

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Абрашин Т. Ю., студент гр.351002

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. Данная работа посвящена одной из всемирно известных задач тысячелетия – Гипотезе Римана, неразрывно связанной с ней дзета-функцией Римана, способам вычисления её значений и аналитическому продолжению её графика.

Ключевые слова. Гипотеза Римана, дзета-функция Римана, Базельская задача, числа Бернулли.

Гипотеза Римана – одна из 7 так называемых Задач тысячелетия, за решение каждой из которых математический институт Клэя предлагает награду в 1 миллион долларов. Среди этих задач на данный момент была решена только одна (гипотеза Пуанкаре) Григорием Яковлевичем Перельманом. Гипотеза Римана неразрывно связана с дзета-функцией Римана и нахождением её нулей.

Что же такое дзета-функция Римана? Для некоторого элемента, традиционно обозначаемого как s , она будет иметь следующий вид:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1)$$

Нахождение значения данной функции при $s=2$ также известно как Базельская задача. Первым решение удалось найти Эйлеру. Всем нам известна формула разложения функции синуса в ряд Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.1)$$

Однако Эйлеру удалось получить ещё одно разложение, только в этот раз в бесконечное произведение:

$$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \quad (2.2)$$

Коэффициенты при равных степенях x должны оказаться равными. Рассмотрим коэффициенты при x во второй степени. В правой части данную степень можно получить только одним способом: путём умножения единиц на x^2 с их коэффициентами, а затем сложив все полученные значения. Получим, что:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \dots \quad (2.3)$$

Таким образом, умножив обе части на $-\pi^2$, получим следующее:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \quad (2.4)$$

Это не единственный способ вычисления. Существует второе решение Эйлера, основанное на интегрировании рядов, метод разложения гиперболического котангенса или же метод, использующий разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x^2$.

Кроме нахождения значения для одного частного случая при $s=2$, Эйлер рассчитал суммы отрицательных чётных степеней вплоть до 26 и выявил связь с числами Бернулли:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \quad (3.1)$$

Числа Бернулли находятся следующим образом:

$$B_0 = 1$$

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+k)!} B_{n-k} \quad (3.2)$$

У чисел Бернулли есть 2 интересных свойства, которые учитываются в данной формуле. Во-первых, все нечётные числа Бернулли равны 0, так что все значения, полученные с помощью данной формулы, будут отличны от 0. А во-вторых, их знаки чередуются. Для этого в начале формулы и нужна -1.

Ниже приведена таблица с числами Бернулли и значениями дзета-функции Римана, полученных с помощью формул (3.2) и (3.1) соответственно:

Таблица 1 – Значения чисел Бернулли и дзета-функции

Значений аргумента	Значение числа Бернулли	Значение дзета-функции
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{\pi^2}{6}$
4	$-\frac{1}{30}$	$\frac{\pi^4}{90}$
6	$\frac{1}{42}$	$\frac{\pi^6}{945}$
8	$-\frac{1}{30}$	$\frac{\pi^8}{9450}$
10	$\frac{5}{66}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$
12	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{691 \cdot \pi^{12}}{638512875}$
14	$\frac{7}{6}$	$\frac{2 \cdot \pi^{14}}{18243225}$
16	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{3617 \cdot \pi^{16}}{325641566250}$
18	$\frac{43867}{798}$	$\frac{43867 \cdot \pi^{18}}{38979295480125}$
20	$-\frac{174611}{330}$	$\frac{174611 \cdot \pi^{20}}{1531329465290625}$

У дзета-функции есть ещё одно важное свойство: её можно представить в виде бесконечного произведения. Доказать это можно следующим образом:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \quad (4.1)$$

Вычитая из изначальной функции получившееся произведение, получим:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots \quad (4.2)$$

