

УДК 519.66

41. ПРИМЕНЕНИЕ КАРТЫ КАРНО В АНАЛИЗЕ И ОПТИМИЗАЦИИ КОМБИНАЦИОННЫХ ЦИФРОВЫХ СХЕМ

Захаренко Ю. А. студент гр., Ясюкевич С. А. студент гр.373904, Русина Н.В. аспирант

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. Минск,
Республика Беларусь*

Ефремов А.А. – канд. экон. наук, доцент каф. ЭИ

Аннотация. Целью данной научной работы является изучение и применение карты Карно в анализе и оптимизации комбинационных цифровых схем. В работе рассматривается применение карты Карно для упрощения логических функций,

минимизации числа элементов схемы и оптимизации ее производительности. Будут исследованы различные методы построения карты Карно. Также будет предоставлено сравнение эффективности карты Карно с другими методами оптимизации, такими как метод Квайна-Мак-Класки и метод Квайна-Маккласки-Петрика. Результаты исследования позволят понять преимущества и ограничения карты Карно и осмысленно применять ее в процессе проектирования и оптимизации комбинационных цифровых схем.

Ключевые слова. Карта Карно, комбинационные цифровые схемы, оптимизация, логические функции, элементы схемы.

Дискретная математика изучает объекты и структуры дискретного характера. Комбинационные цифровые схемы — это основные строительные блоки, используемые в цифровой электронике для обработки и передачи цифровых сигналов. Карта Карно является графическим инструментом, который позволяет упростить логические функции, основанные на значениях входных переменных и соответствующих им выходных значений.

Основные понятия комбинаторики, связанные с картой Карно.

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий способы подсчета комбинаций и перестановок элементов множеств. Основные понятия комбинаторики включают в себя:

1. Карта Карно:

Карта Карно - графический метод для упрощения и минимизации логических функций, с помощью группировки единиц в кубические ячейки.

2. Комбинационная цифровая схема:

Комбинационная цифровая схема - схема, в которой выходные переменные зависят от комбинаций входных переменных и логических операций, выполняемых над ними.

3. Минимизация:

Минимизация - процесс сокращения количества логических элементов, необходимых для реализации логической функции, путем использования карты Карно.

Комбинационные цифровые схемы.

Комбинационные цифровые схемы - основные блоки в цифровой электронике для обработки и передачи цифровых сигналов. Они выполняют логические операции над входными сигналами и производят заданный выходной результат. Комбинационные схемы являются основой устройств, таких как микропроцессоры, компьютеры и мобильные телефоны.

Роль комбинационных цифровых схем включает выполнение задач обработки и управления информацией. Они обрабатывают цифровые сигналы, выполняют арифметические и логические операции, а также обеспечивают преобразование и коммутацию сигналов для достижения заданных функций и целей.

Комбинационные схемы основаны на использовании логических элементов, например, И, ИЛИ, НЕ и других схем, которые оперируют по принципам булевой алгебры. С их помощью можно создавать различные комбинационные схемы и логические функции для обработки и передачи информации.

Примерами комбинационных цифровых схем являются сумматоры, дешифраторы, кодеры, мультиплексоры и демультиплексоры. Эти схемы выполняют различные операции, такие как сложение, декодирование, кодирование, выбор и передача данных согласно логическим правилам и условиям.

Комбинационные цифровые схемы играют важную роль в преобразовании и обработке информации в цифровой электронике. Они являются базой для создания более сложных цифровых систем, выполняющих широкий спектр функций и задач в различных сферах, таких как вычислительная техника, коммуникации и управление.

Построение и применение карт Карно

Карта Карно является графическим инструментом, который позволяет упростить логические функции, основанные на значениях входных переменных и соответствующих им выходных значений. Процесс упрощения логических функций с использованием карты Карно включает следующие шаги:

Шаг 1: Построение карты Карно:

- Определите количество входных переменных (например, А, В, С) и выходную переменную (например, F) в логической функции.

- Постройте таблицу Карно с помощью $2^{\text{количество входных переменных}}$ строк и $2^{\text{количество выходных переменных}}$ столбцов.

- Разделите таблицу на прямоугольники (ячейки), где каждая ячейка представляет комбинацию значений входных переменных, а значения внутри ячейки представляют значения выходной переменной.

