УДК 004

ФЕНОМЕН ВЕКТОРА, ВЕКТОР В РАЗЛИЧНЫХ НАУКАХ И СФЕРАХ ЖИЗНИ

Шелепова В.А., Коляда Т.А., студенты гр.378107

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники г. Минск, Республика Беларусь

Лобанок Л.В. – ст. препод. каф. ВМ

Аннотация. Статья посвящена вектору и его применению в различных науках и сферах жизни. Исследованы методы решения с помощью векторов таких математических задач, как нахождение наибольшего, тригонометрических задач, геометрических задач. Также в данной статье представлены линейные рекуррентные последовательности второго порядка и некоторые их приложения.

Ключевые слова. Вектор, наука, применение, неравенство Коши-Буняковского, рекуррентная последовательность.

Введение. Вектор является фундаментальным понятием курсов линейной алгебры, функционального анализа, линейного программирования и многих других математических дисциплин; без него невозможно представить современное изложение механики, теории относительности, теоретической физики. В вузовских курсах вектор обычно вводится аксиоматически, как элемент векторного (линейного) пространства. Но как иначе используется вектор в науках и в сферах жизни?

Основная часть. Цель данной работы состоит выявлении, каким образом «вектор» проявляется в различных науках и сферах жизни.

Начнём с такой науки, как физика. Одним из наиболее распространенных применений векторов в физике является описание движения тела. Вектор скорости указывает направление и величину скорости движения тела. С помощью векторов также можно определить ускорение, силы и импульс, что позволяет более полно и точно описать движение тел в пространстве.

Векторы также широко используются при решении задач динамики твердого тела. С их помощью ученые могут определить момент силы, момент импульса и угловые скорости объекта. Это открывает возможности для изучения вращательного движения и определения осей симметрии и степени симметрии тела.

Кроме того, векторы применяются в радиофизике и электротехнике. Например, векторное представление электрического поля позволяет ученым анализировать его распределение и влияние на окружающие объекты. Также векторы используются для описания магнитного поля и определения его направления и интенсивности.

Векторы играют ключевую роль и в других ветвях физики, таких как оптика, акустика и термодинамика. Они помогают ученым понять поведение света и звука, рассчитать потоки энергии и тепла, а также изучить резонансные и интерференционные явления.

Следующей наукой является химия. Нередко даже выдающимися учеными высказывалась мысль, что химическая реакция является вектором, однако данное утверждение до сих пор было лишь декларативным. Тем не менее основой данной мысли служит следующее правило: «Любой химической реакции отвечает симметричное (каноническое) уравнение прямой в пространстве с текущими координатами в виде количеств веществ (молей), масс или объемов».

Все прямые химических реакций проходят через начало координат. Любую прямую в пространстве нетрудно выразить векторами, но поскольку прямая химической реакции проходит через начало системы координат, то можно принять, что вектор прямой химической реакции находится на самой прямой и называется радиус-вектором. Любая химическая реакция характеризуется положением ее вектора в пространстве [1]. Из этого следует вывод, что вектор нашёл применение и в химии.

Давайте же отойдём от привычного нам понятия вектора и рассмотрим, например, его применение в биологии, а точнее в генетике.

Биологические (биотехнологические) векторы – это биологические структуры, способные вносить чужеродный генетический материал в клетку. К ним относятся плазмиды, бактериофаги и всем нам известные вирусы.

Именно с помощью векторов в клетки-мишени можно внедрять генетически чужеродный для них наследственный материал и получать знаменитые ГМО - генетически модифицированные организмы. Однако векторы лишь защищают переносимый ими ген от разрушения, доставляя его по назначению, а не участвуют в процессе формирования ГМО [2].

Казалось бы, как связана психология и вектор, но всё же он нашёл своё назначение и в данной науке. Вектор — это набор желаний человека. Все желания направлены на одно — получить счастье, наслаждение, удовлетворение от жизни. Вектор проявляет себя наружу и реализуется через врожденные свойства. Когда человек испытывает невозможность наполнить свое желание, то ощущает плохие состояния и/или неприязнь, в результате чего-либо прилагает усилия и развивается, либо бездействует и страдает.

