ПАРАДОКС БЕРТРАНА

Наривончик А.М., студент гр.351004, Головко Р.С., студент гр.351001

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию парадокса Бертрана: изучение истории происхождения, попытки обоснования парадокса, а также поиск действительной причины его возникновения.

Ключевые слова. Жозеф Луи Франсуа Бертран, теория вероятности, парадокс, окружность, хорда, равносторонний треугольник, модуляция, распределение хорд, «принцип максимального безразличия», инвариантность.

1. История происхождения парадокса

В 1888 году французский математик Жозеф Луи Франсуа Бертран в своей работе «Calcus des propabilites» описал парадокс. Он сформулировал задачу: «Пусть дана окружность, в которую вписан равносторонний треугольник, какова вероятность, что проведенная в этой окружности хорда окажется длиннее стороны треугольника?», и затем предложил 3 метода её решения [1].

В первом методе математик предложил выбрать две точки на окружности и в одной из них расположить вершину треугольника. При данной постановке задачи «длинным» окажутся те хорды, концы которых лежат на дуге, протеволежащей вершине, из которой проведена хорда, и ограниченной двумя другими вершинами треугольника. Длина дуги составляет 1/3 от длины окружности, следовательно, и вероятность в данном случае равна 1/3 или же 33%. Данный способ построения хорды, Бертран назвал методом «Случайных концов» (рисунок 1.1).

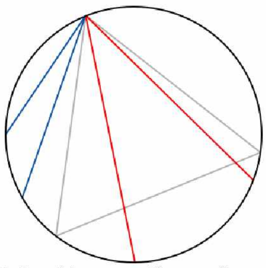

Рисунок 1.1 – Метод «Случайных концов»

Во втором методе Бертран предложил выбрать точку на площади круга и строить хорду таким образом, чтобы эта точка являлась центром хорды. При данной постановке задачи «длинными» окажутся те хорды, центр которых будет находиться внутри круга, вписанного в равносторонний треугольник. Вероятность в данном случае Бертран вычислил, как отношение площадей малого круга к большему, и в результате получил вероятность 1/4 или 25%. Данный способ построения хорды, Бертран назвал методом «Случайного центра» (рисунок 1.2).

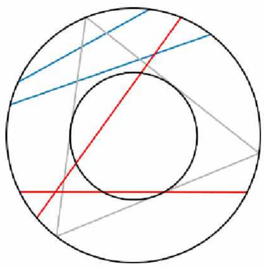

Рисунок 1.2 – Метод «Случайного центра»

В третьем методе Бертран предложил провести радиус и выбрать точку на нем, данная точка будет являться центром хорды. На рисунке видно, что «длинные» хорды находятся между центром круга и строной треугольника, перпендикулятной радиусу. Вероятность в данном случае Бертран вычислил как отношение длины радиуса, ограниченного стороной, ко всей длине радиуса, и в результате получил 1/2 или 50%. Данный способ построения хорды, Бертран назвал методом «Случайного радиуса» (рисунок 1.3).

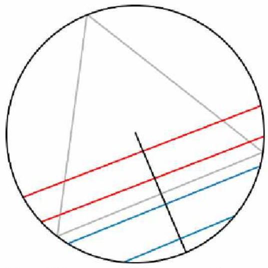

Рисунок 1.3 – Метод «Случайного радиуса»

2. Исследование парадокса

Очевидно, что Бертран перечислил не все методы построения случайной хорды. Отличительной особенностью его решений является выбор точек, лежащих только внутри круга (на радиусе или на окружности). В качестве случайной можно взять точку, вообще не связанную с окружностью. Тогда отрезок секущей, проходящей через эту точку, образует хорду. Реализовать такое построение можно несколькими способами.

2.1. Точка вне круга на плоскости и точка на дуге окружности

Выбирается точка на плоскости, лежащая вне круга. Из этой точки строятся касательные к окружности, выбирается случайная точка на дуге этой окружности, заключенная между точками касания (своеобразное ограничение метода Бертрана), а затем через них можно провести секущую. Отрезок секущей – случайная хорда (рисунок 2.1).