Получаем сумму для всех чисел, не делящихся нацело на 2. Алгоритм доказательства схож с известным решето Эратосфена. В данном случае мы постепенно будем отсеивать слагаемые, знаменатель которых делится нацело на определённое простое число. Повторив такую процедуру для бесконечного количества простых чисел, получим:

$$\dots \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 \quad (4.3)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots} \quad (4.4)$$

Конечный вид данной формулы выглядит следующим образом:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \quad (4.5)$$

Основная часть работы посвящена поиску нового способа вычисления значений дзета-функции Римана и исследованию уже существующих. Мной была составлена программа для вычисления приблизительных значений данной функции с точностью до 10 знаков после запятой. Результаты её работы вы можете видеть в таблице ниже:

Таблица 2 – Сравнение результатов работы программы и значений, полученных с помощью формулы (3.1)

Значений аргумента	Полученное значение	Теоретическое значение
2	1.6449240670	1,644934067
3	1.2020569021	-
4	1.0823232337	1,082323234
5	1.0369277551	-
6	1.0173430620	1,017343062
7	1.0083492774	-
8	1.0040773562	1,004077356
9	1.0020083928	-
10	1.0009945751	1,000994575
11	1.0004941886	-
12	1.0002460866	1,000246087
13	1.0001227133	-
14	1.0000612481	1,000061248
15	1.0000305882	-
16	1.0000152823	1,000015282
17	1.0000076372	-
18	1.0000038173	1,000003817
19	1.0000019082	-
20	1.0000009540	1,000000954

Исходя из данной таблицы значений, можно заметить, что с увеличением аргумента функции вещественная часть уменьшается приблизительно в 2 раза, что может быть использовано для ускорения вычисления для больших значений.

Построим таблицу, в которой покажем, во сколько раз уменьшается вещественная часть с увеличением аргумента функции:

Таблица 3 – Отношения между вещественными частями значений функции

Значения аргументов	Отношение между вещественными частями значений функции
2-3	3.1917942931
3-4	2.4544334937
4-5	2.2293051250
5-6	2.1292523258
6-7	2.0771931712
7-8	2.0477184211
8-9	2.0301587419
9-10	2.0193475586
10-11	2.0125415681
11-12	2.0081897999
12-13	2.0053783901
13-14	2.0035445998
14-15	2.0023440412
15-16	2.0015442702
16-17	2.0010344105
17-18	2.0006811096
18-19	2.0004716487
19-20	2.0002096434

Соответственно, результат n-ого значения функции можно выразить через n-1 -ое значения, зная коэффициент, на который нужно умножить его вещественную часть (если первое значение известно. В нашем случае это значение вычислено теоретически и равно $\pi^2/6$). Поэтому я предположил, что такой

коэффициент можно выразить как функцию, которая при увеличении аргумента будет стремиться к 2. В связи с этим, она может иметь следующий вид:

$$\varphi(s) = \frac{2 \cdot s^k}{s^k - m} \quad (5.1)$$

Данный вид был получен исходя из предположения, что предел выражения с увеличением аргумента должен стремиться к 2. Так как m – положительное число, то значение выражение будет больше 2. Само же значение дзета-функции можно выразить следующим образом:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{2 \cdot s^k}{s^k - m} (\zeta(s - 1) - 1) \quad (5.2)$$

$$\zeta(0) = \frac{\pi^2}{6}$$

Экспериментальным путём было получено, что значение m наиболее стабильно при изменении s при коэффициенте k большем 2, но меньшем 3. Также мне удалось получить их примерные значения, при которых результат не сильно расходится с результатом теоретических формул и практических вычислений, путём написания программы, перебирающей значения k от 1 до 4 и x от 0 до 10 с шагом в одну десятую и считающей первые 30 значений дзета-функции. Наборы чисел оценивались по сумме абсолютных погрешностей каждого из полученных в результате формулы (5.2) значений с полученными практическим путём из классического определения по формуле (1). Как итог, наиболее приближённое значение было получено при $k = 2.5$, $m = 5.8$. При таком наборе суммарная абсолютная погрешность набора чисел наименьшая. Также удалось получить еще один интересный набор: $k = 3$, $m = 10.92$ (преимущество в том, что k – целое число, в связи с чем вычисление происходит быстрее, однако погрешность чуть больше).

