УДК

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ БИНОМА НЬЮТОНА И ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПАСКАЛЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СТЕПЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ

Галуха П. А., студент гр. 351005, Емельяненко Е. Д., студент гр. 351002

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Данная работа посвящена исследованию бинома Ньютона и треугольников Паскаля при различных степенных показателях.

Бином Ньютона, треугольник Паскаля, биномиальный коэффициент.

Бином Ньютона – математическое выражение, которое представляет собой разложение бинома в степень. Бином Ньютона назван так в честь английского математика и физика Исаака Ньютона, который разработал эту формулу.

Формула бинома Ньютона выглядит следующим образом:

$$(a+b)^n = C_0^n a^n b^0 + C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_{n-1}^n a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n, \tag{1}$$

где a и b – числа, а n – натуральное число, которое называется показателем степени. C_k^n обозначает биномиальный коэффициент или число сочетаний, равное количеству способов выбрать k элементов из n элементов без учета порядка.

Вне зависимости от культуры или народа, наличия письма или знания о том, как записывать числа, в каждой части света можно было увидеть очертания треугольника Паскаля. Треугольник из других культур представлен на рисунке 1.

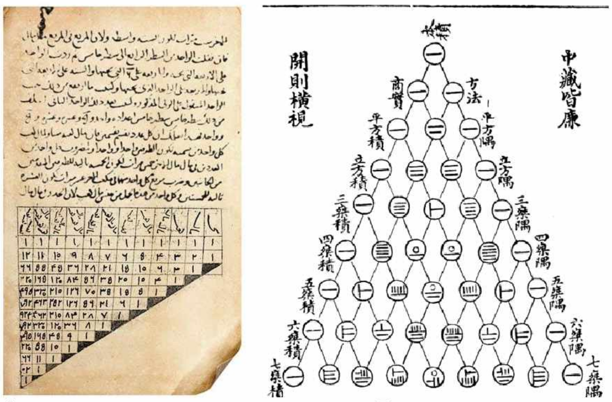

Рисунок 1 – представление треугольника Паскаля в других культурах

Треугольник Паскаля (арифметический треугольник) – бесконечная таблица, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Треугольник представлен на рисунке 2.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Рисунок 2 – треугольник Паскаля

При подстановке натуральных чисел вместо переменной n в выражение $(a+b)^n$, мы наблюдаем, что коэффициенты перед одночленом $a^x * b^y$ в разложении образуют треугольник Паскаля, где n – номера ряда треугольника. Данный треугольник позволяет пропустить скучные вычисления и найти биномиальные коэффициенты.

Рассмотрим выражение вида $(x+1)^n$. Вместо коэффициентов C_k^n подставим их значения:

$$(x+1)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots \quad (2)$$

Данный треугольник образуется из коэффициентов перед аргументами и свободных членов многочлена в случае, если степень многочлена – неотрицательная. Но как треугольник будет выстраиваться в случае, если многочлен возводится в отрицательную степень?

Попробуем подставить под наше выражение $n = -1$:

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + \frac{-1(-1-1)x^2}{2!} + \frac{-1(-1-1)(-1-2)x^3}{3!} + \cdots \quad (3)$$

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (4)$$

Коэффициенты нашего ряда при n натуральном рано или поздно становились равным 0 и наш ряд был конечен, но при n отрицательном ряд будет иметь бесконечное число слагаемых.

Для доказательства, что формула работает для $n < 0$, проведём аналогию с бесконечно убывающей геометрической прогрессией:

$$\frac{b1}{1-q} = 1 + b1 + b2 + b3 + \cdots \quad (5)$$

$$\frac{b1}{1-q} = 1 + b1 + b1q + b1q^2 + \cdots, \quad (6)$$

где $b1$ – действительное число, а q – знаменатель прогрессии и $|q| < 1$.

Получаем $b1 = 1$, $q = -x$. То есть наш ряд будет верным при $|x| < 1$.

Дополним ряд нашего треугольника Паскаля, заменив единицу сверху чередующимися $1 - 1\ 1 - 1$ ... Треугольник, дополненный рядом с номером -1, представлен на рисунке 3.

