ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 110–114

УДК 517.925.7

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДИССИПАТИВНЫХ ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В.В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220013, Беларусь

[*]e-mail: tsegvv@bsuir.by

Поступила в редакцию: 26.02.2024

После доработки: 26.02.2024

Принята к публикации: 05.03.2024

Объектом исследования является семейство трехмерных динамических пятиэлементных диссипативных систем с одной квадратичной нелинейностью, произвольным параметром A и параметром ε, $\varepsilon^2 = 1$. В системах указанного семейства параметр A входит как множитель при линейном элементе (системы первого класса), или как отдельный элемент-константа (системы второго класса). Характерной особенностью (с качественной точки зрения) данного семейства является наличие в нем систем, обладающих хаотическим поведением, в частности обладающих странными аттракторами. Целью исследования является определение характера подвижных особых точек решений указанного семейства. Для анализа решений систем рассматриваемого семейства использован тест Пенлеве, а также сведение систем к эквивалентным им уравнениям второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями P-типа. Решения систем первого класса не обладают свойством Пенлеве (несмотря на то, что компоненты решений некоторых из них вообще не имеют подвижных особых точек), или не удовлетворяют тесту Пенлеве. Аналогично, решения систем второго класса либо не удовлетворяют тесту Пенлеве, либо не обладают свойством Пенлеве, несмотря на то, что компоненты решений некоторых систем вообще не имеют подвижных особых точек. Наличие систем с хаотическим поведением среди рассматриваемых систем позволяет указать автономные дифференциальные уравнения третьего порядка с хаотическим поведением.

Ключевые слова: диссипативная система, хаотическое поведение, странный аттрактор, тест Пенлеве, P-свойство.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.321

EDN QMNFMH

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] проведено качественное исследование семейства диссипативных трехмерных пятиэлементных динамических систем с одной квадратичной нелинейностью. В результате проведенного анализа были выделены системы без хаотического поведения, а также системы с хаотическим поведением, в частности системы, обладающие странными аттракторами.

Представляет интерес исследование аналитических свойств (в частности, характера подвижных особых точек решений) в предположении, что неизвестные функции и независимая переменная являются комплекснозначными.

Заметим, что система дифференциальных уравнений (или уравнение) является системой (уравнением) Пенлеве-типа, если подвижными (зависящими от начальных условий) особыми точками ее (его) общего решения могут быть только полюсы [2]. В данном случае говорят, что система (уравнение) является системой (уравнением) P-типа или обладает P-свойством решений.

ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ОДНОЙ КОНСТАНТОЙ

Исследуем аналитические свойства решений (характер подвижных особых точек) систем

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x + A,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = x; \tag{1}$$

$$\dot{x} = y^2 + z + A,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = \varepsilon x; \tag{2}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x + A,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = y; \tag{3}$$

$$\dot{x}=x^2+\varepsilon x+y,\ \ \dot{y}=A,\ \ \dot{z}=x; \tag{4}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+A,\ \ \dot{y}=xz,\ \ \dot{z}=y; \tag{5}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z+A,\ \ \dot{y}=xz,\ \ \dot{z}=y; \tag{6}$$

$$\dot{x}=y^2+A,\ \ \dot{y}=x+z,\ \ \dot{z}=\varepsilon z; \tag{7}$$

$$\dot{x}=y^2+A,\ \ \dot{y}=z+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=x; \tag{8}$$

$$\dot{x}=z^2+A,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=y; \tag{9}$$

$$\dot{x}=yz+A,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=x; \tag{10}$$

$$\dot{x}=yz+A,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=y; \tag{11}$$

$$\dot{x}=yz+A,\ \ \dot{y}=\varepsilon y+z,\ \ \dot{z}=x; \tag{12}$$

$$\dot{x}=z^2+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=y; \tag{13}$$

$$\dot{x}=z^2+y,\ \ \dot{y}=\varepsilon x+A,\ \ \dot{z}=x; \tag{14}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=x; \tag{15}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=y; \tag{16}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=x; \tag{17}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\ \ \dot{y}=x+z,\ \ \dot{z}=A; \tag{18}$$

$$\dot{x}=y^2+z,\ \ \dot{y}=x+\varepsilon y,\ \ \dot{z}=A; \tag{19}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z,\ \ \dot{y}=x+A,\ \ \dot{z}=xy; \tag{20}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z,\ \ \dot{y}=z+A,\ \ \dot{z}=xy \tag{21}$$

с неизвестными функциями x, y, z в предложении, что независимая переменная t является комплексной; $\varepsilon^2=1$, A – произвольный постоянный параметр. При $\varepsilon=-1$ каждая из систем (1)–(21) является диссипативной.

Теорема 1 [1]. Системы (5), (17), (20), (21) обладают в случае $\varepsilon=-1$ хаотическим поведением.

