УДК 519.714

# 38. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Зайко А.С., Синицкий Н.А., студенты группы 373901, Русина Н.В., аспирант,
*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
*г. Минск, Республика Беларусь*

*Ефремов А.А. – канд. экон. наук, доцент каф. ЭИ*

**Аннотация.** Данная работа посвящена исследованию на тему замкнутых классов булевых функций и их использования их в различных современных сферах.

**Ключевые слова:** замкнутый класс, булева функция, критерий Поста, замкнутый класс.

**Замкнутый класс** в теории булевых функций — такое множество К функций алгебры логики, замыкание которого относительно операции суперпозиции совпадает с ним самим: [K] = K. Другими словами, любая функция, которую можно выразить формулой использованием функций множества К, снова входит в это же множество.

*Замыканием* [К] множества К функций алгебры логики называется совокупность всех функций из $P_2$, являющихся суперпозициями функций из множества К. Множество К называется (*функционально*) *замкнутым*, если [К] = К. Замкнутые множества называются также *замкнутыми классами*. Подмножество P функций из замкнутого множества К называется (*функционально*) *полным* в К, если [P] = К. Полное в замкнутом классе К множество P называется *базисом* класса К, если для всякого собственного подмножества $P' \subset P$ выполнено $[P'] \neq K$. Подмножество P функций из замкнутого класса К называется предполным классом в К, в том случае, если $[P] \neq K$ и для всякой функции $f \in K \setminus P$ выполняется равенство $[P \cup \{f\}] = K$

Некоторые свойства замкнутых классов:

1. Непустое пересечение замкнутых классов снова является замкнутым классом.
2. Объединение замкнутых классов может замкнутым классом не являться.
3. Замкнутый класс булевых функций, содержащий не только константы, обязательно содержит тождественную функцию.
4. Дополнение замкнутого класса булевых функций до множества всех булевых функций $P_2$ замкнутым классом не является.

В 1941 году Эмиль Пост представил полное описание системы замкнутых классов, называемое также решёткой Поста.

**Формулировка и доказательство критерия Поста:**

*Теорема:*

Набор булевых функций К является полным тогда и только тогда, когда он не содержится полностью ни в одном из классов S, M, L, $T_0$, $T_1$, иными словами, когда в нем имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая один, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.

*Доказательство:*

**Необходимость.**

Заметим, что необходимость этого утверждения очевидна, так, как если бы все функции из набора К входили в один из перечисленных классов, то и все суперпозиции, а, значит, и замыкание набора входило бы в этот класс, и набор К не мог бы быть полным.

**Достаточность.**

Докажем, что если набор K не содержится полностью ни в одном из данных классов, то он является полным.

1. Рассмотрим функцию, не сохраняющую ноль — $f_0$(т.е. функцию, для которой $f_0$ (0)=1). Тогда $f_0$(1)может принимать два значения:
   1) $f_0$(1)=1, тогда $f_0$(x,x,x,…,x)=1.
   2) $f_0$(1)=0, тогда $f_0$ (x,x,x,…,x)=¬x.
2. Рассмотрим функцию, не сохраняющую один — $f_1$ (т.е. функцию, для которой $f_1$ (1)=0). Тогда $f_1$(0) может принимать два значения:
   1) $f_1$ (0)=0, тогда $f_1$(x,x,x,…,x)=0.
   2) $f_1$(0)=1, тогда $f_1$(x,x,x,…,x)=¬x.

*Таким образом, возможны четыре варианта:*

- Мы получили функцию ¬.
- Используем несамодвойственную функцию $f_s$. По определению, найдется такой вектор $x_0$, что $f_s(x_0)$= $f_s$ (¬$x_0$).
- Мы получили ¬ и 0⇒ имеем константу, равную 1, поскольку ¬0=1.
- Мы получили ¬ и 1⇒ имеем константу, равную 0, поскольку ¬1=0.
- Мы получили 1 и 0.

Согласно критерию Поста система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из классов $T_0$, $T_1$, S, M, L.

В частности, если функция не входит ни в один из классов Поста, она сама по себе формирует полную систему. В качестве примера можно назвать штрих Шеффера или стрелку Пирса.

Широко известны такие полные системы булевых функций:

- {∧, ∨, ¬} (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание);
- {∧, ⊕, 1} (конъюнкция, сложение по модулю два, константа один).

Первая система используется, например, для представления функций в виде дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм, вторая — для представления в виде полиномов Жегалкина.

Первая из упоминавшихся выше полных систем безызбыточной не является, поскольку согласно законам де Моргана либо дизъюнкцию, либо конъюнкцию можно исключить из системы и восстановить с помощью остальных двух функций. Вторая система является безызбыточной — все три её элемента необходимы для полноты системы.

Теорема о максимальном числе функций в базисе: максимально возможное число булевых функций в базисе — четыре.

Иногда говорят о системе функций, полной в некотором замкнутом классе, и, соответственно, о базисе этого класса. Например, систему {⊕,1} можно назвать **базисом** класса линейных функций.

**Свойства замыкания функции с переменными:**

Любое множество является подмножеством своего замыкания: A⊆[A].

