УДК

ИССЛЕДОВАНИЕ УНИКАЛЬНОСТИ ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА ЧЕРЕЗ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Егоров А.С., Захвей И.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. - канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. Данная статья рассматривает уникальность гипотезы Коллатца через коэффициенты, отличные от числа 3. В статье проиллюстрированы графики найденных циклов в декартовой и полярной системах координат.

В 1957 году один немецкий математик Лотар Коллатц предположил гипотезу, которая имеет несколько названий:

- Гипотеза Коллатца,
- проблема Уолтера Сиджеруса,
- дилемма 3n+1,
- сиракузская проблема.

С исследованиями Лотару помогал Ульрих Синговиц. Их работа положила начало спектральной теории графов [1].

Формулировка Гипотезы: Любое целое положительное число можно привести к 1, используя простые правила [2]:

1. Если число чётное, разделите его на 2. Иначе умножьте его на 3 и прибавьте 1.

2. Повторите шаг 1 с полученным числом.

Хотя эта гипотеза кажется простой, ее верность до сих пор не была доказана для всех положительных целых чисел [3].

Цель данного исследования заключается в том, чтобы рассмотреть уникальность этой задачи и сделать за счет этого выводы.

Для начала рассмотрим простой пример: возьмем любое число и подставим его в наш алгоритм из гипотезы Коллатца. Пусть x = 13

13 -> 40 -> 20 -> 10 -> 5 -> 16 -> 8 -> 4 -> 2 -> 1 -> 4

Заметим, что 4 повторилась дважды, следовательно, мы пришли к циклу 4 -> 2 -> 1, который, как не сложно догадаться будет повторяться бесконечное количество раз.

Хотелось бы заметить, что после каждой итерации 3n + 1 получается четное число, а затем делим его *a* раз на 2, пока оно не станет снова нечетным. Данное рассуждение можно представить в виде следующего выражения:

$$\frac{3n+1}{2^a} \tag{1}$$

Тем самым это упростило нашу цепочку, исключив из неё четные числа.

В итоге для нашего числа 13 получим вот такую цепочку:

(13 -> 5 -> 1)

Данная манипуляция помогла нам сократить нашу цепочку в 3 раза (в среднем столько и получается).

Благодаря этому приему мы ускорили процесс нахождения таких чисел и смогли построить интересные изображения, используя всего лишь домашний стационарный компьютер, а не супермашины:

На данном изображении (рис.1) фиолетовые точки – это числа, а ветви – путь к корню дерева (т.е. к числу 1). Стоит заметить: из-за того, что мы сократили задачу, убрав из неё четные числа, ветки получились более грубыми. Это и помогло нам оптимизировать построение на более простых компьютерах

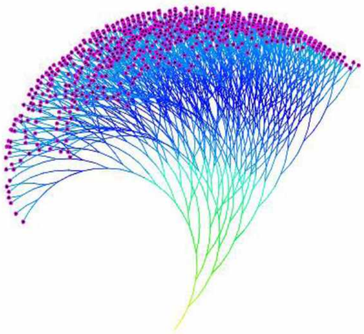

Рисунок 1 – Визуализация дерева схождения чисел к 1

Используя формулу (1) мы смогли получить красивое изображение фрактала для данной гипотезы (рис.2).

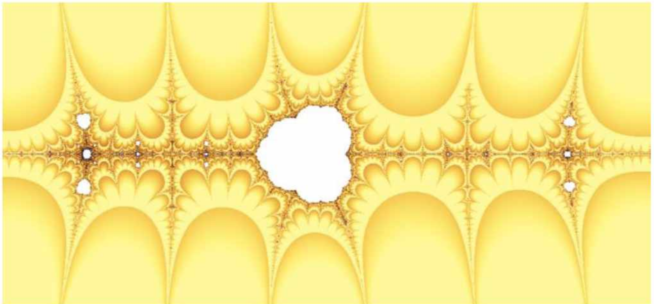

Рисунок 2 – Фрактал, полученный для гипотезы Коллатца

Далее мы решили доказать, что гипотеза Коллатца действительно является поистине уникальной.

Давайте задумаемся почему именно 3n + 1? Неужели именно коэффициент 3 дает нам эту уникальность, которая приводит все числа к 1.

Например, если взять коэффициент 7 и взять число 5, то мы получим цикл {5,9,1}. И в итоге у нас получится прийти к 1. Однако это только один из примеров, и судить по нему было бы неверно. Давайте поставим задачу найти все такие нечётные множители (коэффициенты) *k*, для которых существуют циклы. Для ускорения наших исследований будем использовать формулу (1), но с небольшими поправками: вместо 3 будет *k*. Начнем поиск с циклов, состоящих только из двух нечетных чисел. Таким образом, нам понадобится сделать 2 итерации.