Теорема 2. При $\varepsilon=-1$ системы (17), (20) эквивалентны уравнению

$$\dddot{y}+\ddot{y}-y\dot{y}+Ay=0, \tag{22}$$

а системы (5), (21), соответственно, уравнениям

$$z\dddot{z}-\dot{z}\ddot{z}=-z\ddot{z}+z^2\dot{z}+Az^2, \tag{23}$$

$$y\dddot{y}-\dot{y}\ddot{y}=-y\ddot{y}+y^2\dot{y}-Ay^2. \tag{24}$$

Теорема 3. Ни одно из уравнений (22), (23), (24) не является уравнением Пенлеве-типа. Ни одна из систем (5), (17), (20), (21) не является системой Пенлеве-типа в случае $\varepsilon=-1$.

Теорема 4. Системы (3), (11) эквивалентны уравнению

$$\dddot{z}-\frac{1}{2}z^2-\varepsilon\dot{z}=At+c, \tag{25}$$

а системы (2), (7) – уравнению

$$\ddot{y}-y^2=Ce^{\varepsilon t}+A, \tag{26}$$

где C – произвольная постоянная.

Теорема 5. Системы (4), (15), (18), (19) эквивалентны, соответственно, уравнениям

$$\ddot{z}-\dot{z}^2-\varepsilon\dot{z}=At+C, \tag{27}$$

$$\ddot{z}-z^2-(At+C)z-\varepsilon\dot{z}=0, \tag{28}$$

$$\ddot{y}-y^2-\varepsilon\dot{y}=\varepsilon(At+C)+A, \tag{29}$$

$$\dot{y}-y^2-\varepsilon\dot{y}=At+C, \tag{30}$$

где C – произвольная постоянная.

Справедливость теорем 2–5 установлена в [1].

Теорема 6. Ни одно из уравнений (25)–(30) не является уравнением Пенлеве-типа.

Справедливость теоремы 6 следует из сравнения каждого из указанных уравнений с уравнениями Пенлеве-типа из [2].

Теорема 7. Общие решения ни одной из систем (2), (3), (4), (7), (11), (15), (18), (19) не обладают свойством Пенлеве.

Теорема 8 [1]. Системы (1), (2), (3) эквивалентны системам (13), (14), (16), соответственно.

Теорема 9 [1]. Системы (1), (8) эквивалентны уравнению

$$\dddot{y}=y^2+\varepsilon\ddot{y}+A, \tag{31}$$

система (9) – уравнению

$$\dddot{z}=z^2+\varepsilon\ddot{z}+A, \tag{32}$$

а система (12) – уравнению

$$\dddot{y}=\varepsilon\ddot{y}+y\dot{y}-\varepsilon y^2+A. \tag{33}$$

Теорема 10. Уравнения (31)–(33) не являются уравнениями Пенлеве-типа.

Доказательство следует из сравнения указанных уравнений с уравнениями Пенлеве-типа третьего порядка с полиноминальной правой частью из [3].

Замечание 1. Уравнение (32) получается из (31) заменой $y\to z$.

Следствием из теоремы 10 является следующая теорема.

Теорема 11. Общие решения ни одной из систем (1), (8), (9), (12), (14), (16) не обладают свойством Пенлеве.

Замечание 2. С помощью теста Пенлеве [4] выполнен анализ решения систем (5), (17), (20), (21).

ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ЧЕТЫРЬМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Системы указанного класса имеют вид

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x+Az,\quad \dot{y}=x,\quad \dot{z}=y; \tag{34}$$

$$\dot{x}=y^2+Ax+z,\quad \dot{y}=x,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{35}$$

$$\dot{x}=y^2+Ay+z,\quad \dot{y}=x,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{36}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=x; \tag{37}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x+Az,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=x; \tag{38}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=x; \tag{39}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=x^2,\quad \dot{z}=x; \tag{40}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=x^2,\quad \dot{z}=y; \tag{41}$$

$$\dot{x}=Ax+y+z,\quad \dot{y}=x^2,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{42}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=z^2,\quad \dot{z}=x; \tag{43}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y+Az,\quad \dot{y}=xz,\quad \dot{z}=y; \tag{44}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=x; \tag{45}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=y; \tag{46}$$

$$\dot{x}=y^2+Ax,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{47}$$

$$\dot{x}=y^2+\varepsilon x,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=x; \tag{48}$$

$$\dot{x}=y^2+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{49}$$

$$\dot{x}=y^2+Ay,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{50}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{51}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{52}$$

$$\dot{x}=y^2+z,\quad \dot{y}=x+Ay,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{53}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=\varepsilon z; \tag{54}$$

$$\dot{x}=y^2+Az,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{55}$$

$$\dot{x}=z^2+Ax,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{56}$$

$$\dot{x}=z^2+x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=y; \tag{57}$$

