Посвящается памяти профессора-геометра
Ивана Петровича Егорова

О ЛАКУНАХ В ПОРЯДКАХ ПОЛНЫХ ГРУПП ИЗОМЕТРИЙ И ГОМОТЕТИЙ В СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И МЕТРИКИ САМЫХ ПОДВИЖНЫХ ЭТИХ ПРОСТРАНСТВ ПЕРВЫХ ШЕСТИ ЛАКУНАРНОСТЕЙ

З. Н. ЧЕТЫРКИНА

Поступила в редакцию 20.10.2023

Аннотация. Рассмотрены метрические римановы пространства $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$, в метриках которых работают сразу четыре алгебраические структуры: вещественные D_{m_1} и комплексные C_{m_2} числа, кватернионы H_{m_3} и октионы O_{m_4}. Эти пространства интересны с точки зрения их изометрической и гомотетической подвижности. Оказывается, что в порядках r полных групп изометрий G_r и гомотетий P_r имеются лакуны (пропуски). Найдены метрики самых подвижных пространств $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ первых шести лакунарностей в смысле И. П. Егорова.

Ключевые слова: группы изометрий и гомотетий, лакуны, пространства лакунарности в смысле И. П. Егорова.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Четыркина, З. Н. О лакунах в порядках полных групп изометрий и гомотетий в специализированных римановых пространствах и метрики самых подвижных этих пространств первых шести лакунарностей / З. Н. Четыркина // Доклады БГУИР. 2024. Т. 22, № 3. С. 106–111.

ON GAPS IN THE ORDERS OF COMPLETE GROUPS OF ISOMETRY AND HOMOTETIES IN SPECIALIZED RIEMANNIAN SPACES AND METRICS OF THE MOST MOBILE OF THESE SPACES OF THE FIRST SIX LACUNARS

ZINAIDA N. CHETYRKINA

Submitted 20.10.2023

Abstract. In the present paper there are considered metric Riemannian spaces $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$, in the metrics of which four algebraic structures work at once: real numbers D_{m_1} and complex numbers C_{m_2}, quaternions H_{m_3} and octions O_{m_4}. We are interested in these spaces in terms of their isometric and homothetic mobility. It turns out that there are lacunas (gaps) in the orders r of complete groups of isometries G_r and homotheties P_r. The metrics of the most mobile spaces $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ of the first six lacunarities in the sense of I. P. Egorov are found.

Keywords: groups of isometries and homotheties, lacunae, spaces of lacunarity in the sense of I. P. Egorov.

Conflict of interests. The author declares no conflict of interests.

For citation. Chetyrkina Z. N. (2024). On Gaps in the Orders of Complete Groups of Isometry and Homoteties in Specialized Riemannian Spaces and Metrics of the Most Mobile of These Spaces of the First Six Lacunars. *Doklady BGUIR*. 22 (3), 106–111 (in Russian).

Введение

В [1] подробно описано, как в метрику псевдоевклидова пространства E_n вводятся сразу четыре алгебраические структуры: вещественные числа D_{m_1}, комплексные числа C_{m_2}, кватернионы H_{m_3} и октионы O_{m_4} (m_i – размерность действия соответствующей алгебры в касательном пространстве рассматриваемого метрического пространства) [2]. Рассмотрим псевдоевклидово пространство с нормой:

$$ds^2 = e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_n(dx^n)^2,\ e_1 = \pm 1,\ i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

После введения перечисленных структур метрика (1) принимает вид

$$ds^2 = e_{11}(dx^1)^2 + \ldots + e_{1m_1}(dx^{m_1})^2 + e_{21}dz^1dz^{1*} + \ldots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + e_{31}dk^1dk^{1*} + \ldots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} +$$
$$+\ e_{41}do^1do^{1*} + \ldots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*},\ e_{\alpha i} = \pm 1,\ \alpha = \overline{1,4},\ i = \overline{1,m_\alpha}, \tag{2}$$

где «*» – операция сопряжения в соответствующей алгебре.