Запишем эти рассуждения в виде выражения:

$$\frac{kn+1}{2^a}k+1=2^b n \tag{2}$$

где n — это число в цикле, k — это множитель, на который мы умножаем (в стандартной гипотезе Коллатца он равен 3), а a и b — это количество двоек, которые содержатся в промежуточных числах.

Теперь выразим n (одно из 2 чисел в цикле):

$$k^2 n + k + 2^a = 2^c n \quad , \quad c = a + b$$

$$2^a + k = n\left(2^c - k^2\right)$$

$$n = \frac{2^a + k}{2^c - k^2} \tag{3}$$

А сейчас давайте еще больше ускорим наш алгоритм нахождения данных циклов, приняв несколько допущений.

Первое, на что стоит обратить внимание, так это то, что в любой цикл, который мы ищем, входят 2 числа, которые оба подходят в уравнение с одинаковыми c и n, однако, с разными значениями а — у одного $c > 2a$, у другого $c < 2a$. Так как нам надо ускорять процесс, то мы не будем находить 2 раза один и тот же цикл, а возьмем $c > 2a$, и будем находить меньшее число в цикле.

Далее можно подчеркнуть, что для с подходит только один k: $2^a < k$ (иначе подставив c и k в формулу 1 мы получим число меньше, чем n, а ведь мы определили, что наше число n уже меньшее в цикле). Следовательно, прибавив справа и слева k, мы получим $2^a + k < 2k$, отсюда можно утверждать, что знаменатель дроби $2^c – k^2$ будет также меньше $2k$.

Исходя из всех вышесказанных нами пунктов, мы написали программу, которая нашла три цикла:
{1,3} для 5, {27,611} для 181 и {35,99} для 181. Мы решили визуализировать данные циклы на координатной плоскости (рис. 3, рис. 4, рис. 5). Для полноты картины мы взяли не только найденные два нечетных числа, но и все промежуточные четные числа. По оси Y отмечены все возможные значения, которые принимает n во время преобразований, а по оси X выбрано константное значение смещения, для наглядности.

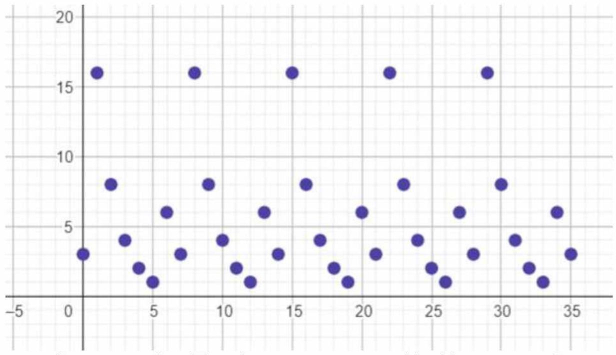

Рисунок 3 – График для цикла {1, 3} при n = 5

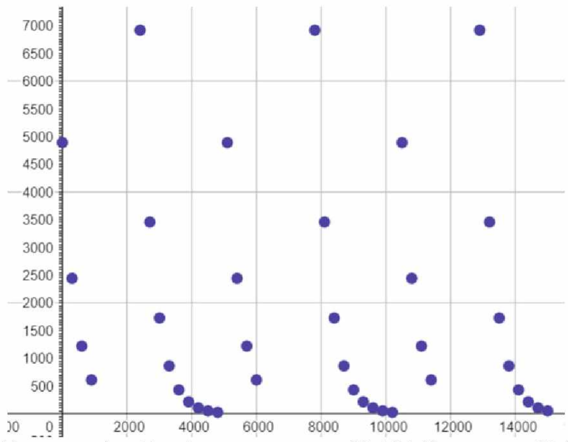

Рисунок 4 – График для цикла {27,611} при n = 181

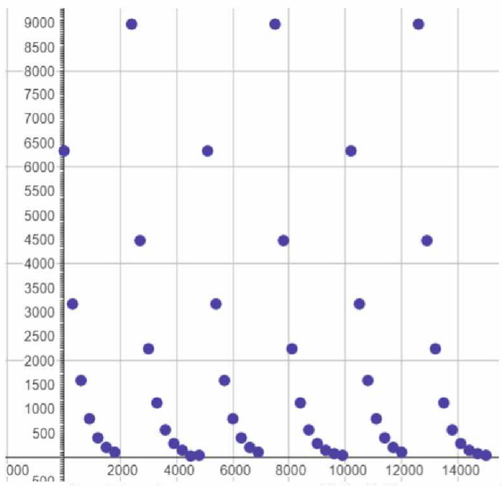

Рисунок 5 – График для цикла {35, 99} при n = 181

Заинтересовавшись графиками, мы решили проверить, как ведут себя найденные циклы в полярной системе координат. За радиус мы берем значение цикла при очередном шаге, а за угол поворота будем брать одинаковое значение, зависящее от количества чисел в полном цикле, чтобы график был от 0 до 2π.