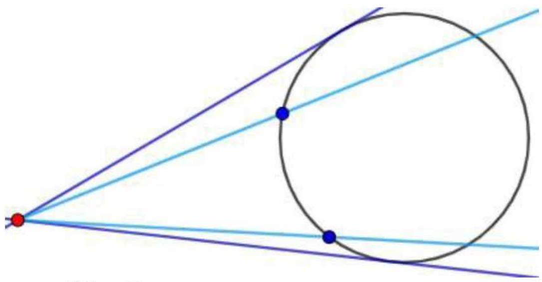

Рисунок 2.1 – Построение хорды с помощью метода 1

Модуляция построения с помощью приложения на языке Delphi дает соответствующее методу распределение хорд по окружности и вычисляет итоговую вероятность образования длинной хорды (рисунок 2.2). Вероятность приблизительно равна 33%.

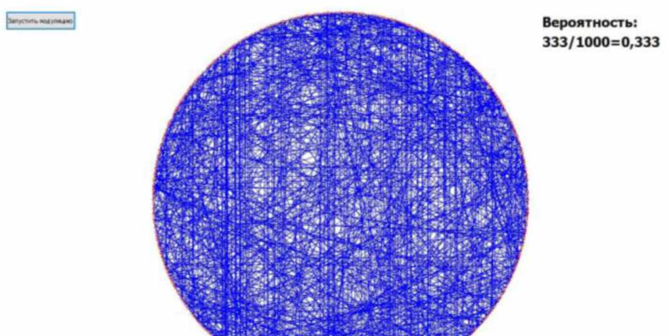

Рисунок 2.2 – Распределение хорд по окружности для метода 1

2.2.Точка вне круга на плоскости и случайный угол

Выбирается точка на плоскости, лежащая вне круга. Из этой точки строятся касательные к окружности, задаётся случайный угол, а затем, откладывая от одной из касательных угол, можно провести секущую (рисунок 2.3).

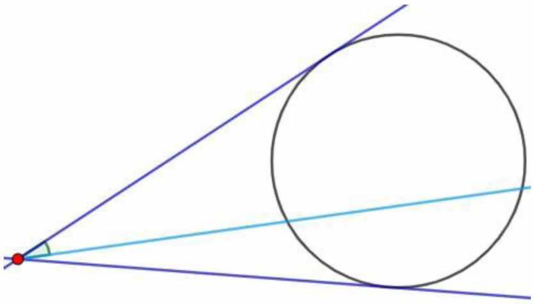

Рисунок 2.3 – Построение хорды с помощью метода 2

Модуляция построения с помощью приложения дает следующее распределение хорд по окружности и вероятность – около 50% (рисунок 2.4).

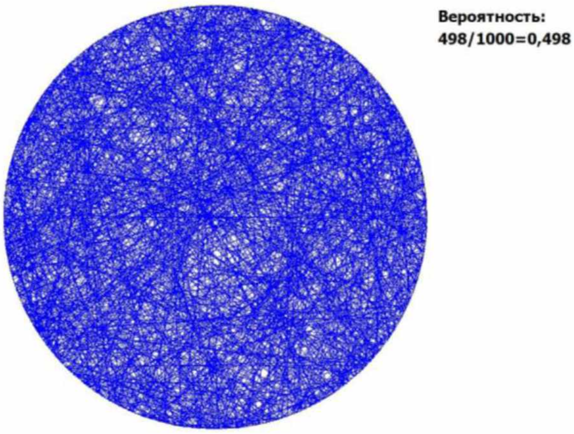

Рисунок 2.4 – Распределение хорд по окружности для метода 2

2.3.Точка вне круга на плоскости и точка на диаметре

Выбирается точка на плоскости, лежащая вне круга, и точка на диаметре окружности. Через них может быть построена единственная секущая, отрезок которой образует хорду (рисунок 2.5).