Для сокращения дальнейших расчетов введем следующие обозначения:

$$d\tilde{s}^2 = e_{21}dz^1dz^{1*} + \ldots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + e_{31}dk^1dk^{1*} + \ldots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} +$$
$$+\ e_{41}do^1do^{1*} + \ldots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*}; \tag{3}$$

$$ds_{m_1}^2 = e_{11}(dx^1)^2 + \ldots + e_{1m_1}(dx^{m_1})^2. \tag{4}$$

Тогда метрика (2) запишется в кратком виде

$$ds^2 = ds_{m_1}^2 + d\tilde{s}^2. \tag{2$'$}$$

В [1] предложен порядок полной группы изометрий G_r, сохраняющий всю сложную алгебраическую структуру в метрике (2):

$$r_{1\max} = \frac{1}{2}m_1(m_1+1) + m_2(m_2+1) + \frac{7}{2}m_3(m_3+1) + 11m_4(m_4+1). \tag{5}$$

Оператор гомотетии $Y = x^1p_1 + x^2p_2 + \ldots + x^np_n,\ p_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i},\ i = \overline{1,n},$ для метрики (1) работает и для (2). Поэтому порядок полной группы гомотетий для метрики (2) будет на единицу больше, чем у группы изометрий.

Методика проведения эксперимента

В геометрической школе И. П. Егорова при изучении лакунарностей (пропусков) в порядках полных групп движений в римановых пространствах V_n обнаружены пять первых лакун при больших значениях n [3–5]. Продолжая традиции школы И. П. Егорова, автор статьи решила рассмотреть такие вопросы, как: имеются ли лакуны в порядках полных групп изометрических и гомотетических движений в специализированных римановых пространствах $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ с введенными в их метрику четырьмя алгебраическими структурами $D_{m_1}, C_{m_2}, H_{m_3}, O_{m_4}$; и если лакуны есть, то каковы они и метрики рассматриваемых пространств с допустимыми группами? Приступая к решению этих вопросов, следует заметить, что в специализированных римановых пространствах всегда действуют операторы групп G_r и P_r, выражаемые в вещественной алгебре, а сложная алгебраическая структура метрики находится только в касательном пространстве, и в нем нет операторов изометрии, перемешивающих «лепестки» с «тычинками» [1, 2]. Поэтому картина лакунарности в порядках полных групп G_r и P_r в $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ (где $n = m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4$) зависит лишь от величины m_1, т. е. от размерности действия в метрике специализированного пространства вещественной алгебры. Необходимо, чтобы слагаемое $d\tilde{s}^2$ (3) в метрике рассматриваемого пространства всегда оставалось неизменным, а с лакунарностью может меняться вид метрики $ds_{m_1}^2$.

В связи с этим можно воспользоваться результатами школы И. П. Егорова [3–5]. Для сокращения дальнейших расчетов введем обозначение

$$N_* = m_2\left(m_2+1\right)+\frac{7}{2}m_3\left(m_3+1\right)+11m_4\left(m_4+1\right). \tag{6}$$

Тогда для полных групп $G_{r1\max}$ и $P_{r1\max}$ метрики (2) имеем соответственно:

$$r_{1\max}=\frac{1}{2}m_1\left(m_1+1\right)+N_*; \tag{7}$$

$$r_{1\max}=\frac{1}{2}m_1\left(m_1+1\right)+1+N_*. \tag{8}$$

Пространства $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ с метрикой (2), согласно терминологии И. П. Егорова, назовем пространствами первой лакунарности в изометрическом и гомотетическом смыслах, поскольку порядки групп движений этих смыслов в таких пространствах предшествуют первым лакунам (пропускам). Первая лакуна – первый интервал запрещенных порядков – для полных групп G_r в $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ имеет вид [3]:

$$r_{2\max}<r<r_{1\max}, \tag{9}$$

где $r_{2\max}=\frac{1}{2}m_1\left(m_1-1\right)+1+N_*$.

С учетом [4] вторая лакуна для полных групп G_r в $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ такова:

$$r_{3\max}<r<r_{2\max}-1, \tag{10}$$

где $r_{3\max}$ – третий максимальный порядок для групп G_r в $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ после второй лакуны, $r_{3\max}=$ $=\frac{1}{2}\left(m_1-2\right)\left(m_1-1\right)+5+N_*$.

