

## РОСТ ДЕРЕВА (ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА)

*Кульбако А. Е., Драб А. А., студенты гр.378105*

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь*

*Лобанок Л. В. – старший преподаватель*

**Аннотация.** Рассматриваются и исследуются математические модели роста деревьев, построенные на основе балансовых соотношений, в условиях получения свободной энергии, которая расходуется на процесс фотосинтеза, построение живой ткани и на подъем раствора из почвы. Исследование направлено на выявление и анализ математических закономерностей, определяющих процесс роста деревьев в зависимости от различных факторов, таких как климатические условия, почва, доступность воды и питательных веществ. Полученные результаты могут быть полезны как для понимания механизмов роста растений в естественных экосистемах, так и для разработки стратегий управления и охраны лесных ресурсов с целью сбалансированного использования и сохранения биоразнообразия.

**Ключевые слова.** Модель роста дерева, анализ математических закономерностей.

Лесной массив – это не только древесно-кустарниковая растительность и травы, это еще и сотни различных живых существ. Вырубка леса – это одна из самых распространенных проблем экологии. С уничтожением деревьев в системе биогеоценоза нарушается экологическое равновесие. Неконтролируемое уничтожение лесов очень приводит к следующим негативным последствиям:

-Исчезают некоторые виды флоры и фауны.

-Снижается видовое разнообразие.

-В атмосфере начинает возрастать количество диоксида углерода (про последствия глобального потепления).

-Возникают почвенные эрозии, которые приводят к образованию пустынь.

-В местах с высоким уровнем грунтовых вод начинается заболачивание.

-Проблема очищения и насыщения воздуха кислородом.

Однако благодаря современным методам лесного хозяйства и усилиям по сохранению природных ресурсов, активное восстановление леса становится важным шагом в защите окружающей среды и обеспечении устойчивого развития. К таким методам относятся:

-Естественное обновление. При таком подходе лесные угодья оставляются без человеческого вмешательства, и естественные процессы восстановления запускаются сами по себе, что позволяет природе самой определить порядок обновления и распределение растительности.

-Искусственный посадочный материал (саженцы и семена). Для восстановления леса таким способом важно подбирать местные, адаптированные к условиям региона растения, чтобы обеспечить их успешное приживание и интеграцию в естественную среду.

-Создание лесопосадок. Лесопосадки — это практика создания новых лесных участков на территориях, где лес был полностью вырублен или деградирован. При их создании учитываются особенности местности, восстанавливается не только растительный покров, но и воссоздаются природные экосистемы с их характерным разнообразием животного мира.

-Защита природного восстановления. Чтобы способствовать природному восстановлению лесов после вырубки, необходимо защищать области, которые находятся в процессе естественного обновления.

-Мониторинг и оценка. Следует уделять внимание постоянному мониторингу состояния восстанавливающихся лесных угодий и оценке эффективности применяемых методов восстановления. Это поможет оптимизировать подходы и принимать своевременные коррективные меры при необходимости.

Исследование закона роста деревьев любой породы учитывает сохранение геометрического подобия зрелого растения в процессе его развития. Свободная энергия, или активное вещество, необходимое для роста дерева, обеспечивается путем фотосинтеза. Эта энергия расходуется на фотосинтез, на формирование живой ткани в процессе роста и на транспортировку растворов из почвы. На протяжении больших временных интервалов растение получает постоянное количество света на единицу поверхности и способно ассимилировать необходимые вещества из неограниченного запаса.

Допустим, у нас есть дерево, размер которого меняется со временем. Для удобства обозначим его линейный размер как  $x = x(t)$ . Этот размер может служить для описания высоты дерева, площади его зеленой части и объема растения.

Для того чтобы понять энергетический баланс дерева, мы можем рассмотреть процесс фотосинтеза. Под воздействием света зеленая часть растения производит свободную энергию  $E_p$ . Энергия,

синтезированная в результате фотосинтеза, зависит от площади зеленой части дерева и увеличивается пропорционально ее поверхности.

$$E_n = k_1 x^2 \quad (1)$$

Где  $k_1$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров и формы листвы, а также от интенсивности фотосинтеза;  $x^2$  – площадь поверхности зеленой части.