Шаг 2: Заполнение таблицы Карно:

- Запишите значения выходной переменной в соответствующие ячейки таблицы Карно, используя значения логической функции.

Шаг 3: Группировка единиц:

- Группируйте ячейки, содержащие единицы (1), внутри таблицы Карно.

- Группы должны быть прямоугольными и содержать 2^N ячеек, где N - количество переменных в каждом измерении.

Шаг 4: Запись упрощенной логической функции:

- Для каждой группы создайте простую логическую функцию, используя минимальное количество логических операций, которые покрывают все комбинации переменных внутри группы.

- Если группа содержит только нули (0), используйте отрицание выходной переменной в логической функции.

Шаг 5: Сокращение логической функции:

- Если возможно, найдите общие части между логическими функциями для разных групп и объедините их в одну функцию.

- Продолжайте упрощать логическую функцию до достижения наименьшего количества логических операций.

Пример:

Рассмотрим логическую функцию $F(A, B, C) = \sum m(0, 1, 2, 5, 7)$.

1. Построение карты Карно:

AB\CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	1

2. Группировка единиц:

- Группа 1: A=0, B=0, C=0 (1)
- Группа 2: A=0, B=1, C=1 (1)
- Группа 3: A=0, B=1, C=0 (1, 1)
- Группа 4: A=1, B=0, C=1 (1)
- Группа 5: A=1, B=1, C=1 (1)

3. Запись упрощенной логической функции:

- Группа 1: $F_1 = A'BC'$
- Группа 2: $F_2 = A'B'C$
- Группа 3: $F_3 = A'B$
- Группа 4: $F_4 = AB'C$
- Группа 5: $F_5 = ABC$

4. Сокращение логической функции:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = A'BC' + A'B'C + A'B + AB'C + ABC$$

Это простой пример использования карты Карно для упрощения логической функции. При работе с более сложными функциями может потребоваться больше шагов и группировок для достижения наименьшей сложности логической функции.

Карта Карно может использоваться для минимизации числа элементов в цифровых схемах путем определения оптимальных комбинаций входных переменных и упрощения логических функций. Процесс минимизации с использованием карты Карно включает следующие шаги:

Шаг 1: Преобразование логической функции в таблицу Карно

- Запишите логическую функцию в форме суммы минтермов или продукта макстермов.

- Создайте таблицу Карно, где каждая ячейка представляет уникальную комбинацию входных переменных.

Шаг 2: Заполнение таблицы Карно

- Заполните значения выходной переменной в соответствующие ячейки таблицы Карно, используя значения логической функции.

Шаг 3: Группировка максимальных ячеек

- Группируйте ячейки, содержащие единицы (1), внутри таблицы Карно.

- Группы должны быть прямоугольными и содержать 2^N ячеек, где N - количество переменных в каждом измерении.

- Группы должны быть по возможности максимальными, то есть содержать максимальное количество ячеек с единицами.

Шаг 4: Запись упрощенной логической функции

- Для каждой группы создайте простую логическую функцию, используя минимальное количество переменных, которые изменяются внутри группы.

- Если группа содержит только нули (0), используйте отрицание выходной переменной в логической функции.

Шаг 5: Сокращение логической функции

- Если возможно, найдите общие части между логическими функциями для разных групп и объедините их в одну функцию.

- Продолжайте упрощать логическую функцию до достижения наименьшего количества переменных и элементов.

Пример:

Рассмотрим логическую функцию $F(A, B, C) = \sum m(0, 1, 2, 5, 7)$.

1. Преобразование логической функции в таблицу Карно:

	AB\CD	00	01	11	10
		-----	-----	-----	-----
	00	1	1	1	1
	01	0	1	0	1

2. Группировка максимальных ячеек:

- Группа 1: $A=0, B=0, C=0$ (1)
- Группа 2: $A=0, B=1, C=1$ (1)
- Группа 3: $A=0, B=1, C=0$ (1, 1)
- Группа 4: $A=1, B=0, C=1$ (1)
- Группа 5: $A=1, B=1, C=1$ (1)

3. Запись упрощенной логической функции:

- Группа 1: $F_1 = A'BC'$
- Группа 2: $F_2 = A'B'C$
- Группа 3: $F_3 = A'B$
- Группа 4: $F_4 = AB'C$
- Группа 5: $F_5 = ABC$

4. Сокращение логической функции:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = A'BC' + A'B'C + A'B + AB'C + ABC$$

Таким образом, используя карту Карно, была представлена логическая функция в упрощенной форме, которая содержит минимальное количество переменных и минимизированное количество элементов схемы.

