УДК 511.178

42. ЧИСЛА СТИРЛИНГА В КОМБИНАТОРИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Осипова А.И., Самосюк Д. В,. студенты гр.373904, Русина Н.В. аспирант

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроникиг. Минск, Республика Беларусь

Ефремов А.А. – канд. экон. наук, доцент каф. ЭИ

Аннотация. Данная научная работа по дискретной математике посвящена изучению чисел Стирлинга в комбинаторике. Числа Стирлинга являются комбинаторным объектом, который широко применяется в различных областях математики. Работа включает введение, основные понятия и основную часть, где рассматриваются определение чисел Стирлинга, их свойства, применение и взаимосвязь с другими комбинаторными объектами. В основной части работы рассматриваются определение чисел Стирлинга, их свойства (рекуррентные формулы, симметричность, связь с биномиальными коэффициентами) и применение (в перестановках, размещениях, сочетаниях, анализе алгоритмов). В заключении подчеркивается важность чисел Стирлинга как комбинаторного инструмента и необходимость дальнейших исследований в этой области. В работе также представлен список литературы для дальнейшего изучения чисел Стирлинга и комбинаторики в целом.

Ключевые слова. Числа Стирлинга первого и второго рода, дискретная математика, комбинаторика, Биноминальные коэффициенты, Рекуррентные соотношения, генерирующие функции, перестановка и разбиения, теория графов.

Введение.

Дискретная математика занимается изучением объектов и структур, которые имеют дискретный (разрывный) характер. В комбинаторике рассматриваются задачи, связанные с подсчетом и упорядочиванием объектов. Числа Стирлинга являются важным классом чисел в комбинаторике, которые широко используются для решения различных задач, таких как подсчет перестановок, разбиений и подмножеств.

Основные понятия комбинаторики, связанные с числами Стирлинга.

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий методы подсчета комбинаций и перестановок элементов множеств. Основные понятия комбинаторики включают в себя:

1. Перестановки:

Перестановка — это упорядоченное расположение элементов множества. Число перестановок можно вычислить с помощью факториала. Например, для множества из n элементов число перестановок будет равно n!.

2. Разбиения:

Разбиение множества — это разделение множества на непересекающиеся подмножества (блоки). Число разбиений может быть вычислено с использованием чисел Стирлинга второго рода. Число разбиений множества из n элементов на k блоков обозначается как S(n, k).

3. Подмножества:

Подмножество множества — это множество, элементы которого являются частью данного множества. Число подмножеств множества из n элементов можно вычислить с помощью чисел Стирлинга первого рода. Число подмножеств множества из n элементов обозначается как S(n, 1).

Числа Стирлинга.

Числа Стирлинга представляют собой особые числа, которые зависят от двух параметров. Они используются в различных комбинаторных задачах и исследованиях, связанных со специальными числами. Числа Стирлинга 1-го рода (0 ≤ k ≤ n) определяются как количество перестановок из n элементов с k циклами, а числа Стирлинга 2-го рода n (0 ≤ k ≤ n) представляют собой количество способов разбиения множества из n элементов на k непустых подмножеств. Если значение k не находится в интервале от 0 до n, числа Стирлинга считаются равными нулю.

Равносильное определение получается, если числа Стирлинга задать как коэффициенты в разложениях

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \quad (n \geq 0), \qquad (1)$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^{k} \quad (n \geq 0). \qquad (2)$$

Здесь и далее через $x^{\overline{n}}$ и $x^{\underline{n}}$ будем обозначать убывающие и возрастающие факториальные степени

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\ldots(x-n+1),$$
$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\ldots(x+n-1).$$

Из формул (1) и (2) легко находятся граничные значения чисел Стирлинга

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left[{n \atop 0} \right] = \begin{cases} 1, \text{если } n = 0, \\ 0, \text{если } n \geq 1, \end{cases} \qquad (3)$$

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = \left[{n \atop n} \right] = 1 \qquad (n \geq 0), \qquad (4)$$