Однако меня данный результат не совсем удовлетворил. С точки зрения оценки погрешности всей совокупности чисел, данный набор действительно даёт наилучший результат. Однако при увеличении аргумента точность вещественной части уменьшается, что не учитывается алгоритмом. Действительной частью числа, как видно из расчётов выше, всегда является 1.

В связи с этим, подбором были найдены другие коэффициенты, больше подходящие моим критериям: $k = 2.8$, $m = 8.3$. Они дают чуть большую погрешность на начальных элементах, однако с увеличением аргумента погрешность уменьшается. Ниже приведена таблица значений функции, полученных благодаря формуле (5.2), при $k = 2.8$, $m = 8.3$ и $k = 2.5$, $m = 5.8$.

Таблица 4 – Сравнение результатов вычислений для различных коэффициентов

Значения аргумента	$k = 2.8, m = 8.3$	$k = 2.5, m = 5.8$	Практический результат
2	1.6449340668	1.6449340668	1.6449240670
3	1.1989792767	1.2024866684	1.2020569021
4	1.0824646051	1.0828929799	1.0823232337
5	1.0374548443	1.0371462693	1.0369277551
6	1.0176976703	1.0173515176	1.0173430620
7	1.0085328333	1.0082876171	1.0083492774
8	1.0041615857	1.0040110377	1.0040773562
9	1.0020440284	1.0019576505	1.0020083928
10	1.0010085700	1.0009608724	1.0009945751
11	1.0004992051	1.0004734926	1.0004941886
12	1.0002476319	1.0002339936	1.0002460866
13	1.0001230346	1.0001158832	1.0001227133
14	1.0000612019	1.0000574833	1.0000612481
15	1.0000304716	1.0000285504	1.0000305882
16	1.0000151820	1.0000141943	1.0000152823
17	1.0000075684	1.0000070626	1.0000076372
18	1.0000037746	1.0000035164	1.0000038173
19	1.0000018832	1.0000017517	1.0000019082
20	1.0000009398	1.0000008730	1.0000009540

Полученные значения достаточно близки к полученным практически. Соответственно, данный способ может использоваться в случаях, когда требуется найти приближительное значение дзета-функции для определённого значения аргумента, причём данный способ будет работать быстрее и

вычисляться проще чем любой из способов, перечисленный выше, однако будет получена погрешность.

Ниже приведены графики для сравнения результатов:

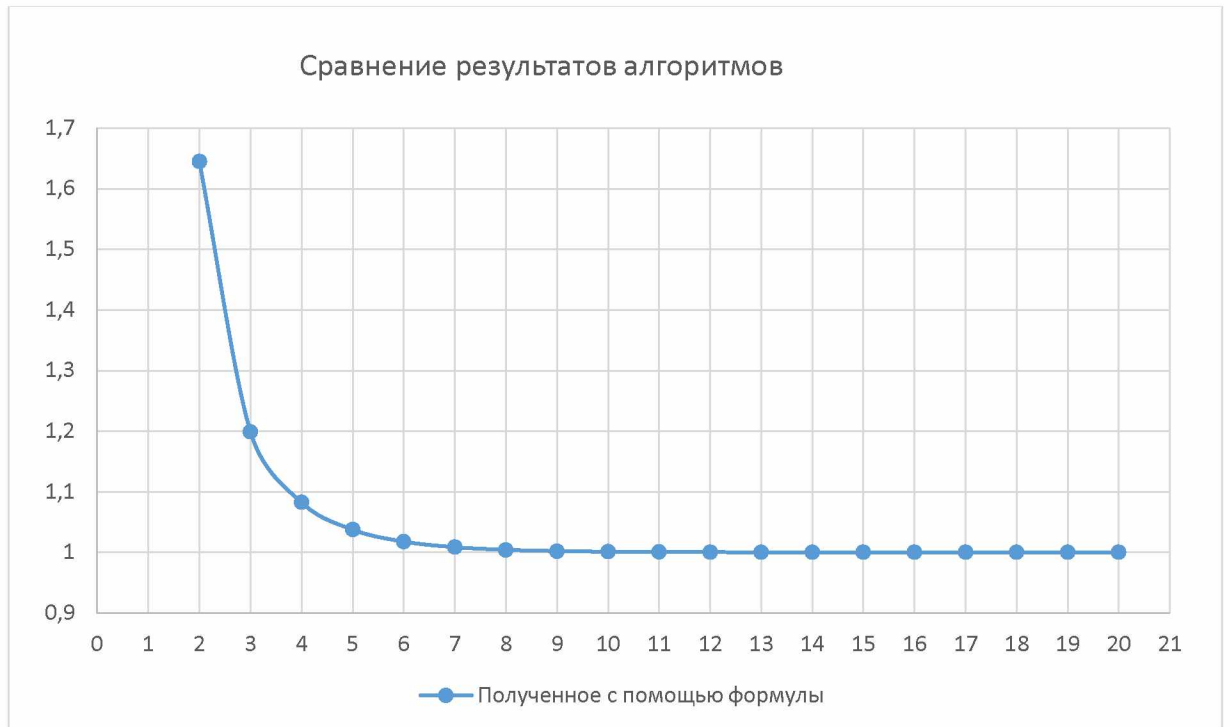


Рисунок 1 – График значений, полученных с помощью выведенной формулы при $k = 2.8$, $m = 8.3$

