УДК

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Бутько А.Д., Шклянко А. А., студенты гр. 378105

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лобанок Л.В., – старший преподаватель кафедры высшей математики

Аннотация: Данная работа посвящена исследованию на тему рекуррентных последовательностей. Исторический аспект работы включает рассмотрение места числовых рекуррентных последовательностей в развитии математики. Были исследованы вклады известных математиков в изучение и применение рекуррентных последовательностей, а также их влияние на развитие математической науки в целом. Теоретическая составляющая работы включает изучение основных теоретических аспектов рекуррентных последовательностей. Практическая составляющая работы включает примеры использования рекуррентных последовательностей в практических задачах и приложениях. Были рассмотрены конкретные примеры из различных областей.

Теория рекуррентных последовательностей является важной составной частью современной математики. Часто последовательности связаны с теорией чисел (числа Фибоначчи, дружественные числа и др.) или имеют комбинаторные “корни” (элементы треугольника Паскаля и др.). Применяемые для исследования рекуррентных последовательностей функции подробно изучаются в математическом анализе. Понятие «рекуррентность» является универсальным, часто встречаемым в разных областях знаний. Оно используется, помимо математики, в биологии (связь с миграцией фауны и флоры) и в геологии (повторение состава продуктов вулканического извержения). В психологии используют словосочетание “рекуррентный образ”, что означает образ, возникающий после того, как глаз долго смотрел на освещенный объект.

Часто при решении различных задач, как прикладных, так и теоретических, появляются последовательности. Во многих случаях мы знаем, как определяются элементы последовательности Аn при каждом значении n. Такое описание последовательностей называется явным. Однако при решении ряда задач пользуются методом нахождения n-го элемента последовательности Аn, опираясь на информацию об одном или нескольких предыдущих элементах той же последовательности. Метод сведения задачи к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется методом рекуррентных соотношений (от латинского “recurrere” - возвращаться). Другими словами, рекуррентными последовательностями называют такие последовательности, которые позволяют получить информацию о n предметах, используя информацию о $n - 1$ ($n - 2$, $n - 3$, . . .) предметах. Знакомый всем пример: арифметическая прогрессия, где каждый следующий член равен предыдущему, увеличенному на разрядность прогрессии.

История рекуррентных последовательностей (треугольника Паскаля)

Основы теории линейных рекуррентных последовательностей были даны в двадцатых годах восемнадцатого века Абрахамом де Муавром и Даниилом Бернулли. Леонард Эйлер изложил её в тринадцатой главе своего «Введения в анализ бесконечно-малых» (1748). Позднее Пафнутий Львович Чебышёв и ещё позже Андрей Андреевич Марков изложили эту теорию в своих курсах исчисления конечных разностей.

Треугольник Паскаля стал широко известен благодаря сочинению французского математика Блеза Паскаля “Трактат об арифметическом треугольнике”, изданном в 1655 году. Именно, в указанном сочинении была опубликована таблица, в которой каждое число A было равно сумме предшествующего числа в том же, что и A, горизонтальном ряду, и предшествующего числа в том же, что и A, вертикальном ряду.

Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи (строка Фибоначчи) — числовая последовательность, первые два числа которой являются 0 и 1, а каждое последующее за ними число является суммой двух предыдущих. Представляет собой частный пример линейной рекуррентной последовательности (рекурсии).

Леонардо Пизано, по прозвищу Фибоначчи, — итальянский математик — родился в Пизе в 1170 году. Леонардо Пизанский считается самым первым крупным математиком в истории средневековой Европы. Его отец работал в торговом порту на северо-востоке Алжира и часто путешествовал. Фибоначчи изучал математику и учился у самых продвинутых учителей того времени - арабов. Во время обширных путешествий познакомился с индийско-арабской системой счисления. Именно благодаря Фибоначчи, в Европе появились десятичная система счисления и арабские цифры, которыми мы пользуемся до сих пор. Оттуда математик узнал и о числовой последовательности, которую в древней Индии использовали в стихосложении. В одном из своих трудов Леонардо Пизанский приводит уникальную закономерность чисел, которые при постановке в ряд образуют линию цифр, каждая из которых является суммой двух предыдущих чисел.