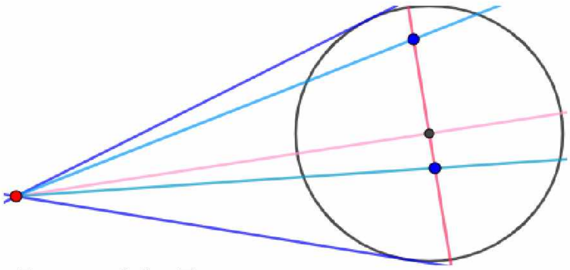

Рисунок 2.5 – Построение хорды с помощью метода 3

Модуляция построения с помощью приложения на языке Delphi дает следующее распределение хорд по окружности и вероятность – около 50% (рисунок 2.6).

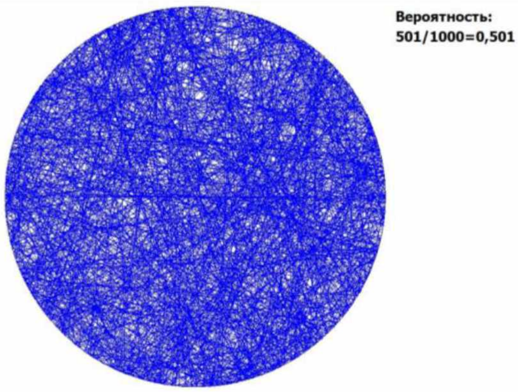

Рисунок 2.6 – Распределение хорд по окружности для метода 3

2.4.Точка вне круга на плоскости и точка внутри круга

Выбирается точка на плоскости, лежащая вне круга, и точка внутри круга. Через них строится единственная секущая, отрезок которой образует хорду (рисунок 2.7).

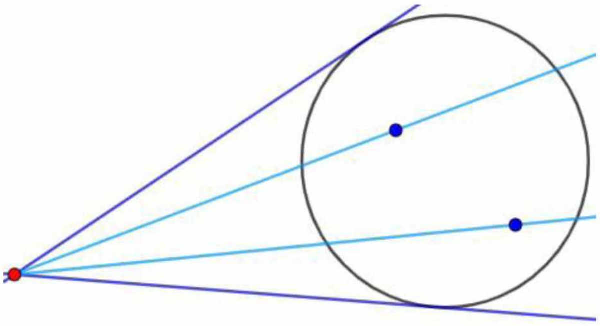

Рисунок 2.7 – Построение хорды с помощью метода 4

Модуляция построения с помощью приложения дает следующее распределение хорд по окружности и вероятность – около 60% (рисунок 2.8).

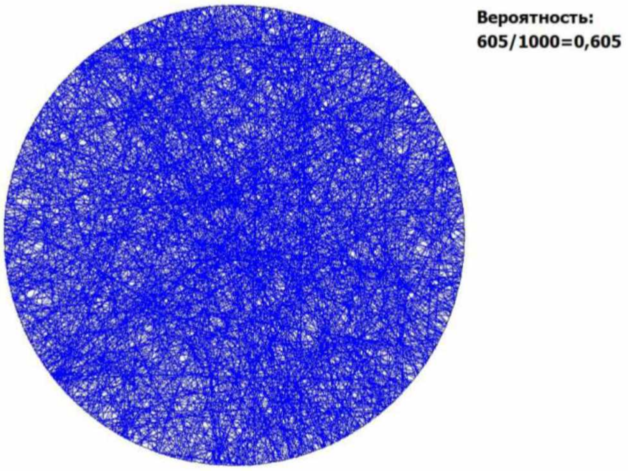

Рисунок 2.8 – распределение хорд по окружности для метода 4

Можно привести доказательство для данного метода. На рисунке 2.9 видно, что «длинными» окажутся хорды, проведенные через точку внутри круга, расположенную между касательными к окружности, вписанной в правильный треугольник.

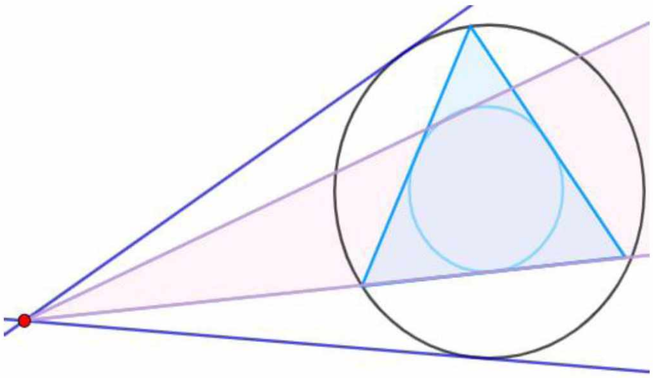

Рисунок 2.9 – Доказательство вероятности для метода 4

Случайная точка вне круга может быть удалена на любое расстояние. Можно рассмотреть предельный случай, когда точка лежит практически на окружности (рисунок 2.10).