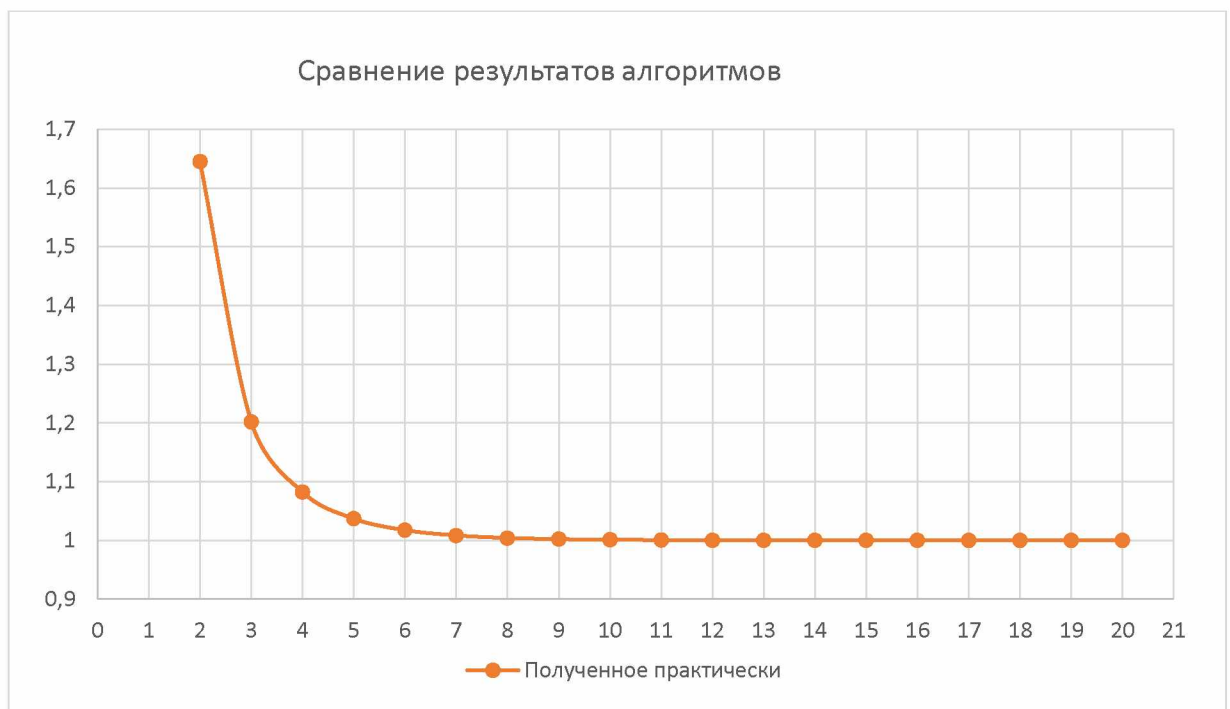


Рисунок 2 – График значений, полученных практически

Как можно увидеть, графики внешне очень сильно схожи. Если изобразить оба графика на одной плоскости так, как это показано выше, то один из них перекроет другой, в связи с чем сравнить результаты будет невозможно. В связи с этим ниже представлены графики, цены деления которых по осям уменьшены:

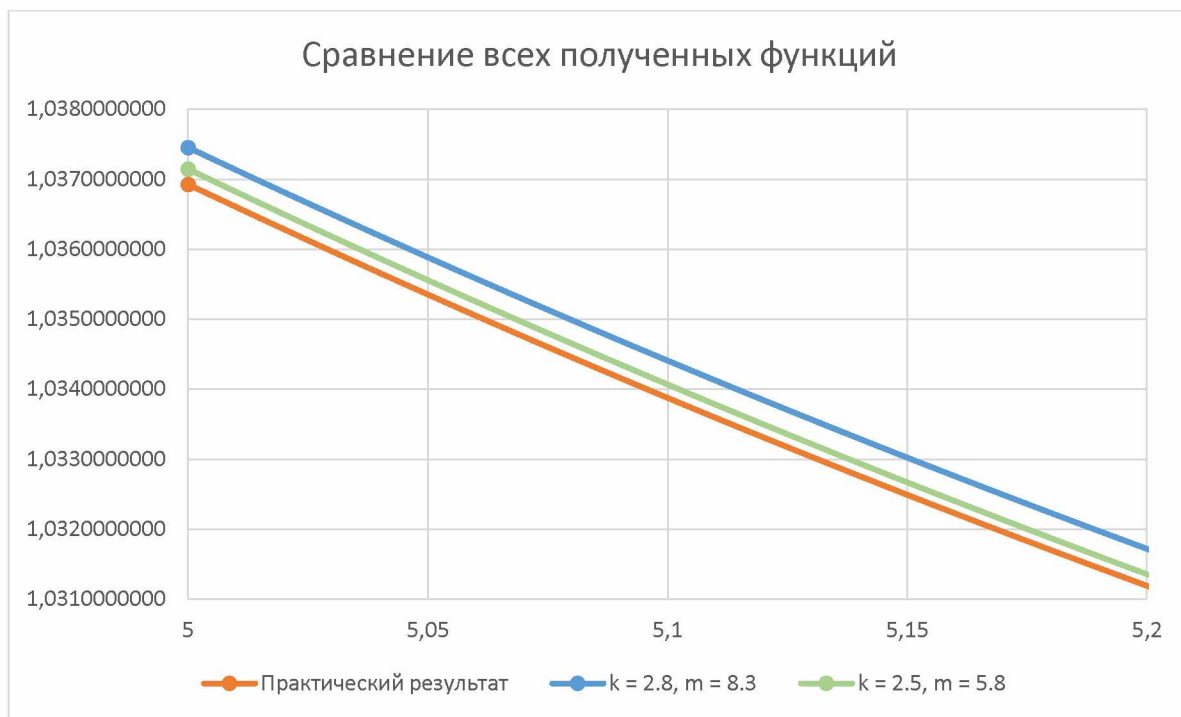


Рисунок 3 – Графики для оценки погрешностей при небольших значениях аргумента

Для наглядности, график сравнения результатов 2-х алгоритмов, изображённый выше, был растянут относительно оси ординат в 115 раз. Легко заметить, что зелёный график лежит ближе к оранжевому, что говорит о большей точности вычислений. Это можно увидеть на таблице (4) с результатами расчётов.

