УДК 519.1

25. РАСКРАСКА И ПЛАНАРНОСТЬ ГРАФА

Цимбровская В. Я., Барадулькина А.С., студенты гр. 373904, Русина Н. В., аспирант

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Ефремов А.А. – канд. экон. наук, доцент каф. ЭИ

Аннотация: Цель исследования заключается в изучении теоретических свойств раскраски и планарности графов, разработке эффективных алгоритмов и применении этих концепций в различных практических областях.

Ключевые слова: Граф, планарность, раскраска графа, хроматическое число графа.

В конце XVIII и начале XIX веков, математики Леонард Эйлер и Августин Луи Коши разработали основы теории графов, изучая проблему семейных связей в Кенигсберге. Это положило начало формализации графов и развитию теории графов как математической дисциплины. Далее с развитием компьютерных наук и программирования возникла потребность в моделировании и анализе сложных систем и связей. Графы оказались очень полезным инструментом для представления и работы с такими системами. Также графы нашли широкое применение в различных областях, таких как транспортная логистика, сети связи, социальные сети, биология и другие. Потребность в моделировании и анализе сложных систем привела к развитию и применению графовых структур и алгоритмов.

Граф – это любое конечное множество точек (вершин), некоторые из которых соединены попарно стрелками (Рисунок 1) [1]. Например, граф может изображать сеть улиц в городе, вершины графа – перекрёстки, стрелками обозначены улицы с разрешённым направлением движения.

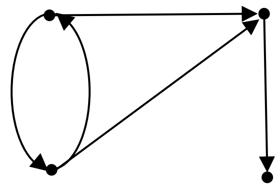

Рисунок 1 – Пример графа

Граф укладывается на некоторой поверхности, если его диаграмму можно нарисовать на этой поверхности без пересечения ребер.

Теорема об укладке графа в трехмерном пространстве: всякий граф может быть уложен в трехмерном пространстве.

Доказательство. Расположим все вершины графа на одной прямой. Через эту прямую проходит бесконечное число различных плоскостей, так что, если расположить все ребра графа в различных плоскостях, они не будут пересекаться.

Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости.

Граф называется *плоским*, если он уложен на плоскости.

Область, ограниченная ребрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и ребер, называется *гранью*. Число ребер плоского графа G обозначается r(G). Внешняя часть плоскости также образует грань. Неограниченная грань называется внешней, ограниченные – внутренними.

Важно отметить, что планарность графа зависит от способа его изображения на плоскости. То есть, один и тот же граф может быть планарным или непланарным в зависимости от выбранного способа его изображения.

Графы называются *гомеоморфными*, если графы, полученные из них включением вершин в ребро и удалением вершин степени 2, изоморфны. (Рисунок 2)

Рисунок 2 – Гомеоморфные графы

Теорема Понтрягина-Куратовского является основным результатом в теории планарности графов. Она утверждает, что граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам K_5 (полный граф на 5 вершинах) или $K_{3,3}$ (граф, состоящий из двух непересекающихся треугольников, каждый из которых имеет три вершины).

Доказательство от противного. В графе K_5 $p = 5$, $q = 10$. Если K_5 планарен, то по следствию из предыдущей теоремы $q \le 3p - 6 \Rightarrow 10 \le 9$. Противоречие. В графе $K_{3,3}$ $p = 6$, $q = 9$. В этом графе нет треугольников, значит, если он планарен, то в его плоской укладке каждая грань ограничена по меньшей мере четырьмя ребрами и, следовательно, $4r \le 2q$. По формуле Эйлера $6 - 9 + r = 2$, откуда $r = 5$. Имеем $4r = 20 \le 2q = 18$. Противоречие.[2].

Для проверки планарности графа существуют различные алгоритмы, такие как алгоритмы визуализации графов и алгоритмы поиска подграфов K_5 и $K_{3,3}$ в заданном графе. Эти алгоритмы позволяют определить, является ли граф планарным или непланарным.

Планарные графы имеют важное применение в различных областях, таких как сетевой дизайн, телекоммуникации, компьютерная графика, графовые базы данных и другие, где требуется визуализация и анализ связей и отношений между объектами.

Планарность графа тесно связана с его раскраской.

Раскраска графа — это присвоение каждой вершине графа определенного цвета таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинакового цвета.

Связь между планарностью и раскраской графа выражается в так называемой теореме четырех красок. Эта теорема утверждает, что любой планарный граф может быть раскрашен с помощью не более четырех цветов так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинакового цвета.