Вектора, которыми наделен человек, подсознательно руководят всей нашей жизнью. Под их влиянием мы выбираем, что кушать и какое кино смотреть, определяемся с профессией, выбираем пару, ощущаем время и пространство. Вектора определяют поведение человека, его мысли и ценности [3].

Понятие вектора не обошло и такую науку, как история. С тех пор, как люди научились воспринимать время в качестве протяженной цепи событий (а произошло это не ранее неолита), их представления почти полностью укладываются в два архетипа: наклонная линия, ведущая вниз от золотого века, и замкнутая окружность.

Только в Европе XVII - XVIII столетий начал вырисовываться образ восходящего развития - стрелы или спирали, устремленной вверх, которая как раз и представляет образ вектора. Сопоставительное исследование позволило выделить, по меньшей мере, пять векторов, которые пронизывают ход событий от нижнего палеолита до наших дней, причем реализуются в ускоряющемся темпе.

Первый вектор - рост технологической мощи. Каменный топор и ядерное оружие, согласитесь, совершенно различны по технологической мощи. Второй вектор - демографический рост. Третий вектор - рост организационной сложности, который заключается в постепенном усложнении структуры общества, например, формирование из родов племени, из племени племенных союзов и так далее. Четвертый вектор - рост социального и индивидуального интеллекта. Наконец, последний и, пожалуй, самый проблематичный вектор - совершенствование культурно-психологических средств регуляции поведения [4].

Ещё одной наукой, где используется вектор, является экономика, а конкретнее он применяется для решения различных экономических задач.

Казалось бы, вектор встречался и в химии, и в истории, но в какой же ещё нестандартной науке его можно встретить? Ответ – лингвистика.

Лингвист Джон Ферс предположил, что значение слова определяется его контекстом, то есть словами, рядом с которыми оно появляется. Согласно ему: «Вы узнаете слово по окружающим его словам». Эта идея, которую в лингвистике называют дистрибутивной гипотезой — именно она служит теоретическим основанием для векторных представлений слов. Контекстом слова называют слова, находящиеся слева и справа от него — их часто называют контекстным окном. Обычно используется окно размером 4.

На основании совместной встречаемости слов и создаются векторные представления. Самым простым видом векторного представления слова является количество раз, которое слово встретились рядом с другим [5].

В метеорологии мы можем столкнуться с таким понятием как барический градиент, который является вектором, характеризующим степень изменения давления сплошной среды в пространстве.

В повседневной жизни мы встречаемся с векторами на дорожных знаках, различных указателях в магазинах и метро. Также обширное применение вектор нашёл в векторной графике.

Ну и куда же без математики. Дальнейшая часть статьи будет посвящена именно применению вектора в математике.

В ходе исследования удалось выделить несколько типов задач, одним из которых является: решение алгебраических задач, включающих задачи на нахождение наибольшего и наименьшего, на решение тригонометрических уравнений, а также некоторые задачи на доказательство неравенств. Алгоритм решения всех перечисленных задач заключается в том, что необходимо ввести такие вектора, которые облегчат дальнейшие преобразования или будут представлять выражение, значение которого дано в условии, удовлетворяет данным задачи. Рассмотрим решение нескольких задач:

1. Доказательство неравенства Коши-Буняковского (1):

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \qquad (1)$$

Для решения многих задач векторным методом необходимо использовать данное неравентво. К сожалению, ни школьная программа, ни первый курс математического анализа и линейной алгебры не предоставляет нам его доказательство. Поэтому докажем неравество Коши-Буняковского самостоятельно:

Рассмотрим два вектора: $\vec{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ и $\vec{y}=(y_1;y_2;\ldots;y_n)$. Значит, при $\forall\, t \in R$ выполняется: $t\vec{x}=(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ и $\vec{x}\cdot\vec{y}= x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$.