Следует заметить, что картина лакунарности в порядках полных групп G_r и P_r в знакоположительных метрических пространствах легко усматривается из самых подвижных метрик с группами движений G_r:

– для первой лакунарности:

$$ds=\left(dx^{1^2}+dx^{2^2}+\ldots+dx^{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ r=\frac{1}{2}n\left(n+1\right); \tag{11}$$

– для второй лакунарности:

$$ds=\left((dx^1)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left((dx^2)^2+\ldots+(dx^n)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ r=\frac{1}{2}n\left(n-1\right)+1; \tag{12}$$

– для третьей лакунарности:

$$ds=\left((dx^1)^2+(dx^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left((dx^3)^2+\ldots+(dx^n)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ r=\frac{1}{2}\left(n-1\right)\left(n-2\right)+3; \tag{13}$$

– для четвертой лакунарности:

$$ds=\left((dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left((dx^4)^2+\ldots+(dx^n)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ r=\frac{1}{2}\left(n-2\right)\left(n-3\right)+6; \tag{14}$$

– для пятой лакунарности:

$$ds=\left((dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left((dx^5)^2+\ldots+(dx^n)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ r=\frac{1}{2}\left(n-4\right)\left(n-3\right)+10. \tag{15}$$

И так далее.

Но для знаконеопределенных метрик римановых пространств лакунарная картина меняется, потому что для ds начинает работать уже комплексная алгебра. И. П. Егоров заметил это первый, он же первый отметил, что теория лакун для порядков групп изометрий и гомотетий в римановых пространствах V_n работает при $n \geq 4$. Действительно, при $n = 4$ для группы G_r имеем $r_{1\max} = 10$ и $r_{2\max} = 7$, а для группы P_r имеем $r_{1\max} = 11$ и $r_{2\max} = 8$. А у Л. И. Егоровой [6] нашлась метрика V_4, допускающая группы $G_{r2\max} = 8$ и $P_{r2\max} = 9$:

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + 2dx^3dx^2 + (x^4)^2(dx^2)^2. \tag{16}$$

Метрика (16) вписывается в рассматриваемую метрику пространства $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ с полными группами $G_{r_{3\max}}$ и $P_{r_{3\max}}$:

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + (x^4)^2(dx^2)^2 + e_5(dx^5)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2. \tag{17}$$

В (17) дополнительные операторы изометрии – $X_{\alpha 1} = e_\alpha x^\alpha p_1 - x^4 p_\alpha$, $X_{\alpha 2} = e_\alpha x^\alpha p_3 - x^2 p_\alpha$, $\alpha = \overline{5, m_1}$, а оператор гомотетии – $Y = 3x^1p_1 + x^2p_2 + 3x^3p_3 + x^4p_4 + 2\left(x^5p_5 + \ldots + x^np_n\right)$ [6–9].

Заменив в (17) слагаемое $e_5(dx^5)^2$ на $e^{2x^5}e_5(dx^5)^2$ (последнее имеет оператор изометрии $X = p_5 / e^{x^5}$), получим метрику пространства $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ с группами изометрий $G_{r4\max}$ и гомотетий $P_{r4\max}$:

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + (x^4)^2(dx^2)^2 + e^{2x^5}e_5(dx^5)^2 + e_6(dx^6)^2 + \ldots + e_{m1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2. \tag{18}$$

В (18) оператор гомотетии – $Y = 3x^1p_1 + x^2p_2 + 3x^3p_3 + x^4p_4 + 2\left(p_5 + x^6p_6 + \ldots + x^np_n\right)$, для группы изометрий – $r_{4\max} = \frac{1}{2}\left(m_1 - 3\right)\left(m_1 - 2\right) + 6 + N_*$.

Рассмотрим метрику пространства $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + (x^4)^2(dx^2)^2 + 2dx^5dx^8 + 2dx^6dx^7 + (x^8)^2(dx^6)^2 + \\ + e_9(dx^9)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2. \tag{19}$$

В (19) две егоровские метрики (16) для переменных (x^1, x^2, x^3, x^4) и (x^5, x^6, x^7, x^8) допускают 16 операторов изометрии и еще дополнительные оператры – $X_{17} = x^8p_1 - x^4p_5$, $X_{18} = x^6p_1 - x^4p_7$, $X_{19} = x^8p_3 - x^2p_5$, $X_{20} = x^6p_3 - x^2p_7$, $X_{14\alpha} = e_\alpha x^\alpha p_1 - x^4p_\alpha$, $X_{23\alpha} = e_\alpha x^\alpha p_3 - x^2p_\alpha$, $X_{58\alpha} = e_\alpha x^\alpha p_5 - x^8p_\alpha$, $X_{67\alpha} = e_\alpha x^\alpha p_7 - x^6p_\alpha$, $\alpha = \overline{9, m_1}$.

