УДК 511.75

32. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Герасенко К. П., Акулич Р. В. студенты гр.373901, Русина Н. В. аспирант

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники[1]
г. Минск, Республика Беларусь

Ефремов А.А. – канд. экон. наук, доцент каф. ЭИ

Аннотация. В работе описана суть распределения Пуассона, а также примеры его практического применения.

Ключевые слова. Распределение Пуассона, вероятность события, биноминальное распределение, нормальное распределение.

Распределение Пуассона было открыто и опубликовано в 1837 году французским математиком по имени Симеон Дени Пуассон. Пуассон разработал это распределение, используя свои исследования в области статистики и теории вероятностей.

Симеон Дени Пуассон изучал случайные процессы, такие как появление определенных видов событий в фиксированный промежуток времени. Его интересовали вопросы, связанные с оценкой вероятности того, что определенное количество событий произойдет за определенный период времени. Например, количество покупателей в магазине за определенный период времени, количество входящих звонков в центр телефонного обслуживания за час и т.д.

После проведения исследований Пуассон пришел к выводу, что число редких событий, происходящих в интервале времени или пространства, может быть описано распределением, которое впоследствии стало известно как "распределение Пуассона".

Это было значительное открытие в области математики и статистики, и с тех пор распределение Пуассона широко применяется в различных областях науки, бизнеса и инженерии для моделирования числа событий, а также для аппроксимации других распределений в различных прикладных областях.

Распределение Пуассона – это дискретное распределение вероятностей, которое используется для моделирования числа событий, происходящих за фиксированный период времени или в фиксированной области.

Распределение Пуассона формально задается формулой:

$$\mathrm{P(X = k)} = \frac{(\mathrm{e}^{-\lambda} * \lambda^{\mathrm{k}})}{\mathrm{k!}}$$

(1)

где P(X=k) - вероятность того, что событие произойдет k раз в фиксированном временном или пространственном интервале,
e - основание натурального логарифма (~2,71828),
λ - параметр интенсивности (среднее число событий за фиксированный интервал времени или пространственный интервал),
k - целочисленное количество событий.

Распределение Пуассона имеет несколько важных свойств, таких как то, что среднее и дисперсия распределения равны параметру λ, и то, что оно хорошо приближает биномиальное распределение с большим числом испытаний и малым успехом.

Также стоит помнить, что распределение Пуассона применимо лишь в определенных условиях, например, когда события происходят независимо друг от друга и время между событиями распределено экспоненциально.

Вот несколько примеров использования формулы распределения Пуассона для вычисления вероятности того, что случайное событие произойдет определенное количество раз за фиксированный интервал времени:

1. Вероятность количества звонков в колл-центре:

Предположим, что в среднем в колл-центре получается 5 звонков в минуту. Мы можем использовать формулу распределения Пуассона для вычисления вероятности получения, например, 3 звонков за минуту.

Решение данной задачи следующее:

Для вычисления вероятности получения трех звонков в минуту в колл-центре, используем формулу, описанную выше. Подставляем наши значения в формулу: λ (среднее число событий за фиксированный интервал времени) в нашем случае равно пяти, k (целочисленное количество событий за определенный период времени) равно трём, число e – основание натурального логарифма, равное ~2,71828.

Выполним подстановку и вычисления:

$$P(X = 3) = \frac{e - 5 * 53}{3!}$$

$$P(X = 3) = \frac{e - 5 * 125}{6}$$

$$P(X = 3) = \frac{0.006737947 * 125}{6}$$

$$P(X = 3) = 0.084218$$

Таким образом, вероятность получения 3 звонков за минуту в колл-центре при среднем количестве звонков в 5 составляет примерно 0.084 или 8.4%.

2. Вероятность того, что в ближайший час появится менее 15 посетителей в магазине, если в среднем появляется 20 посетителей за час.

Решение данной задачи следующее:

Данная задача может показаться сложнее предыдущей за счет того, что в условии указано неточное количество событий за определенный период времени, но решается она тем же способом. Для вычисления вероятности появления менее 15 посетителей в магазине в ближайший час, используем формулу распределения Пуассона:

$$P(X < 15) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 14)$$

Вычислим вероятность вышеуказанного условия. Мы должны поочередно вычислить вероятности для каждого значения k от 0 до 14 и сложить их:

$$P(X < 15) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 14)$$
$$P(X = k) = \frac{e - 20 * 20k}{k!}$$
$$P(X = 0) = \frac{e - 20 * 200}{0!} = \frac{1 * 1}{1} = 1$$
$$P(X = 1) = \frac{e - 20 * 201}{1!} = \frac{2.06115e - 09 * 20}{1} = 4.12230e - 08$$
$$P(X = 2) = \frac{e - 20 * 202}{2!} = \frac{2.06115e - 09 * 400}{2} = 8.24460e - 07$$

Повторяя этот процесс для всех оставшихся значений k до 14 (включительно), а затем просуммировав полученные значения, мы найдем вероятность появления менее 15 посетителей в магазине в ближайший час.

$$P(X < 15) = \sum_{k=0}^{15} \frac{e^{-20} \times 20^k}{k!}$$
$$P(X < 15) = 0.1865$$

Итак, вероятность того, что в магазине в ближайший час появится менее 15 посетителей, составит приблизительно 18.65%.