Она возникла в связи с раскрашиванием географических карт и заключается в следующем: карту нужно раскрасить, используя только четыре цвета, так, чтобы любые две граничащие страны были раскрашены разными цветами. Известно, что для раскрашивания карты пяти красок достаточно, а трех – нет. Для карты, нанесенной на тор, минимальное количество красок было определено, но проблема четырех красок оставалась нерешенной. На сегодняшний день она решена, но, возможно, не самым лучшим способом. Решение потребовало длительной проверки компьютером огромного числа случаев, которые иначе проанализировать не удавалось. Хотя сам по себе метод является выдающимся достижением и вполне достаточен, чтобы прекратить поиски контрпримера, было бы неплохо, если бы кому-то удалось найти более элегантное доказательство гипотезы. Самое замечательное в этом доказательстве – то, что оно расширило наше представление о математическом доказательстве [3]. На практике удобнее работать с двойственным графом G' планарного графа G, который формируется путем замены граней (или стран) вершинами и соединения их ребрами, если грани в исходном графе смежные. Следовательно, в двойственном графе G' вершины являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие грани являются смежными в исходном графе G. Таким образом, двойственным к графу G, изображенному на рисунке 3, будет граф, изображенный на рисунке 4. Внешняя грань будет включаться как вершина в том случае, если она раскрашена.

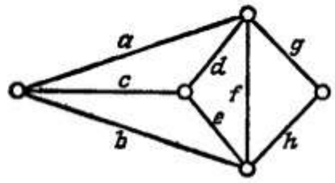

Рисунок 3 – Пример двойственности графа

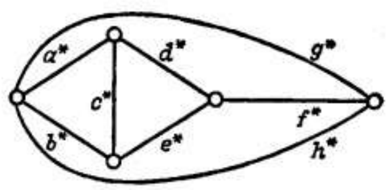

Рисунок 4 – Пример двойственности графа

Определение. Пусть G – граф. Раскраской графа G называется окрашивание вершин графа G такое, что никакие две смежные вершины не имеют один цвет. Пусть $C_G(\lambda)$ обозначает количество способов раскраски графа G с использованием λ цветов, так что никакие две смежные вершины не имеют один цвет, т.е. C_G (λ) – количество способов раскраски графа G. Для фиксированного графа G функция $C_G(\lambda)$ является полиномиальной функцией от λ, называемой хроматическим многочленом графа G. Хроматическое число графа – это наименьшее число цветов, которое используется для раскраски графа. Это наименьшее положительное число n такое, что $C_G(n) \neq 0$.

Последовательный алгоритм. Определим хроматическое число и раскраску графа изображенного на рис. 5.

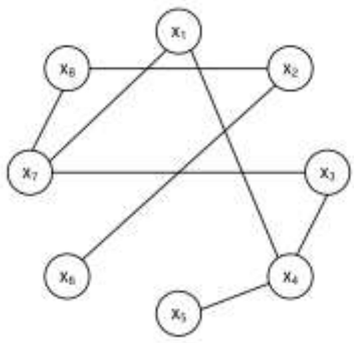

Рисунок 5 – Граф G

Воспользуемся последовательным алгоритмом раскраски графа [4]:

1 Подсчитываем локальные степени вершин графа G и составляем список вершин в порядке убывания их локальных степеней:

$\rho(X_i)$	3	3	3	2	2	2	2	1
X_i	4	7	8	1	2	3	5	6

2 Выбираем из списка вершину x_4: $П_1 = \{x_4\}$.

3 Просматриваем список на предмет нахождения несмежных вершин. Выбираем ближайшую несмежную вершину. Это вершина x_7: $П_1 = \{x_4, x_7\}$.

4 Продолжаем процесс просмотра. Выбираем вершину x_2 - несмежную вершинам x_4 и x_7, включенным в подмножество $П_1$. Теперь $П_1 = \{x_4, x_7, x_2\}$.

5 Просматриваем список дальше, и, так как в списке больше нет вершин, несмежных вершинам подмножества $П_1$, окрашиваем вершины этого подмножества в первый цвет и удаляем их из списка. После удаления список примет вид:

$\rho(X_i)$	3	2	2	2	1
X_i	8	1	3	5	6

6 Выбираем вершину x_8: $П_2 = \{x_8\}$.

7 Выбираем вершину x_1: $П_2 = \{x_8, x_1\}$.

8 Выбираем вершину x_3: $П_2 = \{x_8, x_1, x_3\}$.

9 Выбираем вершину x_6: $П_2 = \{x_8, x_1, x_3, x_6\}$.

10 В списке нет больше вершин, несмежных вершинам подмножества П2. Окрашиваем вершины этого подмножества во второй цвет и удаляем их из списка.

11 В списке остается только одна вершина – x_5. Эта вершина окрашивается в третий цвет.

Таким образом, для раскраски графа нам потребовались три краски, следовательно, хроматическое число: $\chi(G) = 3$. Алгоритм реализует жадную стратегию. Существуют различные эвристические подходы [4]. Однако с увеличением размерности задачи их эффективность в плане качества решения значительно ухудшается.

Список использованных источников:

1. Книга Теория графов (В.В. Белов, Е.М. Воробьев, В.Е. Шаталов) - большая электронная библиотека (reallib.org)
2. Планарность графов [Электронный ресурс] Режим доступа: (graph_lec_09.pdf (tpu.ru))
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Изд-во «Мир», 1978.
4. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Дискретная математика: Теория графов –- Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 162 с.
5. Соколова А. А. Раскраска графов //Математика, информатика: алгебра, математическая логика и дискретная математика. – 2015. – С. 54.
6. Курейчик В. М., Кажаров А. А. Применение пчелиного алгоритма для раскраски графов //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2010. – Т. 113. – №. 12. – С. 30-36.