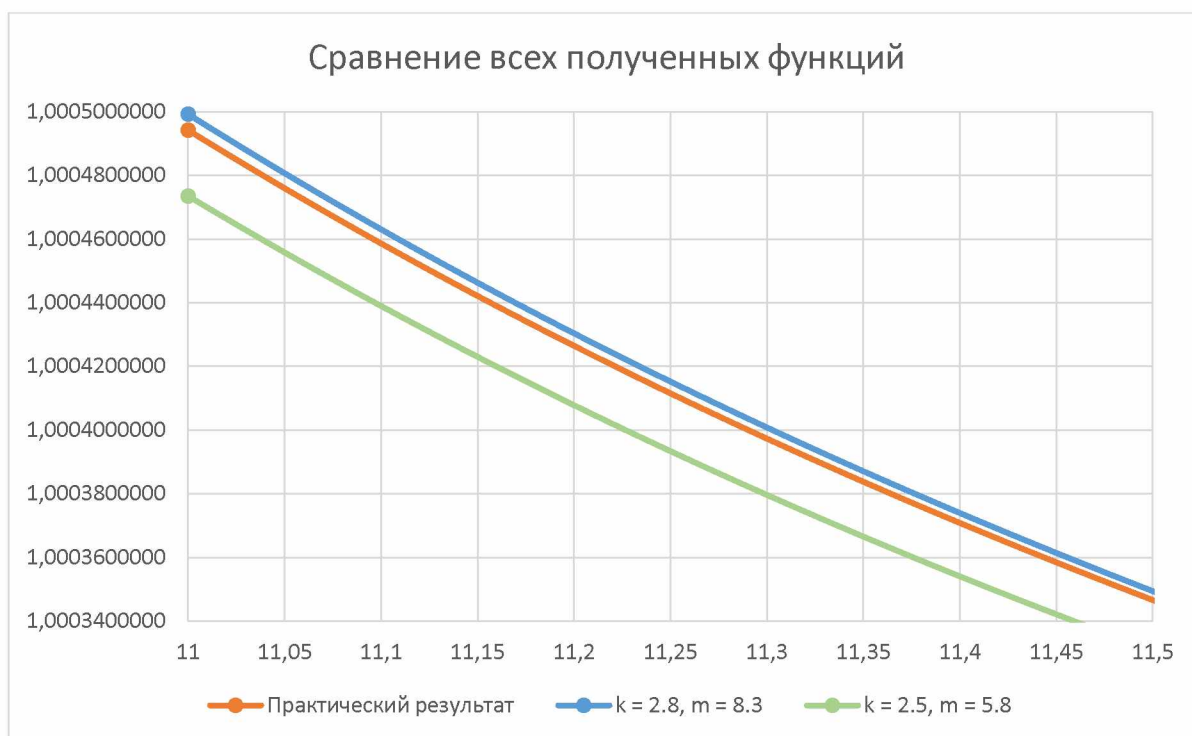


Рисунок 4 – Графики для оценки погрешностей при увеличении значения аргумента

Графики сравнения результатов алгоритмов, изображённые выше, были растянуты относительно оси ординат в 5000 раз. Исходя из этого, можно сделать вывод о достаточно большой схожести результатов и точности полученной формулы при возрастании значений аргументов. Для сравнения, ниже представлены графики без масштабирования. Синий график расположен ближе к тому, что был получен практическим путём. Это же можно было увидеть и на таблице с результатами расчётов. Стоит отметить, что с увеличением аргумента точность возрастёт ещё сильнее.

