УДК 004.421

26. ПРИЛОЖЕНИЯ КАРТЫ КАРНО В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Бранковская А. Е., Кравцова А. Б., студенты гр.373901, Русина Н. В., аспирант

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники[1]
г. Минск, Республика Беларусь

Ефремов А.А. – канд. экон. наук, доцент каф. ЭИ

Аннотация. Данная научная работа сосредоточена на метода карт Карно в контексте дискретной математики. В работе проводится анализ построения карт Карно, понимание принципов работы и использование из в современных технологиях, используемых для решения задач, основанных на дискретной математике.

Ключевые слова. Карта Карно, булева функция, логическая схема, КНФ, ДНФ, минимизация булевых функций, код Грея.

Карта Карно представляет собой графическую методику, которая облегчает минимизацию переключательных (булевых) функций, упрощает работу с большими выражениями. Это включает в себя операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Карты Карно можно рассматривать как перестроенную таблицу истинности функции или как плоскую развертку n-мерного булева куба. Этот метод был изобретен в 1952 году Эдвардом В. Вейчем и доработан в 1953 году Морисом Карно, физиком из «Bell Labs», с целью упрощения цифровых электронных схем. В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, где каждое последующее число отличается от предыдущего только на один разряд. [1]

Карта Карно — это таблица истинности, представленная в виде матрицы в 2-мерном виде. Каждая клетка этой карты соответствует одной строке в классической таблице истинности и обозначается строкой переменных с инверсиями и без инверсий. Например, пусть в таблице истинности для функции 4 переменных $x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,}\ x_4$, одна из строк имеет вид: 0 1 1 0 **|** 1, тогда клетка в карте Карно, которая соответствует этой строке, будет иметь имя $\neg x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,}, \neg x_4$, и в этой клетке ставится 1. Указание имён клеток выполняется дополнительной строкой сверху и столбцом слева.

Поскольку перестановка переменных в логической функции не изменяет саму функцию, то есть, например, $F\left(x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,}\ x_4\right) = F(x_{4,}\ x_{2,}\ x_{3,}\ x_1)$ или, что то же самое, — перестановка столбцов переменных в таблице истинности не изменяет функцию. Существует несколько способов отображения таблицы истинности на карту Карно, сохраняя «соседство» ячеек. Однако на практике наиболее часто карту Карно заполняют, используя возрастающий код Грея для обозначения строк и столбцов. Этот подход гарантирует создание карты Карно, избегая субъективных ошибок. При заполнении карты Карно, на пересечении строки и столбца указывается соответствующее значение из таблицы истинности — 0 или 1. После того как карта заполнена, начинается процесс минимизации. Для полного понимания последующих действий рассмотрим принципы минимизации. Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде СДНФ или СКНФ, является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания проводится между двумя термами, которые содержат одинаковые переменные, вхождения которых (прямые и инверсные) совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, а прямое и инверсное вхождение одной переменной, оставшиеся в скобках, подвергаются поглощению.

Например:

$$\boldsymbol{\overline{X}_1 X_2 X_3 X_4 \vee \overline{X}_1 X_2 \overline{X}_3 X_4 = \overline{X}_1 X_2 X_4 \left(X_3 \vee \overline{X}_3\right) = \overline{X}_1 X_2 X_4 \cdot 1 = \overline{X}_1 X_2 X_4 .}$$

Аналогично для КНФ:

$$\boldsymbol{\left(\overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4\right)\left(\overline{X}_1 \vee X_2 \vee \overline{X}_3 \vee X_4\right) = \overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_4 \vee X_3\overline{X}_3 = \overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_4 \vee 0 = \overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_4}$$

Возможность поглощения следует из очевидных равенств:

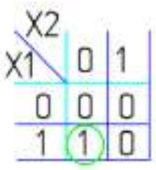
$\boldsymbol{A \vee \overline{A} = 1;\ A\overline{A} = 0.}$

Основной целью при минимизации СДНФ и СКНФ является поиск термов, подходящих для склейки с последующим поглощением. Это может быть сложной задачей для функций с большим количеством логических переменных. Карты Карно предлагают наглядный метод поиска таких термов. Если требуется получить минимальную ДНФ, то на карте Карно рассматриваются только те ячейки, которые содержат единицы. Если требуется КНФ, то рассматриваются ячейки, содержащие нули. Минимизация производится по следующим правилам (на примере ДНФ) [2]:

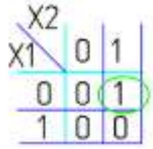
1. Объединяем смежные клетки, содержащие единицы, в область так, чтобы одна область содержала 2^n (n целое число = $0\ldots\infty$) клеток (помним про то, что крайние строки и столбцы являются соседними между собой), в области не должно находиться клеток, содержащих нули;
2. Область должна располагаться симметрично оси(ей) (оси располагаются через каждые четыре клетки);
3. Несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну;
4. Область должна быть как можно больше, а количество областей как можно меньше;
5. Области могут пересекаться;
6. Возможно несколько вариантов покрытия.

Затем мы берем первую область и анализируем, какие переменные остаются неизменными в пределах этой области. Записываем конъюнкцию этих переменных; если неизменная переменная равна нулю, мы ставим над ней инверсию. Затем мы переходим к следующей области и выполняем те же действия, что и для первой, и так далее для всех областей. Конъюнкции областей объединяются с помощью дизъюнкции.

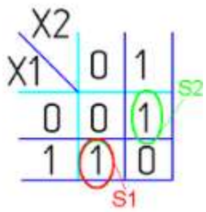
Например (для Карт на 2 переменные):



$X_1 \overline{X_2}$



$\overline{X_1} X_2$



$\boldsymbol{S1} \vee \boldsymbol{S2} = \boldsymbol{X_1}\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}} \vee \overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X_2}$

Для КНФ всё то же самое, только рассматриваем клетки с нулями, неменяющиеся переменные в пределах одной области объединяем в дизъюнкции (инверсии проставляем над единичными переменными), а дизъюнкции областей объединяем в конъюнкцию.

Для более наглядного понимания рассмотрим следующий пример. Допустим, есть четыре сотрудника в команде: А, Б, В и Г. Сотрудник может выйти на обеденный перерыв только в том случае, если хотя бы двое из его коллег разрешат ему это.

Для удобства обозначим сотрудников следующим образом: сотрудник А — X1 сотрудник Б — X2 сотрудник В — X3 сотрудник Г — X4

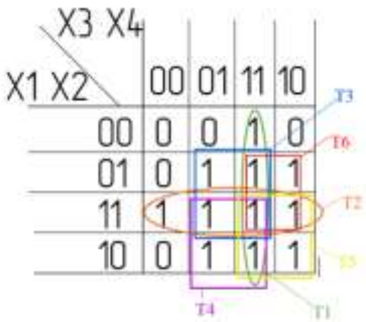
Согласие коллег будем обозначать единицей, а несогласие — нулём. Возможность сотрудника пойти на обеденный перерыв обозначим буквой f, где f = 1 означает, что сотрудник идёт на обед, а f = 0 означает, что сотрудник продолжает работать. Теперь мы можем составить таблицу истинности для этого сценария.

X1 X2 \ X3 X4	00	01	10	11
00				
01				
10				
11				

Заполним её значениями из таблицы истинности (первая строка не соответствует таблице истинности, так как f=0 и продолжение работы нет):

X1 X2 \ X3 X4	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

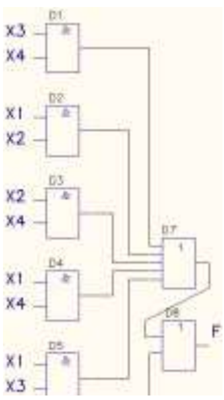
Минимизируем в соответствии с правилами [3]:



1. Все области содержат 2^n клеток;
2. Так как Карта Карно на четыре переменные, оси располагаются на границах Карты и их не видно;
3. Так как Карта Карно на четыре переменные, все области симметрично осей — смежные между собой);
4. Области Т3, Т4, Т5, Т6 максимально большие;
5. Все области пересекаются (необязательное условие);
6. В данном случае рациональный вариант только один