1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

1 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0

1 3 3 1 0 0 0 0 0 0 0

1 4 6 4 1 0 0 0 0 0 0 0

1 5 10 10 5 1 0 0 0 0 0 0

1 6 15 20 15 6 1 0 0 0 0 0 0

1 7 21 35 35 21 7 1 0 0 0 0 0

1 8 28 56 70 56 28 8 1 0 0 0 0 0

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 0 0 0 0

Рисунок 3 – треугольник Паскаля, дополненный рядом с номером -1

Если дальше продолжить высчитывать ряды с отрицательными показателями степени как с помощью бинома, так и просто просчитывая, какие числа дадут в сумме нижестоящие, то можем продолжить наш треугольник Паскаля. Треугольник, дополненный отрицательными рядами, представлен на рисунке 4.

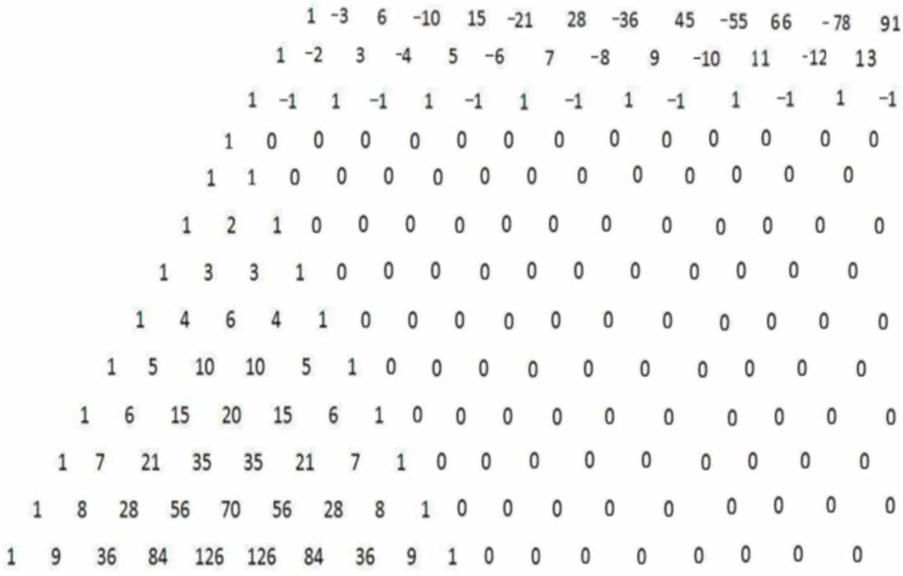

Рисунок 4 – треугольник Паскаля, дополненный отрицательными рядами

Если не учитывать знак, можно заметить, что верхний треугольник симметричен нижнему, что наводит на мысль, что наши дроби можно раскладывать на бесконечные ряды, при этом высчитывая их коэффициенты через треугольник Паскаля.

До этого мы работали лишь с целыми числами: неотрицательными и отрицательными. А как будет выглядеть треугольник Паскаля, если степень представляет собой дробное число?

Вместо n подставим дробный показатель $\frac{1}{2}$:

$$(x+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots \qquad (7)$$

Дополним треугольник промежуточными рядами дробными числами со знаменателем 2. Треугольник, дополненный дробным рядом, представлен на рисунке 5.

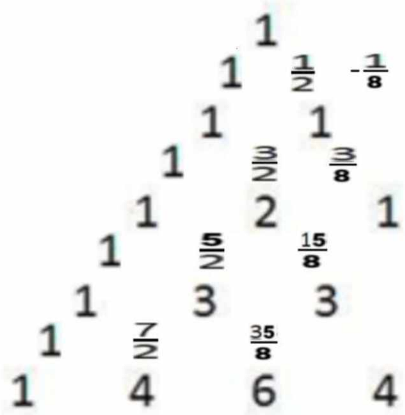

Рисунок 5 – треугольник Паскаля, дополненный дробным рядом

По аналогии дополняем наши ряды рациональными и иррациональными числами получая бесконечные ряды треугольника Паскаля.

Исследование позволило расширить наше понимание бинома Ньютона и треугольников Паскаля, доказать, что бином Ньютона работает не только для натуральных чисел, изучить зависимость значений коэффициентов многочленов в зависимости от их степени, а также использовать их свойства для решения математических задач.

Список использованных источников:

1. Negative Binomial Theorem [Электронный ресурс]. – режим доступа: https://brilliant.org/wiki/negative-binomial-theorem – Дата доступа: 08.04.2024.

2. Negative Binomial Series [Электронный ресурс]. – режим доступа: https://mathworld.wolfram.com/NegativeBinomialSeries.html – Дата доступа: 08.04.2024.