Оператор гомотетии – $Y = 3x^1p_1 + x^2p_2 + 3x^3p_3 + x^4p_4 + 3x^5p_5 + x^6p_6 + 3x^7p_7 + x^8p_8 + 2(x^9p_9 + \ldots + x^np_n)$.

Риманово пространство $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ с метрикой (19) допускает группы $G_{r5\max}$ и $P_{r5\max}$. Для группы изометрий – $r_{5\max} = \frac{1}{2}(m_1 - 4)(m_1 - 3) + 10 + N_*$.

Метрики самых подвижных римановых пространств $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ второй–шестой лакунарностей

Для пространств $\overset{4a}{\underset{n}{V}}$ второй–шестой лакунарностей представим метрики:

– вторая лакунарность с группами $G_{r_{2\max}}\left\{r_{2\max} = \frac{1}{2}m_1(m_1 - 1) + 1 + N_*\right\}$ и $P_{r_{2\max}}$, где шесть классов пространств, а знакоположительная метрика (12) одна, имеет метрики:

$$ds^2 = e^{2x^1}e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2;$$

$$ds^2 = a(x^1)[2dx^1dx^2 + e_3dx^{3^2} + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2] + d\tilde{s}^2;$$

$$a(x^1) = e^{2x^1};\ \left(x^1\right)^b;\ b \neq o;\ \frac{e^{-2\alpha \operatorname{arctg} x^1}}{1 + \left(x^1\right)^2};\ \frac{e^{\frac{\alpha}{x^1}}}{\left(x^1\right)^2};\ \frac{(x^1 - 1)^{\alpha - 1}}{(x^1 + 1)^{\alpha + 1}};\ \forall\alpha;\ b \in D; \tag{20}$$

– третья лакунарность с группами $G_{r_{3\max}}\left\{r_{3\max}=\frac{1}{2}(m_1-2)(m_1-1)+5+N_*\right\}$ и $P_{r_{3\max}}$ имеет только одну метрику (егоровскую) (17). Аналогов ей среди знакоположительных метрик нет. Она представлена формулой (21). Здесь пять типов метрик с группами $G_{r_{3\max}}$ и $P_{r_{3\max}}$ в силу (20) сравнимы со знакоположительной метрикой (13):

$$ds^2=2dx^1dx^4+2dx^2dx^3+(x^4)^2(dx^2)^2+e_5(dx^5)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2+d\tilde{s}^2; \quad (21)$$

$$ds^2=e_3(dx^3)^2+a(x^1)[2dx^1dx^2+e_4(dx^4)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2]+d\tilde{s}^2;$$

– четвертая лакунарность с группами $G_{r_{4\max}}\left\{r_{4\max}=\frac{1}{2}(m_1-3)(m_1-2)+6+N_*\right\}$ и $P_{r_{4\max}}$ имеет пять классов метрик, которые по подвижности сродни знакоположительной метрике (14) при $a(x^1)$ вида (20) и егоровской метрике (18):

$$ds^2=2dx^1dx^4+2dx^2dx^3+(x^4)^2(dx^2)^2+e^{2x^5}e_5(dx^5)^2+e_6(dx^6)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2+d\tilde{s}^2;$$

$$ds^2=e_3(dx^3)^2+e_4(dx^4)^2+a(x^1)[2dx^1dx^2+e_5(dx^5)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2+d\tilde{s}^2];$$

– пятая лакунарность с группами $G_{r_{5\max}}\left\{r_{5\max}=\frac{1}{2}(m_1-4)(m_1-3)+10+N_*\right\}$ и $P_{r_{5\max}}$ имеет пять классов метрик пространств, по подвижности родственных знакоположительной метрике (15) при $a(x^1)$ вида (20), а также егоровскую метрику (19):

$$ds^2=e_3(dx^3)^2+e_4(dx^4)^2+e_5(dx^5)^2+a(x^1)[2dx^1dx^2+e_6(dx^6)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2+d\tilde{s}^2];$$

– шестая лакунарность с группами $G_{r_{6\max}}\left\{r_{6\max}=\frac{1}{2}(m_1-5)(m_1-4)+15+N_*\right\}$ и $P_{r_{6\max}}$ имеет пять метрик пространств, по подвижности родственных одной знакоположительной метрике при $a(x^1)$ вида (20):

$$ds^2=e_3(dx^3)^2+e_4(dx^4)^2+e_5(dx^5)^2+e_6(dx^6)^2+a(x^1)[2dx^1dx^2+e_7(dx^7)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2+d\tilde{s}^2].$$

Заключение

Получено полное представление особых сверхподвижных метрик римановых специализированных пространств до шестой лакунарности включительно в смысле И. П. Егорова, в которых действует уже комплексная алгебра. Если положить $d\tilde{s}^2=0$, то получим представление всех максимально подвижных метрик римановых пространств V_{m_1} до шестой лакунарности в современном понимании.