Расход энергии на:

а) процесс фотосинтеза пропорционален  $x^2$ , т.е.

$$E_{\text{синт}} = k_2 x^2 \quad (2)$$

где  $k_2$  – коэффициент пропорциональности ( $k_2 < k_1$ );

б) транспортировку питательного раствора во все части растения пропорционален объему растения и высоте  $x$ , так как расход связан с преодолением силы тяжести, т.е.

$$E_{\text{тр.р}} = k_3 x^3 \cdot x = k_3 x^4 \quad (3)$$

в) увеличение массы растения (на рост) пропорционален скорости роста, т.е. производной по времени от массы,

$$m = \gamma x^3 \quad (4)$$

где  $\gamma$  – средняя плотность растения,  $x^3$  – объем, т.е.

$$E_p = k_4 \frac{dm}{dt} = k_4 \frac{d}{dt} (\gamma x^3) \quad (5)$$

На основании закона сохранения энергии расход энергии равен ее поступлению, откуда

$$E_n = E_{\text{синт}} + E_{\text{тр.р}} + E_p \quad (6)$$

или

$$k_1 x^2 = k_2 x^2 + k_3 x^4 + k_4 \gamma \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad (7)$$

Уравнение (7) делим на  $3k_4 x^2$  и, вводя обозначения  $\frac{k_1 - k_2}{3k_4 \gamma} = \alpha$ ,  $\frac{k_3}{3k_4 \gamma} = \beta$ , получаем дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta x^2 \quad (8)$$

Здесь  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Дерево растет, и производная  $\frac{dx}{dt} > 0$ , т.е.  $\alpha - \beta x^2 > 0$  и  $x^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ . Разделим переменные в уравнении (8), тогда

$$\frac{dx}{\alpha - \beta x^2} = dt \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), получаем

$$\int \frac{dx}{\alpha - \beta x^2} = t + C \quad (10)$$

Интеграл в левой части равенства (10) находим методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{dx}{\alpha - \beta x^2} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dx}{\frac{\alpha}{\beta} - x^2} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + x\right)}, \quad (11)$$

Так как подынтегральная функция

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + x\right)} = \frac{A}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - x} + \frac{B}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + x}, \quad (12)$$

то

$$(A-B)x + (A+B)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \quad (13)$$

и решение системы

$$\left. \begin{aligned} A-B &= 0 \\ (A+B)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

дает значения неопределенных коэффициентов

$$A=B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (15)$$

Подставляя значения (15) в новое выражение (12) подынтегральной функции крайнего правого интеграла (11), имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \left( \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-x}} + \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \left[ \int \frac{d(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+x})}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+x}} - \int \frac{d(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-x})}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-x}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+x}}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-x}} \quad (14)$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+x}}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-x}} = t + C \quad (15)$$

Начальное условие: при  $t=t_0$   $x=0$ .

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln 1 = t_0 + C \quad (16)$$

или

$$C = -t_0 \quad (17)$$

Постоянную интегрирования (17) подставляем в общий интеграл (15)

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+x}}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}-x}} = 2\sqrt{\alpha\beta} (t-t_0) \quad (18)$$

откуда закон роста дерева

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\alpha\beta}(t-t_0)} - 1}{1 + e^{2\sqrt{\alpha\beta}(t-t_0)}} \quad (19)$$

Так как для каждой породы величина  $\alpha$  и  $\beta$  известны, то теперь можно вычислить средний рост дерева данной породы в зависимости от возраста, т.е. от времени  $t$ .

Исследуем этот закон при изменении  $t$ .

Дифференцируем уравнение (8), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\beta x \quad (20)$$

Так как высота дерева всегда положительна, то  $x > 0$  и  $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$ .

Таким образом, функция (19) представляет возрастающую вогнутую кривую (рис.1).

Применяя к функции (19) правило Лопиталья, видим, что предел функции  $x(t)$   $t \rightarrow \infty$  равен

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\alpha\beta} e^{2\sqrt{\alpha\beta}(t-t_0)}}{2\sqrt{\alpha\beta} e^{2\sqrt{\alpha\beta}(t-t_0)}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot 1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (21)$$

Величина  $x = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ , при которой  $\frac{dx}{dt} = 0$ , соответствует случаю, когда поступающая энергия расходуется на процесс фотосинтеза и транспортировку питательного раствора, а дерево при этой не растет.