Сравнение карты Карно с другими методами оптимизации

Существует несколько методов оптимизации комбинационных цифровых схем, которые можно использовать вместе или вместо карты Карно. Некоторые из распространенных методов включают метод Квайна-Мак-Класки и метод Квайна-Маккласки-Петрика. Рассмотрим их и сравним с картой Карно.

1. Карта Карно (Karnaugh Map):

- Преимущества:
- Простота использования и понимания.
- Интуитивная графическая форма помогает визуализировать и анализировать логические функции.

- Удобный способ выявления соседних клеток с единицами для группировки.
- Ограничения:
- Эффективность карты Карно снижается с увеличением количества входных переменных.
- Не всегда легко определить наибольшую группу ячеек с единицами для минимизации функции.

- Может быть сложно обработать функции с большим количеством переменных или сложную систему входных данных.

2. Метод Квайна-Мак-Класки (Quine-McCluskey Method):

- Преимущества:
- Позволяет провести полную минимизацию логической функции без потери оптимальности.

*60-я Юбилейная Научная Конференция Аспирантов, Магистрантов и Студентов БГУИР,
Минск 2024*

- Автоматический и алгоритмический подход к упрощению функции.
 - Работает независимо от количества переменных.
 - Ограничения:
 - Требуется более высокой вычислительной мощности и времени выполнения для сложных функций.
 - Сложность алгоритма возрастает с увеличением числа переменных и размером таблицы.
3. Метод Квайна-Маккласки-Петрика (Q-M-P Method):
- Преимущества:
 - Позволяет провести полную минимизацию логической функции.
 - Работает с функциями, представленными в форме суммы минтермов или продукта макстермов.
 - Учитывает дополнительные переменные для построения минимальных функций.
 - Ограничения:
 - Метод более сложен для использования по сравнению с картой Карно или методом Квайна-Мак-Класки.
 - Требуется более высокой вычислительной мощности для обработки сложных функций.

В целом, каждый метод имеет свои преимущества и ограничения. Карта Карно легка в использовании и визуально интуитивна, но может стать неэффективной для сложных функций. Методы Квайна-Мак-Класки и Квайна-Маккласки-Петрика обеспечивают более общие и алгоритмические подходы к минимизации, но могут быть более сложными в использовании и требовать большей вычислительной мощности для сложных функций. Выбор конкретного метода зависит от сложности функции, уровня оптимизации, доступных ресурсов и предпочтений исследователя.

Карта Карно - мощный инструмент для анализа и оптимизации комбинационных цифровых схем. Она визуализирует и анализирует логические функции, оптимизирует комбинации переменных и упрощает схемы.

С использованием карты Карно и ее методики упрощения, исследователи и инженеры могут достичь оптимальной реализации с использованием минимального количества элементов.

Карта Карно имеет немалое значение в цифровой электронике и может быть применена в различных областях, таких как компьютеры, мобильные устройства, автомобильная промышленность и медицинская техника. Будущие исследования должны сосредоточиться на разработке новых методов и алгоритмов для минимизации сложных функций и оптимизации больших комбинационных схем.

Карта Карно также может быть интегрирована с другими методами оптимизации для создания более эффективных и точных методов оптимизации.

В целом, карта Карно является важным инструментом для исследователей и инженеров в области цифровой электроники, облегчая процесс анализа и оптимизации комбинационных цифровых схем.

Список использованных источников:

1. Mishra, D., & Chandrakasan, A. (2014). *Digital Integrated Circuits: A Design Perspective*. Pearson Education India.
2. Rabaey, J. M., Chandrakasan, A., & Nikolic, B. (2001). *Digital Integrated Circuits*. Prentice Hall.
3. Bergeron, L., & Allen, R. (2010). *Writing Testbenches: Functional Verification of HDL Models*. Springer Science & Business Media.