

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МЕРЦАНИЯ ПЧЁЛ

Арсенович П.А., Исакович М.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,  
Минск, Республика Беларусь

Цегельник В.В. – доктор физ.-мат. наук,  
профессор каф. ВМ

**Аннотация.** Рассматривается механизм мерцания пчёл на основе модели, включающей три состояния. Анализируется динамика взаимодействия между пчёлами.

Мерцание пчел – это коллективный защитный механизм, который активируется в ответ на угрозы от хищников, при котором пчелы создают визуальные паттерны, последовательно и синхронно расширяя свои брюшки [1]. Аналитическая модель IAR основана на взаимодействиях между пчелами. Она учитывает три состояния пчел: неактивное, активное и рецидивное.

Неактивное состояние: агенты находятся в состоянии покоя, их брюшки не растянуты. В таком состоянии они могут подвергаться влиянию активных агентов во время взаимодействий.

Активное состояние: в активном состоянии пчёлы либо растягивают свои брюшки до максимальной вместимости, либо уже сделали это. Они играют ключевую роль в определении силы волны и оказывают влияние на соседних неактивных особей.

Состояние рецидива: агенты переходят из активного состояния в состояние покоя. Во время этого периода, пчела не взаимодействует с другими пчелами и не подвержена влиянию окружающих ее особей. Это является отдыхом для пчелы после периода активности.

Модель представляет систему дифференциальных уравнений, описывающих изменение вероятностей перехода между состояниями и влияние каждого состояния на поведение остальных пчел в гнезде. Учитываются также параметры, такие как интенсивность нападений хищников, плотность расположения пчел и вероятность перехода между состояниями.

Мерцание пчел на поверхности пчелиного гнезда возникает, когда оса-агрессор находится поблизости. Во время мерцания можно выделить три типа агентов: генераторы, передатчики и конечные звенья. Генераторы служат источником передачи информации, агенты-передатчики выполняют и отправительскую, и получательскую функцию. Они инициируют волну, которая передается ближайшей пчеле. Агенты-передатчики реагируют на сигналы, передаваемые пчелами-генераторами, и присоединяются к мерцанию. Конечные звенья не инициируют мерцающую волну и не принимают активное участие в распространении информации. Однако они могут реагировать на сигналы, поступающие от агентов-передатчиков. Каждая пчела имеет свою собственную зону, где будет приниматься волна, как показано на оси рисунка 1.

Пчелы используют комбинацию визуальных сигналов и запаха, известного как феромон Насонова, для общения. Этот феромон выделяется железами на конце брюшка пчелы. Пчелы могут обнаруживать феромон Насонова на цветках, листьях и других объектах. Он служит для передачи информации о приближающемся агрессоре[2].

В представленной модели особое внимание уделяется взаимодействиям, которые происходят между пчелами, находящимися в непосредственной близости друг от друга. При этом взаимодействия на большом расстоянии между пчелами-генераторами и основной волной “мерцания”, а, в частности, пчелами-передатчиками не учитывается. Иными словами, это значит, что каждая пчела реагирует на сигналы, поступающие исключительно от своих ближайших соседей, игнорируя импульсы, поступающие не от находящихся вблизи пчел-передатчиков. Во-первых, такой подход позволяет пчелам быстро реагировать на изменения в окружающей среде. Это создает эффективную систему раннего предупреждения, которая может помочь гнезду избежать опасности. Во-вторых, данный подход упрощает модель взаимодействия между агентами. Вместо того, чтобы учитывать сложные взаимодействия на больших расстояниях, появляется возможность построить модель на основе более простых и

непосредственных взаимодействий. Это делает систему более управляемой и понятной с точки зрения её математического описания.