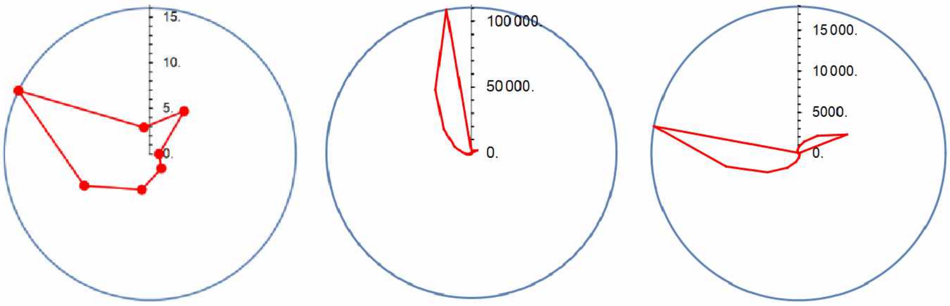

Рисунок 6 – Графики в полярных системах координат

После этого нам стало интересно вместить несколько циклов на одном графике, например 4 и 10 циклов, и у нас получились интересные графики похожие на «цветы».

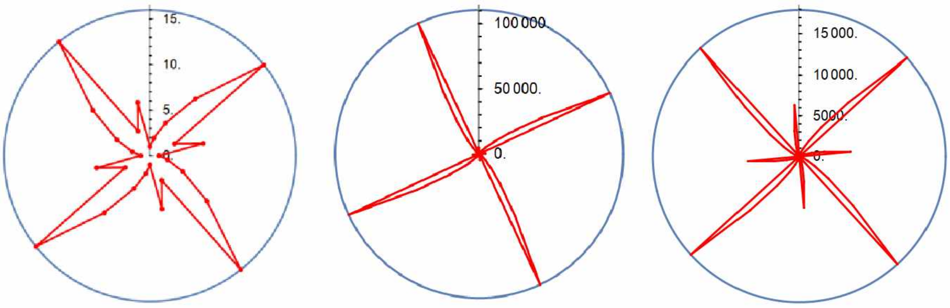

Рисунок 7 – Графики с 4 одинаковыми циклами

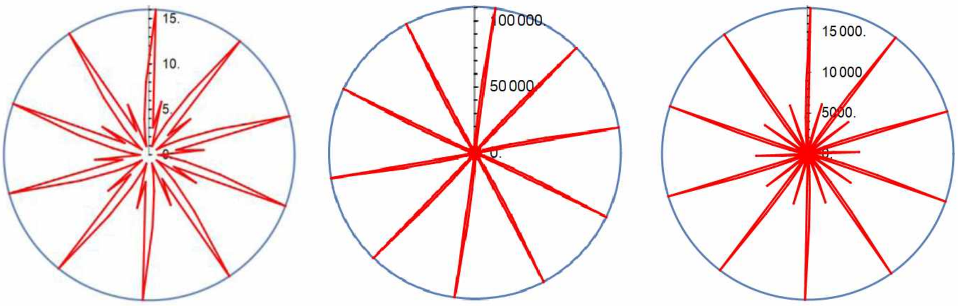

Рисунок 8 – Графики с 10 одинаковыми циклами

Графическое представление найденных циклов в координатной плоскости и полярной системе координат показывает нам уникальность и красоту гипотезы Коллатца. Позволяет наглядно увидеть закономерности в преобразовании чисел: резкие возрастания графика после нечетных значений и плавные падения графиков после этого. Также посмотрев на найденные нашей программой числа, для которых нашлись циклы, мы видим, что они подходят по той причине, что их квадраты находятся очень близко к степеням двойки 5^2 = 2^5 - 7, а 181 ^2 = 2^15 – 7. Так как наша программа проверила очень большие числа вплоть до 2^200000, можно предположить, что дальше числа не будут появляться из-за больших разрывов между квадратами коэффициентов.

Таким образом, исходя из данного исследования можно сделать вывод, что ни один из коэффициентов не привел нас к результату, подобному гипотезе Коллатца, что подтверждает ее уникальность. А, следовательно, это нам дает ещё больше уверенности в том, что она всегда приводит нас к одному и тому же результату.

Список использованных источников:

1. Collatz Conjecture [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture. – Дата доступа: 10.02.2024.

2. Even the Smartest mathematicians Can't solve the Collatz Conjecture [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://science.howstuffworks.com/math-concepts/collatz-conjecture.htm. – Дата доступа: 19.02.2024.

3. The Simplest Math Problem Could be Unsolved [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.scientificamerican.com/article/the-simplest-math-problem-could-be-unsolvable/. – Дата доступа: 05.03.2024.

UDC

INVESTIGATION OF THE UNIQUENESS OF THE COLLATZ HYPOTHESIS THROUGH COEFFICIENTS

Egorov A.S., Zahvey I.V.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Barkova E.A. - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Annotation. This article examines the uniqueness of the Collatz hypothesis through coefficients other than the number 3. The article illustrates the graphs of the cycles found in Cartesian and polar coordinate systems.