$$\dot{x}=z^2+Ay,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{58}$$

$$\dot{x}=z^2+Ay,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{59}$$

$$\dot{x}=z^2+Ay,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{60}$$

$$\dot{x}=z^2+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{61}$$

$$\dot{x}=yz+Ax,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{62}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=x; \tag{63}$$

$$\dot{x}=yz+\varepsilon x,\quad \dot{y}=x+Az,\quad \dot{z}=y; \tag{64}$$

$$\dot{x}=yz+Ax,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{65}$$

$$\dot{x}=yz+Ay,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{66}$$

$$\dot{x}=yz+Ay,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{67}$$

$$\dot{x}=yz+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=x; \tag{68}$$

$$\dot{x}=yz+Az,\quad \dot{y}=x+\varepsilon y,\quad \dot{z}=y; \tag{69}$$

$$\dot{x}=yz+Az,\quad \dot{y}=\varepsilon y+z,\quad \dot{z}=x; \tag{70}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=x^2; \tag{71}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=x^2; \tag{72}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=y^2; \tag{73}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Az,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=y^2; \tag{74}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+Ay,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=xy; \tag{75}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+y,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=xy; \tag{76}$$

$$\dot{x}=\varepsilon x+z,\quad \dot{y}=Ay+z,\quad \dot{z}=xy. \tag{77}$$

Системы (35), (42), (47), (48), (53), (56), (62), (65), (72), (76), (77) являются диссипативными, если $A+\varepsilon<0$. Остальные системы из данного списка являются таковыми, если $\varepsilon=-1$.

Теорема 12. Системы (35), (36), (42), (47), (49), (53), (54) не являются системами Пенлеве-типа. Вместе с тем, одна из компонент каждой из указанных систем вообще не имеет подвижных особых точек.

Доказательство. Третья компонента перечисленных выше систем имеет вид $z=Ce^{\varepsilon t}$, где C – произвольная постоянная. В силу этого указанные системы эквивалентны неавтономным уравнениям второго порядка [1]

$$\ddot{y}-y^2-A\dot{y}=Ce^{\varepsilon t}, \tag{78}$$

$$\ddot{y} - y^2 - Ay = Ce^{\varepsilon t}, \tag{79}$$

$$\ddot{x} - x^2 - Ax = \varepsilon Ce^{\varepsilon t}, \tag{80}$$

$$\ddot{y} - y^2 - A\dot{y} = (\varepsilon A - A^2)Ce^{\varepsilon t}, \tag{81}$$

$$\ddot{y} - y^2 - Ay = \varepsilon Ce^{\varepsilon t}, \tag{82}$$

$$\ddot{y} - y^2 = (A+1)Ce^{\varepsilon t}, \tag{83}$$

$$\ddot{y} - y^2 = (A+\varepsilon)Ce^{\varepsilon t}, \tag{84}$$

соответственно. Сравнение уравнений (78)–(84) с уравнениями из списка [2] показывает, что они не являются уравнениями Пенлеве-типа.

Используя тест Пенлеве [4], можно доказать следующую теорему.

Теорема 13. Системы (37), (38), (41), (43), (45), (48), (50), (56), (58)–(63), (65), (71)–(76) не являются системами Пенлеве-типа.

Проведен Пенлеве-анализ решений уравнения третьего порядка, отличного от уравнения $\dddot{u} = P(u, \dot{u}, \ddot{u})$, где P – полином относительно $u, \dot{u}, \ddot{u}$ с постоянными коэффициентами, которому эквивалентна система (66).

Система (40) эквивалентна системе

$$\ddot{x} = \varepsilon\dot{x} + x^2 + Ax, \quad \dot{z} = x. \tag{85}$$

Теорема 14. Общее решение системы (40) не обладает свойством Пенлеве.

Доказательство следует из того, что общее решение первого уравнения системы (85), согласно [2], содержит подвижные критические особые точки.

С помощью теста Пенлеве [4] проведен анализ решений систем (34), (39), (52), (69), (70), демонстрирующих, согласно [1], хаотическое поведение.

Замечание 3. В [1] указаны системы из списка (34)–(77), которые эквивалентны системам, упомянутым в теоремах 12–14.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы аналитические свойства решений (характер подвижных особых точек) семейства трехмерных автономных пятиэлементных диссипативных систем с одной квадратичной нелинейностью. Характерной особенностью (с качественной точки зрения) данного семейства является наличие в нем систем, обладающих хаотическим поведением, в частности обладающих странными аттракторами. Установлено, что решения систем указанного семейства не обладают свойством Пенлеве (несмотря на то, что компоненты решений некоторых систем вообще не имеют подвижных особых точек), или не удовлетворяют тесту Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhang Fu, Heidel J.* Chaotic and nonchaotic behavior in thee-dimensional quadratic system: 5–1 dissipative cases // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012. V. 22. № 1. 1250010.

2. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.

3. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX–XI of third-order differential equations // Studies in Applied Mathematics, 2000. V. 104. № 3. Pp. 171–228.

4. *Грицук Е.В., Громак В.И.* К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. Навук, 2010. № 3. С. 25–30.

5. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // Physical Review E, 1994. V. 50. P. R647–R650.

6. *Sprott J.C.* Simplest dissipative chaotic flow // Physics Letters A, 1997. V. 228. Pp. 271–274.

7. *Heidel J, Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems // Nonlinearity, 1999. V. 10. Pp. 1289–1303.

8. *Heidel J, Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems II: The conservative case // Nonlinearity, 1999. V. 12. Pp. 617–633.

9. *Цегельник В.В.* Пенлеве-анализ решений одного класса трехмерных нелинейных диссипативных систем // Вестник НИЯУ МИФИ, 2018. Т. 7. № 2. С. 133–137.

10. *Цегельник В.В.* Аналитические свойства решений трехмерных консервативных систем с двумя или четырьмя квадратичными нелинейностями // Вестник НИЯУ МИФИ, 2021. Т. 10. № 4. С. 295–301.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 110–114

ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A FAMILY OF THREE-DIMENSIONAL DYNAMIC DISSIPATIVE FIVE-LEMENT SYSTEMS WITH ONE QUADRATIC NONLINEARITY

V.V. Tsegel'nik
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013, Belarus

**e-mail:* tsegvv@bsuir.by

Received February 26, 2024; revised February 26, 2024; accepted March 05, 2024

The object of the study is a family of three-dimensional dynamic five-element dissipative systems with one quadratic nonlinearity, an arbitrary parameter A and a parameter ε, $\varepsilon^2 = 1$. In systems of the specified family, the parameter A is included as a multiplier with a linear element (systems of the first class), or as a separate constant element (systems of the second class). A characteristic feature (from a qualitative point of view) of this family is the presence in it of systems with chaotic behavior, in particular, with strange attractors. The purpose of the study is to determine the nature of the moving singular points of solutions of the specified family. To analyze solutions to systems of the family under consideration, the Painlevé test was used, as well as reducing the systems to equivalent second- or third-order equations and comparing the latter with known nonlinear P-type equations. Solutions of systems of the first class do not have the Painlevé property (despite the fact that the components of the solutions of some of them do not have moving singular points at all), or do not satisfy the Painlevé test. Similarly, solutions of systems of the second class either do not satisfy the Painlevé test or do not possess the Painlevé property, despite the fact that the components of the solutions of some systems do not have moving singular points at all. The presence of systems with chaotic behavior among the systems under consideration allows us to indicate autonomous third-order differential equations with chaotic behavior.

Key words: dissipative system, chaotic behavior, strange attractor, Painlevé test, *P*-property.

REFERENCE

1. *Zhang Fu, Heidel J.* Chaotic and nonchaotic behavior in thee-dimensional quadratic system: 5–1 dissipative cases. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012. Vol .22. No.1. 1250010.
2. *Ince E.L.* Obiknovennye differetsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. Kharkov, ONTI Publ. 1939. 720 p.
3. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX–XI of third-order differential equations. Studies in Applied Mathematics, 2000. Vol. 104. No. 3. Pp. 171–228.
4. *Gritsuk E.V., Gromak V.I.* K theorii nelineynykh differentsial'nykh uravnenii so svoistvom Penleve [On the theory of nonlinear differentsial equations with Painleve' property]. Izvestia NAN Belarusi. Seria fiz.-mat. nauk, 2010. No. 3. Pp. 25–30 (in Russian).
5. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows. Physical Review E, 1994. Vol. 50. Pp. R647–R650.
6. *Sprott J.C.* Simplest dissipative chaotic flow. Physics Letters A, 1997. Vol. 228. Pp. 271–274.
7. *Heidel J, Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems. Nonlinearity, 1999. Vol. 10. Pp. 1289–1303.
8. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems II: The conservative case. Nonlinearity, 1999. Vol. 12. Pp. 617–633.
9. *Tsegel'nik V.V.* Penleve analyz reshenii odnogo klassa trekhmernykh nelineinykh dissipativnykh system [Painleve' analysis of solutions for one class of three-dimensional nonlinear dissipative systems]. Vestnik NIYaU MIFI, 2018. Vol. 7. No. 2. Pp. 133–137 (in Russian).
10. *Tsegel'nik V.V.* Analiticheskie svoistva reshenii trekhmernykh konservativnykh system s dvumya ili chetyir'mya kvadratichnimi nelineinostyami [Analytical properties of solutions of three-dimensional conservative systems with two and four quadratic nonlinearities]. Vestnik NIYaU MIFI, 2021. Vol. 10. No. 4. Pp. 295–301 (in Russian).