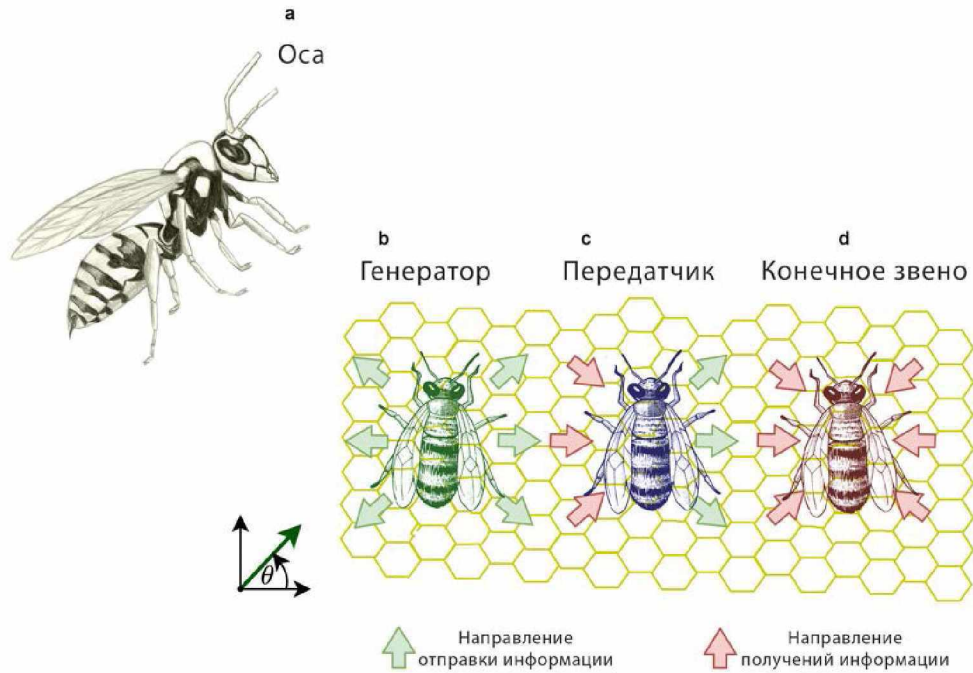


Рисунок 1 – Передача информации агентами при мерцании

В системе выделено три состояния: неактивное, активное и рецидивное. Схема перехода состояний различных особей представлена на рисунке 2.

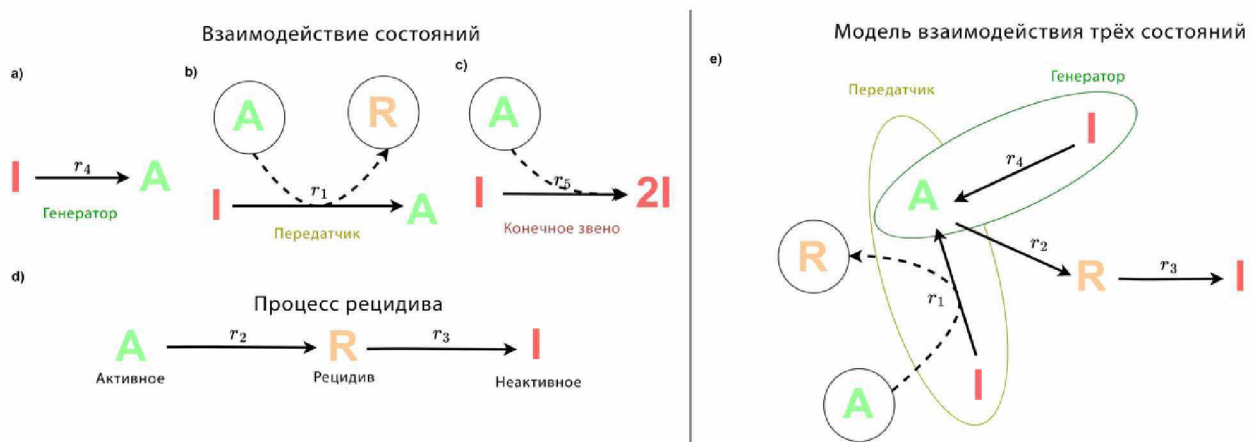


Рисунок 2 – Переходы состояний различных агентов

Неактивное состояние(I): агенты находятся в состоянии покоя, их брюшки не растянуты. Активное состояние(A) описывает процесс, при котором пчела переходит от неактивного состояния к максимальному расширению брюшка. Рецидивное(R) состояние представляет собой процесс, при котором пчела возвращается из состояния максимального сгиба в неактивное состояние.

