступления в редакцию: 16.01.2024