и рекуррентные соотношения:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \qquad (1 \leq k < n), \qquad (5)$$

$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1) \left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right] \quad (1 \leq k < n). \qquad (6)$$

Условия (3)–(6) также однозначно определяют числа Стирлинга и позволяют легко вычислить их первые значения:

n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	

n	$\left[{n \atop 0} \right]$	$\left[{n \atop 1} \right]$	$\left[{n \atop 2} \right]$	$\left[{n \atop 3} \right]$	$\left[{n \atop 4} \right]$
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	

Отметим несколько известных свойств чисел Стирлинга (см. [4], [8]). После замены переменной x на −x в определениях (1)–(2) получаются еще две формулы, связывающие между собой обычные и факториальные степени:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} \qquad (n \geq 0), \qquad (7)$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} x^{k} \qquad (n \geq 0). \qquad (8)$$

Эквивалентность формул (1)–(2) и (7)–(8) является частным случаем более общего утверждения: для функций f(n) и g(n), определенных на множестве целых неотрицательных чисел справедливы взаимно обратные соотношения.

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{k} f(k) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] (-1)^{k} g(k). \qquad (9)$$

При подстановке одного из этих равенств в другое получаются ортогональные соотНошения для чисел Стирлинга 1-го и 2-го рода.

$$\sum_{k} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = \sum_{k} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n-k} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n, \\ 0, m \neq n, \end{cases}$$

Равносильные (9).

Экспоненциальные производящие функции последовательностей $\left\{ n \atop k \right\}$ и $\left[n \atop k \right]$ $k = n,\ n+1, n+2, . . .)$ имеют следующий вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^k}{k!},$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[n \atop k \right] \frac{z^n}{n!} = \frac{(\ln \frac{1}{1-z})^k}{k!}.$$

С помощью чисел Стирлинга можно получить явное представление для чисел Бернулли:

$$\sum_k \left\{ m \atop k \right\} \left[k+1 \atop n \right] \frac{(-1)^{k+1-n}}{k+1} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{n} B_{m+1-n} \qquad (n > 0). \qquad (10)$$

Также бывают полезными равенства:

$$\left\{ n+1 \atop m+1 \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ k \atop m \right\}, \qquad \left[n+1 \atop m+1 \right] = \sum_k \left[n \atop k \right] \binom{k}{m}.$$

Свойства чисел Стирлинга

Числа Стирлинга обладают несколькими важными свойствами, которые помогают в их вычислении и применении в комбинаторике. Вот некоторые из основных свойств чисел Стирлинга:

1. Свойства чисел Стирлинга первого рода (S(n, k)):

- $S(n, 1) = S(n, n) = 1$: Числа Стирлинга первого рода равны 1, когда число блоков равно 1 или равно общему числу элементов.
- $S(n, k) = 0$, если k > n или k < 1: Числа Стирлинга первого рода равны 0, когда число блоков больше, чем общее число элементов или меньше 1.
- $S(n, n-1) = (n-1)!$: Число Стирлинга первого рода с n элементами и n-1 блоками равно (n-1)!, факториалу (n-1).

2. Свойства чисел Стирлинга второго рода (S(n, k)):

- $S(n, 1) = S(n, n) = 1$: Числа Стирлинга второго рода равны 1, когда число блоков равно 1 или равно общему числу элементов.

$S(n, k) = 0$, если k > n: Числа Стирлинга второго рода равны 0, когда число блоков больше, чем общее число элементов.

- $S(n, k) = k * S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$: Число Стирлинга второго рода может быть рекурсивно вычислено с использованием этой формулы.

3. Отношение между числами Стирлинга первого и второго рода:

- $S(n, k) = k! * S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$: Существует связь между числами Стирлинга первого и второго рода, которая позволяет выразить число Стирлинга первого рода через число Стирлинга второго рода.