Система уравнений (1) описывает процесс перехода пчёл из одного состояния в другое.

$$\begin{aligned}
 I &\xrightarrow{r_4} A \\
 A + I &\xrightarrow{r_1} R + A \\
 I + A &\xrightarrow{r_5} 2I \\
 A &\xrightarrow{r_2} R \xrightarrow{r_3} I
 \end{aligned} \tag{1},$$

где I, A и R – совокупность пчел в состояниях неактивное, активное и рецидив соответственно,  $r_1$  и  $r_4$  – скорости, которые вызывают, а  $r_2$ ,  $r_3$  и  $r_5$  устраняют активное состояние.

Далее составим стехиометрическую матрицу  $\Gamma$  (2) с вектором химической скорости  $\omega$ , где  $x = \Gamma \cdot \omega$ .

$$x = \begin{bmatrix} I \\ A \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A r_1 \\ A r_2 \\ R r_3 \\ I r_4 \\ A r_5 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Тогда модель IAR формализуется с помощью системы трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I} = -A r_1 + R r_3 - I r_4 + A r_5, \\ \dot{A} = -A r_2 + I r_4 - A r_5, \\ \dot{R} = A r_1 + A r_2 - R r_3. \end{cases} \quad (3)$$

В двумерных динамических системах, которые не демонстрируют хаотическое поведение, часто присутствует устойчивая или периодическая структура. Эта структура возникает благодаря взаимосвязям между переменными состояниями, позволяя выразить одну переменную через другие. Рассмотрим систему IAR, состоящую из трех дифференциальных уравнений первого порядка. В ней одна из функций может быть выражена через две другие, а сложение уравнений приводит к тому, что сумма правых частей будет равна нулю. Тогда и сумма производных в левой части результирующего уравнения также равна нулю. Таким образом,

$$I + A + R = C, \quad (4)$$

где C – произвольная постоянная.

Следовательно, система трёх дифференциальных уравнений сводится к автономной системе из двух уравнений. Это указывает на отсутствие хаоса в системе и подразумевает, что влияние внешних факторов на состояние системы минимально, что говорит о её стабильности и предсказуемости. Таким образом, система IAR обладает свойствами, которые позволяют ей сохранять равновесие и функционировать нормально, даже когда на неё воздействуют различные внешние факторы [3, стр.75]. Проще говоря, все сказанное означает, что пчелы – это самоорганизующаяся, устойчивая система.

В контексте самоорганизующихся систем, колонии пчел представляют собой фасцинирующий объект исследования. Эффект так называемого «мерцания», вызываемый специальным воздействием информации на отдельную пчелу, отображается в поведении всего улья. Благодаря такому воздействию со стороны осы, пчелы начинают демонстрировать сложные поведенческие структуры, которые возникают из простых правил обмена информацией между отдельными пчелами. Явление, известное как «эмерджентность», является ключевым аспектом самоорганизующихся систем и широко изучается в области комплексного взаимодействия. То есть взаимосвязи между отдельными элементами пчелиного улья могут порождать новые свойства на уровне всей системы, которые не могут быть полностью объяснены или предсказаны только на основе свойств отдельной пчелы.

Модель IAR предоставляет новый взгляд на аналитическое моделирование мерцающего поведения пчел, учитывая взаимодействие различных состояний внутри пчелиного роя. Это позволяет более глубоко изучить передачу информации внутри коллектива и может способствовать лучшему пониманию сложных поведенческих паттернов. Понимание динамики и механизмов, лежащих в основе мерцающего поведения, может помочь в разработке новых алгоритмов и стратегий для решения сложных задач, таких как оптимизация транспортных сетей, координация роботов или управление социальными системами.

*Материалы 60-й юбилейной научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов, Минск, 2024*

**Список использованных источников:**

1. Mathematical Tri-State Model for Bee Shimmering Propagation Dynamics / N. Patel / School of Engineering and Materials Science Queen Mary – London, 2024. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://arxiv.org/html/2401.14145v1> – Дата доступа: 30.04.2024.
2. Williams, H. / The Nasonov pheromone of the honeybee *Apis mellifera* / Journal of Chemical Ecology Part II. Bioassay of the components using foragers, 225–237, (1981). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/BF00995745> – Дата доступа: 30.04.2024
3. Хаотические колебания: Ввод. курс для науч. работников и инженеров / Ф. Мун ; Перевод с англ. Ю. А. Данилова, А. М. Шукурова. – Москва: Мир, 1990. – 311 с.