На первый взгляд вопрос вычисления значений дзета-функции кажется давно решённым, однако это касается только чисел больших 1, для которых данный ряд будет сходиться. Это можно увидеть исходя из графика ниже:

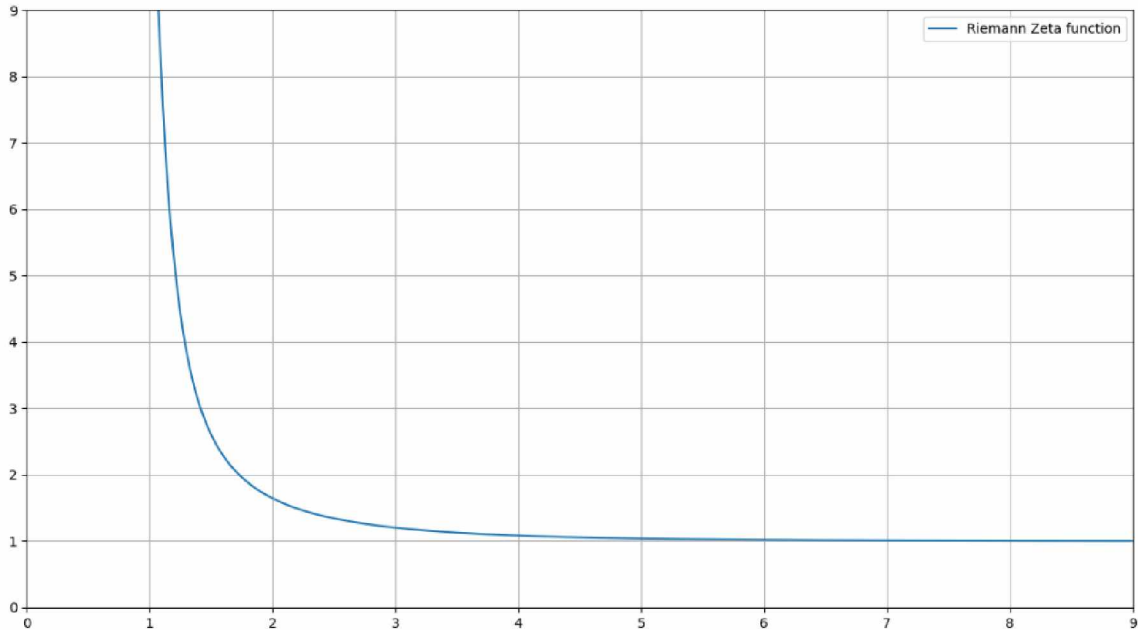


Рисунок 5 – График дзета-функции на допустимой области определения

Однако математики пошли дальше и решили найти значение данной функции при, допустим, отрицательных аргументах. Казалось бы, что если подставить -1, то получится сумма всех натуральных чисел, а значит ряд не может сходиться. Однако значение дзета-функции в данной точке будет $-1/12$. Это связано с понятием «аналитическое продолжение функции». Для этого потребовалось изменить определение функции для аргументов меньше 1.

Бернарда Римана можно назвать отцом комплексного анализа. Он решил не ограничиваться лишь натуральными числами, а найти значение функции для комплексной переменной s вида $\sigma + it$. Если действительная часть больше 1, то ряд сходится согласно формуле (1). Иначе же вступает в силу упомянутое выше аналитическое продолжение. Также функция обращается в 0 при нечётных отрицательных аргументах. Такие нули называют тривиальными.

Сама же гипотеза гласит, что все нетривиальные (то есть имеющие ненулевую мнимую часть) нули дзета-функции Римана имеют действительную часть $1/2$. Её доказательство или опровержение будет иметь далеко идущие последствия для теории чисел, особенно в области распределения простых чисел.