4. Треугольник Стирлинга:

- Числа Стирлинга первого и второго рода можно представить в виде треугольников, известных как треугольники Стирлинга. Каждое число в треугольнике Стирлинга вычисляется на основе предыдущих чисел в треугольнике с помощью рекуррентных формул.

Эти свойства чисел Стирлинга помогают в их анализе, вычислении и применении в комбинаторных задачах. Они играют важную роль в подсчете перестановок, разбиений, подмножеств и других комбинаторных объектов.

Числа Стирлинга находят применения в различных областях математики.Вот несколько примеров применения чисел Стирлинга в комбинаторике:

1. Подсчет перестановок с ограничением:

Числа Стирлинга первого рода (S(n, k)) используются для подсчета числа перестановок множества из n элементов с k циклами. Это может быть полезно, когда некоторые элементы должны оставаться на своих местах. Например, предположим, что у нас есть 5 различных книг, и мы хотим узнать, сколькими способами мы можем переставить эти книги так, чтобы ровно 2 книги остались на своих исходных местах. В этом случае мы можем использовать число Стирлинга первого рода S(5, 2) для подсчета количества таких перестановок.

2. Разбиения множества:

Числа Стирлинга второго рода (S(n, k)) применяются для подсчета числа разбиений множества из n элементов на k непересекающихся блоков. Это может быть полезно, когда мы хотим разбить множество на группы или классы. Например, предположим, что у нас есть 4 различных фильма, и мы хотим узнать, сколько различных способов мы можем разбить эти фильмы на 2 группы для вечеринки с двумя проекторами. В этом случае мы можем использовать число Стирлинга второго рода S(4, 2) для подсчета количества различных разбиений.

3. Вычисление коэффициентов в формуле произведения:

Числа Стирлинга первого рода (S(n, k)) могут быть использованы для вычисления коэффициентов в формуле произведения двух или более выражений. Например, если у нас есть выражение $(x + y + z)$^3, мы можем использовать числа Стирлинга первого рода S(3, k) для вычисления коэффициентов при каждом члене в произведении (например, коэффициенты 1, 3, 3, 1 в формуле (x^3 + 3$x^{2}y$ + 3xy^2 + y^3)).

Это только некоторые примеры применения чисел Стирлинга в комбинаторике. Они широко используются в различных комбинаторных задачах, таких как подсчет перестановок, разбиений, подмножеств, вычисление коэффициентов и т.д.

Заключение

Числа Стирлинга представляют собой важный инструмент в комбинаторике и находят широкое применение в различных областях, связанных с подсчетом перестановок, разбиений и вычислением коэффициентов. Их свойства и рекуррентные формулы облегчают вычисление этих чисел и позволяют решать сложные комбинаторные задачи.

Числа Стирлинга первого рода (S(n, k)) используются для подсчета перестановок с ограничениями, где некоторые элементы должны оставаться на своих местах. Они также могут быть использованы для вычисления коэффициентов в формуле произведения.

Числа Стирлинга второго рода (S(n, k)) применяются при разбиении множества на непересекающиеся блоки и нахождении числа различных разбиений.

Изучение и понимание свойств чисел Стирлинга играет важную роль в комбинаторике и связанных с ней областях, таких как теория графов, вероятность, теория кодирования и другие.

Дальнейшие исследования чисел Стирлинга могут включать расширение их применения в новых областях, разработку более эффективных алгоритмов вычисления и изучение дополнительных свойств этих чисел, которые могут привести к новым комбинаторным результатам и приложениям.

В целом, числа Стирлинга представляют собой мощный инструмент, который продолжает вносить существенный вклад в различные области комбинаторики и является объектом активного исследования для углубленного понимания и расширения их применений.

Список использованных источников:
1. Riordan, J. (1958). An Introduction to Combinatorial Analysis. Wiley.
2. Roman, S. (2005). The Umbral Calculus. Dover Publications.
3. Goulden, I.P., Jackson, D.M. (1983). Combinatorial Enumeration. Wiley.