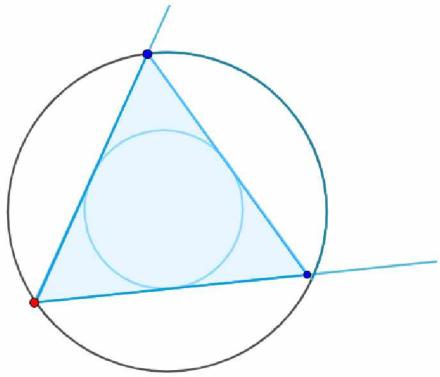

Рисунок 2.10 – Доказательство вероятности для метода 4

Видно, что площадь, на которой нужно задать точку для построения «длинной» хорды, представляет собой правильный треугольник и 1 из 3 сегментов круга, отсекаемых этим треугольником.

$$S\text{т} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2 * \sqrt{3}}{4}, \quad (1)$$

где Sт – площадь треугольника, а R – радиус описанной окружности.

$$S\text{к} = \pi R^2, \quad (2)$$

где Sк – площадь круга, R – его радиус.

$$S\text{с} = \frac{S\text{к} - S\text{т}}{3}, \quad (3)$$

где Sс – площадь сегмента.

$$\frac{S\text{т} + S\text{с}}{S\text{к}} \approx 60{,}9\% \quad (4)$$

Искомая вероятность оказывается равной 60,9%.

Можно доказать, что при удалении одной из точек на любое расстояние от окружности, площадь, характерная для «длинных» хорд остается постоянной, а значит и вероятность – 60,9%. Стоит отметить, что данным методом получено новое решение парадокса Бертрана.

3. В чем же дело?

Ответить на этот вопрос можно, если присмотреться к последним четырём методам построения. Все эти методы отличает только один входной параметр: 1 метод – выбор точки на дуге окружности, 2 метод – выбор угла между секущей и касательной, 3 метод – выбор точки на диаметре, 4 метод – выбор точки внутри круга.

Именно в этом заключается причина парадокса. Подвох заключается в том, как определяется случайный выбор.

Таблица 1 – Сравнительная характеристика всех рассмотренных решений

Способ	Метод «Случайных концов»	Метод «Случайного центра»	Метод «Случайного радиуса»	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4
Случайный выбор	2 точки на окружности	1 точка (середина хорды) внутри круга	1 точка (середина хорды) на радиусе	1 точка вне круга, 1 точка на дуге окружности	1 точка вне круга и случайный угол (выражается через радиус)	1 точка вне круга и 1 на диаметре круга	1 точка вне круга и 1 внутри круга
Вероятность	33%	25%	50%	33%	50%	50%	60,9%

В таблице 1, видно, что среди всех методов вероятность в 33% получается в случае, когда один из входных параметров связан с окружностью. Вероятность в 50% - когда один из входных параметров связан с радиусом, диаметром (отложенный угол можно задать каким-либо тригонометрическим соотношением, где так же будет участвовать радиус).

4. Но какой ответ «более правильный»?

После описания парадокса, велись попытки найти такой ответ [2]. Например, можно обратить внимание на распределение хорд, которое получается в каждом случае если сгенерировать тысячу хорд каждым из способов (рисунки 4.1–4.3). Даже визуально видно, что ответы в разных случаях получаются разные.