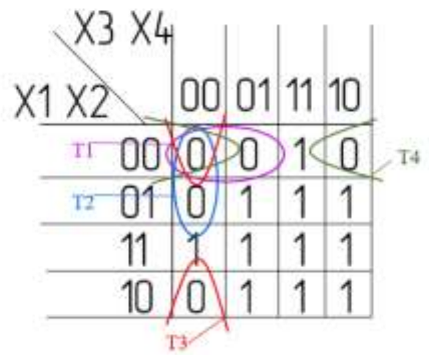
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X1}, \boldsymbol{X2}, \boldsymbol{X3}, \boldsymbol{X4}) = \boldsymbol{T1} \vee \boldsymbol{T2} \vee \boldsymbol{T3} \vee \boldsymbol{T4} \vee \boldsymbol{T5} \vee \boldsymbol{T6} = \boldsymbol{X3X4} \vee \boldsymbol{X1X2} \vee \boldsymbol{X2X4} \vee \boldsymbol{X1X4} \vee \boldsymbol{X1X3} \vee \boldsymbol{X2X3}$$

Теперь по полученной минимальной ДНФ можно построить логическую схему:

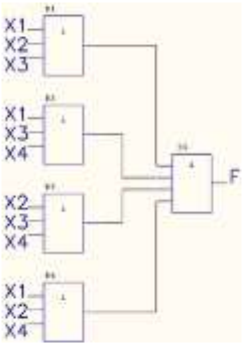


В связи с отсутствием в наличии шестивходового элемента ИЛИ, который бы реализовывал функцию дизъюнкции, необходимо было каскадировать пятивходовый и двухвходовый элементов (D7, D8).

Составим мин. КНФ:



$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X1}, \boldsymbol{X2}, \boldsymbol{X3}, \boldsymbol{X4}) = (\boldsymbol{T1})\,(\boldsymbol{T2})\,(\boldsymbol{T3}) = (\boldsymbol{X1} \vee \boldsymbol{X2} \vee \boldsymbol{X3})(\boldsymbol{X1} \vee \boldsymbol{X3} \vee \boldsymbol{X4})(\boldsymbol{X2} \vee \boldsymbol{X3} \vee \boldsymbol{X4})(\boldsymbol{X1} \vee \boldsymbol{X2} \vee \boldsymbol{X4})$$



Применение метода построения карт Карно в современных технологиях является ключевым аспектом в различных областях индустрии. Этот метод находит применение в электронике и электротехнике для упрощения сложных логических схем, содержащих множество цифровых элементов. Карты Карно помогают инженерам и разработчикам эффективно проектировать цифровые системы, выявлять логические зависимости и оптимизировать работу устройств.

В области систем автоматического контроля и управления метод карт Карно применяется для анализа и оптимизации функционирования логических схем. Этот метод способствует выявлению возможных улучшений в системах автоматизации, сокращению расходов на ресурсы и повышению эффективности управления.

Также, карты Карно используются в области защиты информации для обеспечения безопасности и защиты данных от несанкционированного доступа, что позволяет улучшить методы шифрования и разработать более надежные криптографические алгоритмы.

В управлении электроприводами и роботизированными комплексами карты Карно помогают оптимизировать работу электронных устройств, улучшить производительность и надежность систем, а также снизить энергопотребление.

В телевидении и радиовещании метод карт Карно применяется для аналитического исследования, что помогает улучшить работу технических систем, повысить качество передачи сигналов и эффективность радио- и телевизионных сетей.

Применение в современной технологии: несмотря на появление более современных методов синтеза цифровых схем, карты Карно до сих пор широко используются в образовательных целях и для решения простых задач. Они являются основой для понимания более сложных методов оптимизации цифровых схем и алгоритмов. Карты Карно играют важную роль в обучении студентов основам цифровой логики и теории информации. Они также используются в индустрии для проектирования и анализа цифровых схем. [5]

Список использованных источников:

1. *Электронный ресурс: Карта Карно– Википедия (wikipedia.org)*
2. *Электронный ресурс: https://habr.com/ru/articles/93296/*
3. *Электронный ресурс: https://uofa.ru/reshenie-kart-karno-onlain-kalkulyator-pravila-minimizacii-s/.*
4. *Электронный ресурс: https://www.bsuir.by/m/12_100229_1_90178.pdf?ysclid=luv5tyvvla501786739.*
5. *Электронный ресурс: https://electrosam.ru/glavnaja/jelektrotehnika/raschjoty/karty-karno/.*