Список литературы

1. Четыркина, З. Н. О максимальных порядках групп изометрических и гомотетических движений в метрических пространствах, допускающих в своей метрике вещественную, комплексную и гиперкомплексные алгебраические структуры / З. Н. Четыркина // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. 2021. Т. 1, № 57. С. 27–34.
2. Розенфельд, Б. А. Геометрия групп Ли / Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. М.: Изд-во МЦНМО, 2003.
3. Егоров, И. П. Римановы пространства второй лакунарности / И. П. Егоров // Доклады Академии наук СССР. 1956. Т. 111, № 2. С. 276–279.
4. Егоров, И. П. О пространствах первых трех лакунарностей в гомотетическом смысле / И. П. Егоров // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 150, № 4. С. 730–732.
5. Егоров, И. П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах / И. П. Егоров // Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии. 1978. № 10. С. 147–191.
6. Егорова, Л. И. Об однородных гомотетитческих пространствах / Л. И. Егорова // Материалы 5-й научно-технической конференции. Секция математики. ПВАИУ. 1970. С. 29–31.

7. Лаптев, Б. Л. Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления / Б. Л. Лаптев // Известия физико-математического общества. Казань. 1938. № 10. С. 3–38.
8. Четыркина, З. Н. Гомотетии и движения в двумерных финслеровых пространствах / З. Н. Четыркина // Волжский математический сборник. 1966. № 5. С. 366–373.
9. Четыркина, З. Н. Пространства Рандерса первой лакунарности и максимально подвижные финслеровы пространства / З. Н. Четыркина // Известия высших учебных заведений. Математика. 1984. № 11. С. 53–56.

References

1. Chetyrkina Z. N. (2021) On the Maximum Orders of Groups That Are Isometric and Homothetic Moves in Metric Spaces That Admit Real, Complex, and Hypercomplex Algebraic Structures in Their Metric. *Bulletin of Mogilev State University named after A. A. Kuleshov*. 1 (57), 27–34 (in Russian).
2. Rosenfeld B. A., Zamakhovsky M. P. (2003) *Geometry of Lie Groups*. Moscow, MTsNMO Publ. (in Russian).
3. Egorov I. P. (1956) Rimanov Spaces of the Second Lacunarity. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 111 (2), 276–279 (in Russian).
4. Egorov I. P. (1963) On the Spaces of the First Three Lacunaries in the Homothetic Sense. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 150 (4), 730–732 (in Russian).
5. Egorov I. P. (1978) Automorphisms in Generalized Spaces. *Results of Science and Technology. Series: Problems of Geometry*. (10), 147–191 (in Russian).
6. Egorova L. I. (1970) On Homogeneous Homothetic Spaces. *Materials of the 5th Scientific and Technical Conference: Section of Mathematics. PVAIU*. 29–31 (in Russian).
7. Laptev B. L. (1938) Lie Derivative for Objects That Are Functions of a Point and a Direction. *Proceedings of the Physical and Mathematical Society. Kazan*. (10), 3–38 (in Russian).
8. Chetyrkina Z. N. (1966) Homotheties and Motions in Two-Dimensional Finsler Spaces. *Volga Mathematical Collection*. (5), 366–373 (in Russian).
9. Chetyrkina Z. N. (1984) Randers Spaces of First Lacunarity and Maximally Mobile Finsler Spaces. *News of Higher Educational Institutions. Mathematics*. (11), 53–56 (in Russian).

Сведения об авторе

Четыркина З. Н., канд. физ.-мат. наук, доц.

Адрес для корреспонденции

220036, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. Кунцевщина, 36–580
Тел.: +375 29 275-24-64
E-mail: guseinaas@yandex.ru
Четыркина Зинаида Никандровна

Information about the author

Chetyrkina Z. N., Cand. of Sci., Associate Professor

Address for correspondence

220036, Republic of Belarus,
Minsk, Kunsevchina St., 36–580
Tel.: +375 29 275-24-64
E-mail: guseinaas@yandex.ru
Chetyrkina Zinaida Nikandrovna