Замыкание подмножества является подмножеством замыкания: A⊆B ⇒ [A]⊆[B]. Следует заметить, что из строгого вложения множеств следует лишь нестрогое вложение их замыканий: A⊂B ⇒ [A]⊆[B].

Многократное применение операции замыкания эквивалентно однократному: [[A]] = [A].

Любой замкнутый класс булевых функций, отличный от $P_2$, целиком содержится хотя бы в одном из пяти предполных классов:

1) Класс $T_0$ функций, сохраняющих константу 0.

$T_0$ = {f ($x_1$,..., $x_n$) | f (0,..., 0) = 0}.

**Определение.** Булева функция *сохраняет константу 1* (*принадлежит классу $T^1$*), если на наборе из всех единиц функция принимает значение единица.

**Примеры.** Мажоритарная булева функция сохраняет константу 1. Из элементарных булевых функций таковыми являются, например, дизъюнкция и конъюнкция. Не сохраняют константу 1, например, штрих Шеффера и стрелка Пирса. •

**Утверждение о числе булевых функций класса** $T^1$. Число различных булевых функций, зависящих от *n* переменных и сохраняющих константу 1, равно $2^{2n-1}$.

2) Класс $T_1$ функций, сохраняющих константу 1.

$T_1$ = {f ($x_1$,..., $x_n$) | f (1,..., 1) = 1}.

**Определение.** Булева функция *сохраняет константу 1* (*принадлежит классу $T^1$*), если на наборе из всех единиц функция принимает значение единица.

**Примеры.** Мажоритарная булева функция сохраняет константу 1. Из элементарных булевых функций таковыми являются, например, дизъюнкция и конъюнкция. Не сохраняют константу 1, например, штрих Шеффера и стрелка Пирса.

**Утверждение о числе булевых функций класса** $T^1$. Число различных булевых функций, зависящих от $n$ переменных и сохраняющих константу 1, равно $2^{2n-1}$.

3) Класс $S$ самодвойственных функций.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *самодвойственна* (*принадлежит классу S*), если она равна двойственной себе функции, то есть

$S = f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

4) Класс $M$ монотонных булевых функций.

$M = \{f(x_1,\ldots, x_n) \mid \forall\, i\ \alpha_i \leq \beta_i \Rightarrow f(\alpha_1,\ldots, \alpha_n) \leq f(\beta_1,\ldots, \beta_n)\}$.

5) Класс $L$ линейных булевых функций.

$L = \{f(x_1,\ldots, x_n) \mid f(x_1,\ldots, x_n) = = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n\}$.

**Определение.** Булева функция называется линейной (принадлежит классу L), если ее полином Жегалкина линеен.

**Применение замкнутых классов булевых функций:**

Понимание замкнутых классов булевых функций может помочь в разработке криптографических алгоритмов и протоколов. Например, при построении блочных шифров или хэш-функций используются булевы функции, и знание о замкнутых классах может помочь выбрать подходящие функции.

При проектировании цифровых устройств и схем необходимо использовать булевые функции. Знание о замкнутых классах может помочь оптимизировать схемы и упростить их реализацию.

В тестировании программного обеспечения часто используются булевы функции для описания условий и проверки правильности работы программы. Понимание замкнутых классов может помочь в создании эффективных тестов.

В области искусственного интеллекта и машинного обучения также используются булевы функции для моделирования логических отношений. Знание о замкнутых классах может помочь в выборе подходящих функций для задач машинного обучения.

Замкнутые классы булевых функций играют важную роль в теории комбинаторики и теории кодирования. Они используются для описания и классификации различных типов булевых функций, которые могут быть представлены в виде набора операций над булевыми переменными.

Применение замкнутых классов булевых функций также включает в себя следующие аспекты:

1. Классификация булевых функций: Замкнутые классы позволяют разделить все возможные булевы функции на различные типы в зависимости от их свойств. Например, классы монотонных функций, классы симметричных функций и т. д.

2. Построение кодов: Замкнутые классы булевых функций могут использоваться для построения различных видов кодов, таких как коды Хемминга, коды Рида-Соломона и другие. Эти коды широко применяются в телекоммуникациях, компьютерной науке и других областях.

3. Анализ сложности: Изучение замкнутых классов помогает определить сложность вычисления булевых функций и оценить необходимое количество операций для их вычисления.

4. Разработка алгоритмов: Знание о замкнутых классах булевых функций может помочь при разработке эффективных алгоритмов для решения задач, связанных с булевыми функциями, таких как поиск оптимальных схем или проверка эквивалентности функций.

Таким образом, применение замкнутых классов булевых функций имеет широкий спектр применений в различных областях науки и техники, где требуется работа с булевыми выражениями и логическими операциями.

**Список использованных источников:**

1. https://ru.m.wikipedia.org/wiki/Замкнутые_классы_булевых_функций. – Дата доступа: 01.04.2024
2. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000.
3. https://ido.tsu.ru/iop_res/bulevfunc/text/g15_3_3.html Дата доступа: 01.04.2024
4.https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Полные_системы_функций_Теорема_Поста_о_полной_системе_функций Дата доступа: 01.04.2024