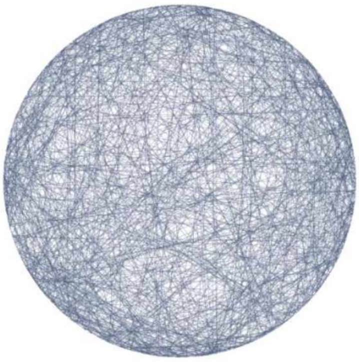

Рисунок 4.1 – Метод «Случайных концов»

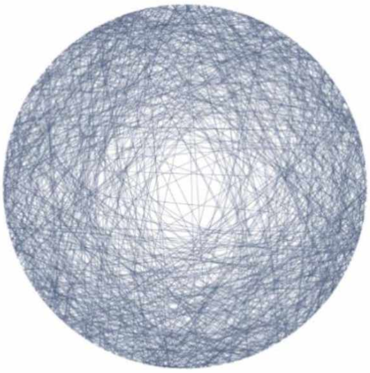

Рисунок 4.2 – Метод «Случайного центра»

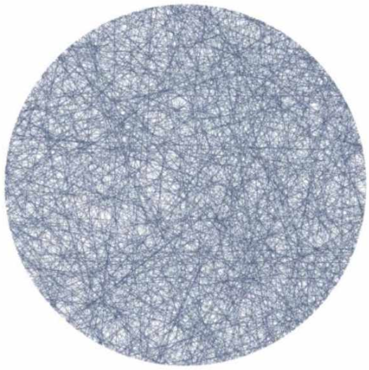

Рисунок 4.3 – Метод «Случайного радиуса»

В первом и третьем методе хорды лежат более плотно друг к другу, во втором чуть меньше хорд в центре. Третий случай дает наиболее плотное распределение, поэтому может показаться, что этот вариант самый правильный. И на самом деле некоторые математики тоже так считали.

Американский математик Эдвин Джеймс в 1973 году предложил «принцип максимального безразличия». То есть, мы не должны использовать информацию, которой нет в условии. Например, в условии задачи Бертрана ничего не говорится про расположение или размер круга, поэтому решение не должно зависеть от размера или расположения. Математически это означает инвариантность относительно масштаба и переноса. Такому требованию удовлетворяет только метод случайного радиуса, дающий вероятность в 50%.

Другие ученые предложили в качестве правильного брать среднее по всем ответам. В условии задачи не сказано о методе, поэтому можно просто усреднить сумму 1/2 + 1/3 + 1/4 и получить 13/36. Но Бертран описал только 3 способа, хотя их гораздо больше (например, метод, дающий вероятность 60.9%), поэтому такое решение не подходит.

5. О чём это говорит?

Парадокс Бертрана на самом деле не просто какая-то интересная задачка из геометрии. Парадокс Бертрана – показательный пример того, что вероятность события невозможно определить, пока не известен метод и входные данные.

В качестве другого примера можно привести популярную задачку с монетой: орёл или решка? А точнее, какова точная вероятность, что прямо сейчас, после подбрасывания монетки, выпадет орёл? 50%? А если подбросить монетку 1000 раз, сколько из них окажутся повёрнуты орлом вверх? Человек, изучивший парадокс Бертрана, никогда не даст гарантий, пока не получит данные о том, как именно бросают эту монетку (угловую скорость вращения, высоту, с которой ее бросают, и подобное).

Пожалуй, следствие из парадокса нужно отнести к самым основным правилам теории вероятности, и признать, что задача Бертрана имеет несколько правильных ответов, как раз из-за не до конца определенного условия.

Список использованных источников:

1. Bertrand paradox [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://dixhom.github.io/articles/Bertrand_paradox.html – Дата доступа: 13.04.2023

2. More on Bertrand's Paradox (with 3blue1brown) – Numberphile [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=pJyKM-7IgAU – Дата доступа: 13.04.2023

BERTRAND PARADOX

Naryvonchyk A.M., student of gr.351004, Golovko R.S., student of gr.351001

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Barkova E.A. – PhD in Physics and Mathematics, docent

Annotation. This research is devoted to the study of the Bertrand paradox: the explore of the history of origin, attempts to justify the paradox, as well as the search for the real cause of its emergence.

Keywords. Joseph Louis François Bertrand, probability theory, paradox, circle, chord, equilateral triangle, modulation, chord distribution, «principle of maximum indifference», invariance.