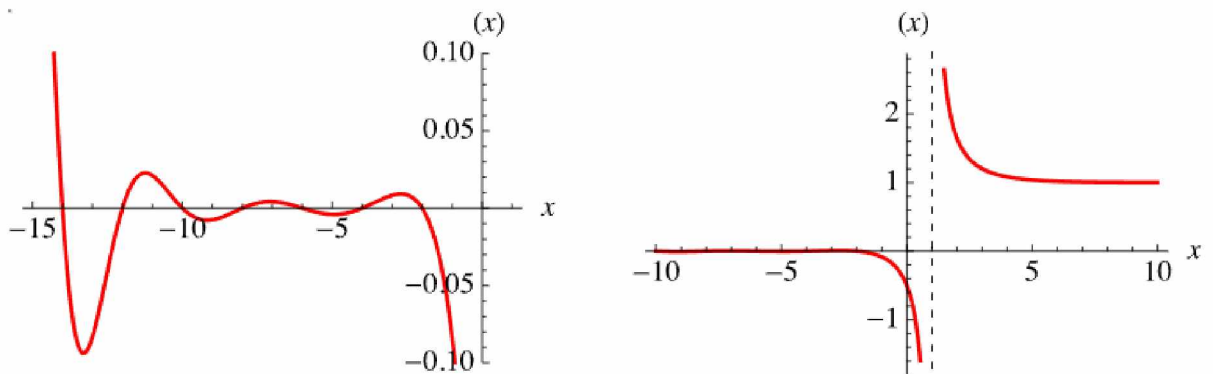


Рисунок 6 – График дзета-функции с аналитическим продолжением (цена деления по оси y уменьшена в 20 раз на графике слева для большей наглядности)

На 2004 год численными методами было подтверждено, что более десяти триллионов первых нетривиальных нулей дзета-функции Римана удовлетворяют этой гипотезе, что является хорошим аргументом в пользу истинности этой гипотезы, но не гарантирует её.

Особое значение гипотезы Римана состоит в предположительной связи с распределением простых чисел. Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x — функция распределения простых чисел $\pi(x)$ — выражается через распределение нетривиальных нулей дзета-функции.

Существует множество математических проблем областях аналитической теории чисел, теоретической физике, статистике, теории вероятностей, доказанных в предположении верности гипотезы Римана, так что её доказательство или опровержение будет иметь далеко идущие последствия для теории чисел, особенно в области распределения простых чисел. Также была обнаружена возможная связь дзета-функции с квантовой физикой.

Таким образом, мной было проведено исследование дзета-функции, рассмотрены способы её вычисления, предложен свой быстрый способ вычисления значений функции и затронута тема её аналитического продолжения за область допустимых значений и важность доказательства данной гипотезы для многих областей науки.

Список использованных источников:

1. А. Ю. Ерёмин, И. Е. Капорин, М. К. Керимов, О вычислении дзета-функции Римана в комплексной области, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1985, том 25, номер 4, 500–511
2. М. К. Керимов, О методах вычисления дзета-функции Римана и некоторых её обобщений, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1980, том 20, номер 6, 1580–1597
3. А. Ю. Ерёмин, И. Е. Капорин, М. К. Керимов, О вычислении производных дзета-функции Римана в комплексной области, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1988, том 28, номер 8, 1135–1148
4. А. В. Дубовицкий, С. И. Комаров, Асимптотическое распределение простых чисел и дзета-функция Римана. Исторический обзор (XVIII–XX века), *Матем. обр.*, 2021, выпуск 41, 30–38
5. E. C. Titchmarsh, "Riemann zeta-function", 1986, second edition

UDC

INVESTIGATION OF THE RIEMANN ZETA FUNCTION

Abrashin T. Y.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronic, Minsk, Republic of Belarus

Barkova E.A. – PhD in Physics and Mathematics

Annotation. This work is devoted to one of the world-famous problems millennium prize problems - the Riemann Hypothesis, the inextricably linked Riemann zeta function, methods for calculating its values and the analytical continuation of its graph.

Keywords. Riemann hypothesis, Riemann zeta function, Basel problem, Bernoulli numbers.