Задача о кроликах

Сам Леонардо Пизанский предложил знаменитую последовательность в виде «задачи о кроликах». Он рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, где условия таковы: изначально дана новорождённая пара кроликов (самец и самка); со второго месяца после своего рождения кролики начинают спариваться и производить новую пару кроликов, причём уже каждый месяц; кролики никогда не умирают, — а в качестве искомого выдвигает количество пар кроликов через год.

Таким образом в конце n-го месяца количество пар кроликов будет равно количеству пар в предыдущем месяце плюс количеству новорождённых пар, которых будет столько же, сколько пар было два месяца назад.

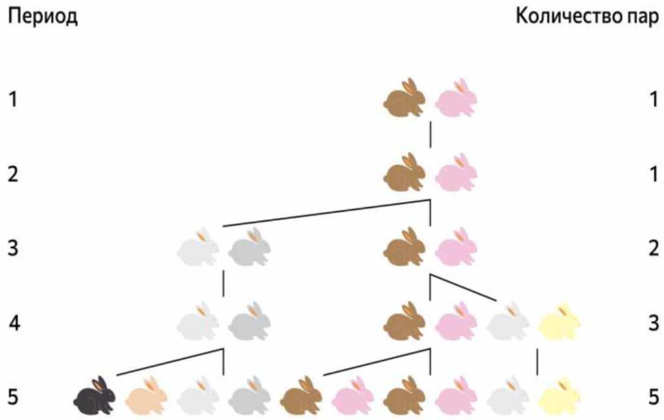

Рисунок 3. Визуализация задачи о кроликах

Математически решение задачи описывается формулой:

Fn = Fn–2 + Fn–1, где F0=0, F1=1, а n — больше или равно 2 и является целым числом.

Рассчитанная по этой формуле последовательность выглядит так:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

Каждое число из ряда Фибоначчи, разделенное на предыдущее, имеет значение, стремящееся к уникальному показателю, которое составляет 1,618. Первые числа ряда Фибоначчи не дают настолько точное значение, однако по мере нарастания, соотношение постепенно выравнивается и становится все более точным.

Где используются числа Фибоначчи

Из-за своего повсеместного применения в природе, золотое сечение (именно так число Фибоначчи иногда называют в искусстве и математике) считается одним из самых гармонизирующих законов мироздания. Правило золотого сечения применяется природой для образования траекторий движения вихревых потоков в ураганах, при образовании эллиптических галактик, при «строительстве» раковины улитки или ушной раковины человека, направляет движение косяка рыб и показывает траекторию движения испуганной стаи оленей, врассыпную убегающую от хищника.

Практическое применение

Существуют различные практические задачи, приводящие к необходимости построения периодической последовательности большого периода. Одна из них связана с радиолокацией. Например, чтобы определить положение движущегося объекта в атмосфере и пространстве, используется радиолокатор, антенна которого излучает электромагнитную энергию узким пучком. В данном случае нам необходима последовательность большого периода, которая фиксирована и хорошо известна исследователям.

В современных криптографических протоколах часто используются последовательности псевдослучайных чисел (ПСЧ). ПСЧ-последовательности с большим периодом необходимы для генерации ключей шифрования, создания электронных подписей, аутентификации и других операций, связанных с обеспечением безопасности информации.

Наше короткое исследование теоретических основ и практических приложений рекуррентных числовых последовательностей позволяет утверждать, что данный раздел математики обладает высоким исследовательским потенциалом, позволяет привлекать к самостоятельной творческой работе в этой области не только ученых и профессионалов в сфере прикладных наук, но и достаточно широкий спектр людей, интересующихся математикой. Спасибо за внимание!

Список использованных источников:

1. *Н. Н. Воробьёв. Числа Фибоначчи. — Наука, 1978. – Дата доступа: 14.04.2023*
2. *А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности. — Гос. Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1950 – Дата доступа: 14.04.2023*
3. *А. Н. Рудаков. Числа Фибоначчи и простота числа — 2000 – Дата доступа: 14.04.2023*

4. Дональд Кнут, Роналд Грэхем, Орен Паташник. Конкретная математика. Грант Аракелян. Математика и история золотого сечения. — М.: Логос, 2014 – Дата доступа: 14.04.2023