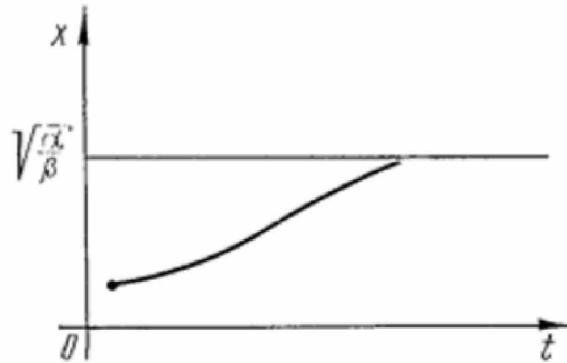


Рис. 1

Зависимость (19) дает ответ на вопрос, почему деревья любой породы сначала растут быстро, а потом их рост замедляется, пока совсем не прекратится.

Исследование закона роста деревьев любой породы позволяет более глубоко понять энергетический баланс растения, учитывая процессы фотосинтеза и расход энергии на различные аспекты его жизнедеятельности. Полученное уравнение роста дерева представляет собой возрастающую вогнутую кривую, что соответствует ожиданиям, учитывая природу процесса роста деревьев.

Таким образом, полученный результат может быть использован для моделирования роста деревьев различных пород и оценки их роста в различных условиях окружающей среды. С помощью найденного математического закона можно определить, сколько энергии требует дерево, чтобы вырасти, и какие условия в окружающей среде влияют на эти параметры. Данные выводы дают нам понять, какова настоящая цена одного дерева и какой урон приносит человек, срубая дерево.

Это имеет практическое значение для лесного хозяйства, позволяя более эффективно управлять лесными ресурсами и способствовать сохранению экосистемы. В долгосрочной перспективе такие исследования могут способствовать более эффективному восстановлению вырубленных лесов и сохранению биоразнообразия.

Берегите природу ❤️

**Список использованных источников:**

1. Федотов Модели роста и взаимодействия деревьев /С. Б. Медведев, А. И. Пестунов, И. А. Пестунов, А.М. – Новосибирск, 2015, с 1.
2. Муниципальное казенное учреждение «Талданский сельсовет» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://https://taldan.ru/ad.php?id\\_obyavleniya=112&copylenco=ads](http://https://taldan.ru/ad.php?id_obyavleniya=112&copylenco=ads). – Дата доступа: 12.04.2024.
3. Все о переработке вторсырья и утилизации отходов – режим доступа: [https://rcycle.net/ekologiya/vyrubka-lesov/puti-resheniya-problemy-kak-izbehat-massovoj-gibeli-derevev-i-ee-negativnyh-posledstvij?\\_\\_cf\\_chl\\_tk=5xDnpWXEGnn.S\\_k4Z5WsAITSEJHw2c8zurVvDEGI00U-1712949498-0.0.1.1-1578](https://rcycle.net/ekologiya/vyrubka-lesov/puti-resheniya-problemy-kak-izbehat-massovoj-gibeli-derevev-i-ee-negativnyh-posledstvij?__cf_chl_tk=5xDnpWXEGnn.S_k4Z5WsAITSEJHw2c8zurVvDEGI00U-1712949498-0.0.1.1-1578) – дата доступа: 12.04.2024
4. Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений: учеб. пособие /Пономарев К. К. – изд. №70-92 – Минск, «Вышэйшая школа», 1973. – 145-149 с.

UDC

## TREE GROWTH (ECOLOGICAL TASK)

Kulbako A. E., Drab A. A., students gr.378105

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Lobanok L.V. – Senior lecturer

**Annotation.** Mathematical models of tree growth based on balance ratios are considered and investigated in conditions of obtaining free energy, which is spent on the process of photosynthesis, the construction of living tissue and the lifting of solution from the soil. The research is aimed at identifying and analyzing mathematical patterns that determine the process of tree growth depending on various factors such as climatic conditions, soil, availability of water and nutrients. The results obtained can be useful both for understanding the mechanisms of plant growth in natural ecosystems and for developing strategies for managing and protecting forest resources in order to balance the use and conservation of biodiversity.

**Keywords.** Tree growth model, analysis of mathematical patterns.