Нужно доказать, что $(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \le |\vec{x}|^2\cdot|\vec{y}|^2$ или $|\vec{x}\vec{y}| \le |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$. Рассмотрим функцию $(tx_1+y_1)^2+(tx_2+y_2)^2+\ldots+(tx_n+y_n)^2=f(t)$ (2), при $t \in R$ $f(t)\ge 0$

Преобразуем выражение (2). Получится:

$t^2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+2t\cdot(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)+(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)\ge 0$

Преобразуем данное неравенство: $t^2|\vec{x}|^2+2t(\vec{x}\cdot\vec{y})+|\vec{y}|^2\ge 0$, при $\forall\, t \in R$,

Если $|\vec{x}|=0$, то $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. При $\forall\,\vec{y}$ $(\vec{x}\cdot\vec{y}=0)$, значит надо доказать неравенство $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$. Если $\vec{x}=\vec{0}$, то неравенство верно (0=0). Если $|\vec{x}|>0$, то $f(t)\ge 0$ при $\forall\, t \in R$, тогда $D \le 0$, значит $(2(\vec{x}\cdot\vec{y}))^2-4|\vec{x}|^2\cdot|\vec{y}|^2 \le 0$, тогда

$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \le |\vec{x}|^2\cdot|\vec{y}|^2$.

Ч.т.д

2. Доказать, что при любых x, y, z справедливо неравенство $xyz(x+y+z)\le x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$. Решение:

Введем векторы $\vec{a}$ (xy;yz;zx) и $\vec{b}$ (xz;xy;yz). Найдем произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x^2yz+xy^2z+xyz^2$. Найдем длины векторов: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}$ $|\vec{b}|=\sqrt{x^2z^2+x^2y^2+y^2z^2}$. Тогда произведение длин векторов равно: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|= x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$. Так как по неравенству Коши-Буняковского: $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, то $xyz(x+y+z)\le x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$.

Ч.т.д.

3. Решите неравенство $\sqrt{(6-x)^2+4}+\sqrt{(x-2)^2+1}\le 5$. Решение:

Введем векторы $\vec{a}$ $(6-x;2)$ и $\vec{b}$ $(x-2;1)$. Найдем сумму векторов: $\vec{a}+\vec{b}$ = (4; 3). Найдем длины векторов: $|\vec{a}|=\sqrt{(6-x)^2+4}$; $|\vec{b}|=\sqrt{(x-2)^2+1}$. Тогда по условию $|\vec{a}|$ + $|\vec{b}|\le 5$ и $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Значит неравенство получает вид: $|\vec{a}|$ + $|\vec{b}|\le|\vec{a}+\vec{b}|$. Исходя из неравенства треугольника $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|$ + $|\vec{b}|$. Тогда имея неравенста $|\vec{a}|$ + $|\vec{b}|\le|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|$ + $|\vec{b}|$, можно утверждать, что $|\vec{a}+\vec{b}|$ = $|\vec{a}|$ + $|\vec{b}|$, тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарны ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), значит (6-x) ·1=(x-2) · 2, тогда x=$3\frac{1}{3}$. Ответ: $3\frac{1}{3}$.

4. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$, если a+b+c=1. Решение:

Введем векторы $\vec{x}$ (1;1;1) и $\vec{y}$ $(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1};\sqrt{4c+1})$. Найдем произведение векторов: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$. А также найдем длины векторов $|\vec{x}|=\sqrt{3}$; $|\vec{y}|=\sqrt{4(a+b+c)+3}=\sqrt{7}$. Так как по неравенству Коши-Буняковского $\vec{x}\cdot\vec{y}\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$, то $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le\sqrt{21}$. Причем равенство достигается при $\frac{\sqrt{4a+1}}{1}=\frac{\sqrt{4b+1}}{1}=\frac{\sqrt{4c+1}}{1}$, тогда a=b=c. Так как a+b+c=1, то a=b=c=$\frac{1}{3}$. Ответ: $\sqrt{21}$.

5. Решите уравнение: $\sin x\sqrt{1-\cos^2 x}+\sqrt{1+\cos^2 x}=\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 x+1}$, если $\sin x>0$. Решение:

Введем векторы $\vec{a}(\sin x;1)$ и $\vec{b}(\sqrt{1-\cos^2 x};\sqrt{1+\cos^2 x})$. Найдем произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = $\sin x\sqrt{1-\cos^2 x}+$ $+\sqrt{1+\cos^2 x}$. Также найдем длины векторов: $|\vec{a}|=\sqrt{\sin^2 x+1}$; $|\vec{b}|$ $=\sqrt{1-\cos^2 x+1+\cos^2 x}=\sqrt{2}$. Тогда произведение длин векторов: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 x+1}$. Так как по условию $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарны ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), значит $\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. Зная, что $\sin x>0$, возведем в квадрат левую и правую часть полученного равенства: $\frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{1+\cos^2 x}$; $1=\frac{1}{1+\cos^2 x}$, то есть $1+\cos^2 x=1$. Отсюда, $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+y-2} \end{cases}$. Решение:

Введем векторы $\vec{a}$ (x;y) и $\vec{b}$ $(\sqrt{y-1};\sqrt{x-1})$. Найдем произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}$. Найдем длины векторов: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$, тогда по условию $|\vec{a}|=\sqrt{4}=2$; $|\vec{b}|=\sqrt{x+y-2}$. Тогда произведение длин векторов равно: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=2\sqrt{x+y-2}$. Так как по условию $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарны ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), тогда $x\sqrt{x-1}=y\sqrt{y-1}$. Рассмотрим функцию $f(x)=x\sqrt{x-1}$, тогда $D(f)=[1;+\infty)$, значит $x\ge 0$ и $\sqrt{x-1}\ge 0$. Тогда функции g(x)=x и $t(x)=\sqrt{x-1}$ – возрастающие, неотрицательные, поэтому функция f(x) тоже возрастающая. Значит f(x)= f(y) <=> x=y, подставим в первое уравнение системы: $2x^2=4$, $X_1=\sqrt{2}$;$X_2=-\sqrt{2}$ – не удовлетворяет области определения. Тогда $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$.

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

7. Найти максимальное значение $x+z$, где x,z решения системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z^2+t^2=9, \\ xt+yz=6 \end{cases}$.Решение:

Введем векторы $\vec{a}$ (x;y) и $\vec{b}$ (t;z). Найдем произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=xt+yz=6$ по условию. Найдем длины векторов: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{z^2+t^2}$, тогда по условию $|\vec{a}|=\sqrt{4}=2$; $|\vec{b}|=\sqrt{9}=3$. Тогда произведение длин векторов равно: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=2\cdot3=6$. . Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=6$, значит векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарны ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), т.е. существует такое число c>0, тогда x=ct, y=cz, значит $x^2+y^2=c^2(t^2+z^2)=4$, тогда $c^2\cdot 9=4$, т.е. $c=\frac{2}{3}$. Значит, $x+z=x+\frac{3}{2}y$. Тогда по неравенству Коши-Буняковского (1):

$x+\frac{3}{2}y\le\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1^2+\frac{3^2}{2^2}}$; $x+\frac{3}{2}y\le\sqrt{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}$; $x+\frac{3}{2}y\le\sqrt{13}$.

Тогда максимальное значение $x+z=\sqrt{13}$.

Ответ: $\sqrt{13}$.

8. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, у которой AB=5, AA_1=5. Точки P и Q – середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Найдите значение выражения $\frac{36}{\cos^2\varphi}$, где φ – угол между прямыми PQ и AB_1 (рисунок 1).

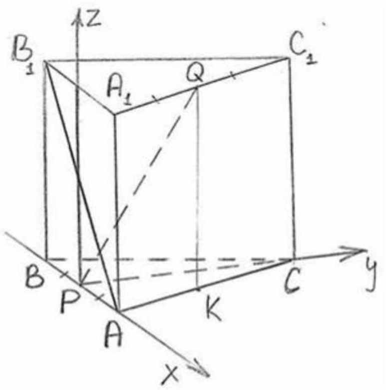

Рисунок 1 – Правильная треугольная призма для задачи 8

Решение:

Введем систему координат и найдем координаты точек: A ($\frac{5}{2}$; 0; 0); B_1 (- $\frac{5}{2}$; 0; 5); P (0; 0; 0); Q ($\frac{5}{4}$; $\frac{5\sqrt{3}}{4}$; 5). Тогда координаты векторов равны $\overrightarrow{AB_1}\{-5;0;5\}$ и $\overrightarrow{PQ}\left\{\frac{5}{4};\ \frac{5\sqrt{3}}{4};5\right\}$. Найдем косинус угла между данными векторами по формуле $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$\cos\varphi = \cos\angle(\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{AB_1}) = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{-\frac{25}{4}+25}{\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{25\cdot3}{16}+25}\cdot\sqrt{50}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$;

значит $\frac{36}{\cos^2\varphi} = \frac{36\cdot4\cdot10}{9} = 160.$

Ответ: 160.