Когда дело доходит до обработки редких событий, существует множество распределений вероятностей, которые можно использовать для моделирования возникновения таких событий. К ним относятся распределение Пуассона, биномиальное распределение и нормальное распределение. Каждое из этих распределений обладает своими уникальными характеристиками, которые делают его лучше подходящим для определенных типов проблем. Мы сравним распределение Пуассона с этими другими распределениями вероятностей, чтобы лучше понять, когда и почему мы можем использовать распределение Пуассона.

1 Распределение Пуассона по биномиальному распределению. Распределение Пуассона часто используется для моделирования редких событий, которые происходят в непрерывные или бесконечные временные рамки, в то время как биномиальное распределение используется для моделирования редких событий, которые происходят в дискретные временные рамки. Например, если мы были заинтересованы в моделировании количества клиентов, которые прибывают в магазин за час, мы могли бы использовать распределение Пуассона. С другой стороны, если бы мы были заинтересованы в моделировании количества клиентов, которые покупают определенный продукт из фиксированного числа клиентов, мы могли бы использовать биномиальное распределение.

2 Распределение Пуассона по нормальному распределению. Нормальное распределение часто используется для моделирования непрерывных переменных, которые не являются редкими событиями, такими как высота или веса. Распределение Пуассона, с другой стороны, используется для моделирования редких событий, которые происходят в непрерывные временные рамки. Хотя нормальное распределение является симметричным, распределение Пуассона искажено вправо. Это связано с тем, что распределение Пуассона приобретает только неотрицательные целочисленные значения, в то время как нормальное распределение может принять какое-либо реальное значение.

Таким образом, хотя существует несколько распределений вероятностей, которые можно использовать для моделирования редких событий, распределение Пуассона часто является наиболее подходящим выбором, когда события происходят в непрерывные или бесконечные временные рамки и соответствуют необходимым предположениям.

Также для наглядности можно сравнить распределение Пуассона с более распространенной теорией, а именно теорией вероятности. Стоит отметить, что распределение Пуассона и теория вероятности являются основополагающими концепциями в статистике и математике, а также широко используемыми для описания случайных событий. Теория вероятности изучает вероятность того, что определенное событие произойдет в конкретных условиях. Эта теория позволяет оценить вероятность возможных исходов случайных событий и разработать стратегии принятия решений на основе этих данных. Данные вероятностные методы помогают во многих сферах, например, при диагностике заболеваний, прогнозировании исходов лечения, анализе угроз кибербезопасности, оценке вероятности возникновения атаки и разработке мер по защите информации. Распределение Пуассона, в свою очередь, представляет собой дискретное вероятностное распределение, описывающее количество событий, происходящих в фиксированный промежуток времени или пространства, при условии, что эти события происходят независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью. Распределение Пуассона часто используется для моделирования разного рода случайных событий, таких как количество звонков в страховую компанию за определенный промежуток времени или количество аварий на дорогах за день.

Отличие между теорией вероятности и распределением Пуассона заключается в том, что первая изучает общие законы случайных событий и вероятность их возникновения, в то время как второе представляет собой конкретное математическое распределение, описывающее определенный тип случайных событий.

Распределение Пуассона имеет множество практических применений в различных областях, включая статистику, биологию, инженерию, экономику, социологию и другие. Например, распределение Пуассона используется в телефонии и связи: Телекоммуникационные и сотовые компании используют распределение Пуассона для моделирования количества звонков, поступающих на станцию за определенное время. Это помогает им прогнозировать нагрузку на сеть и управлять ресурсами.

Также хорошим примером являются финансы и страхование: в финансовой отрасли распределение Пуассона может использоваться для моделирования числа страховых случаев, возникающих за определенный период времени, что помогает страховым компаниям прогнозировать потребности в резервировании капитала.

В области инженерии распределение Пуассона может использоваться для моделирования отказов оборудования, появления дефектов и других случайных событий, что помогает инженерам и менеджерам принимать решения по обслуживанию и обслуживанию оборудования.

В биоинформатике и геномике распределение Пуассона может использоваться для анализа частоты мутаций в геноме или для моделирования числа случайных мутаций в отдельных клетках или организмах.

В экологии распределение Пуассона может применяться для моделирования распределения числа животных в определенной местности или для анализа числа поеданий растений, совершаемых хищниками. Это лишь несколько примеров применения распределения Пуассона в различных областях, и его возможности применения далеко не ограничиваются перечисленными сферами.

Список использованных источников:

1. Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Гостехтеориздат, 1954.
2. Н.Ш. Кремер «Теория вероятностей и математическая статистика»: Учеб. пособие. М., 2004
3. Ивашев-Мусатов О.С. Теория вероятностей и математическая статистика., М.: Наука, 1979.