Геометрическая задача 8 является классической задачей централизованного тестирования. Чтобы по-настоящему оценить компактность векторного метода, мы решили взглянуть на авторские решения, предложенные на сайте Республиканского Института Контроля Знаний. Невооруженным взглядом можно заметить, что объемы решения задач двумя способами значительно отличаются. Очевидно, что векторным способом задачи решаются намного проще и быстрее.

Изучая тему векторы, мы наткнулись на одну задачу:

Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его растить два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n-ом году роста первоначального растения?

И в попытках решения нам пришлось углубится в теории, и поэтому необходимо было построить теорию разрешимости разностных уравнений второго порядка, построенную на базисе векторного пространства.

И по итогу, изучив тему, мы решили данную задачу. Решение:

Запишем линейную рекуррентную последовательность: $a_n = a_{n+1} + 6a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Для данной последовательности составим и решим характеристическое уравнение: $x^2 = x + 6, x^2 - x - 6 = 0$, тогда $x = 3$ или $x = -2$. Тогда, согласно теореме, которая гласит, что если характеристическое уравнение имеет 2 различных корня w_1 , w_2, то найдется только одна пара чисел c_1 и c_2, такая что $a_n = c_1w_1^{n-1} + c_2w_2^{n-1}$, имеем $a_n = c_13^{n-1} + c_2(-2)^{n-1}$.

Постоянные c_1 и c_2 найдем из условия $a_1 = 1$, $a_2 = 1$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ 3c_1 - 2c_2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1 - c_1, \\ 3c_1 - 2 + 2c_1 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = \dfrac{2}{5} \\ c_1 = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Тогда окончательно, получим $a_n = \frac{3}{5}\cdot 3^{n-1} + \frac{2}{5}\cdot(-2)^{n-1} = \frac{3^n-(-2)^n}{5}$.

Ответ: $\frac{3^n-(-2)^n}{5}$.

Алгоритм решения алгебраических задач заключается в том, что необходимо ввести такие вектора, которые облегчат дальнейшие преобразования или будут представлять выражение, значение которого дано в условии или удовлетворяет данным задачи. А для решения геометрических задач необходимо ввести систему координат, и далее найдя координаты векторов, решить задачу исходя из условия.

Заключение: Таким образом, изучив данную тему, мы смогли понять, что вектор – это незаменимая вещь не только в математике, но и во многих других науках и сферах деятельности.

Но вернёмся к названию нашей работы. Феномен вектора. В чём же он заключается?

Мы привыкли думать, что вектор – это направленный отрезок в математике, но как вы могли заметить из нашей работы, это не совсем так.

Феномен вектора заключается в самом понятии, означающем "направленный" или же "несущий". Именно поэтому данный термин употребляется во многих науках, в которых необходимо сконцентрировать внимание именно на движении, изменении или преобразовании. Вектор является неотъемлемой частью многих наук и позволяет проще охарактеризовать некоторые вещи, про которые было рассказано в статье, а также позволяет проще решать задачи математики.

Список использованных источников:

1. Вектор химической реакции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://him.1sept.ru/article.php?ID=200701308 – Дата доступа: 12.02.2024.

2.Биотехнологические векторы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://kineziolog.su/content/biotekhnologicheskie-vektory – Дата доступа: 14.02.2024.

3.8 векторов: «Системно-векторная психология [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.yburlan.ru/biblioteka/8-vektorov-sistemno-vektornaya-psihologiya-yuriya-burlana – Дата доступа: 12.02.2024.

4. Циклы и векторы истории [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://uchebnikfree.com/istoriya-psihologii-uchebniki/tsiklyi-vektoryi-istorii-30534.html – Дата доступа: 12.02.2024.

5. Что такое векторные представления слов? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://sysblok.ru/glossary/chto-takoe-vektornye-predstavlenija-slov/ – Дата доступа: 10.03.2024.

6. Решение геометрических задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10-11 классов / Г.А. Клековкин. – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. – 180 с.

7. Рогановский Н.М. Геометрия: Эксперим. Учеб. пособие для 10-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования с 12-летним сроком обучения с углубл. Изучением математики/ Н.М. Рогановский. О.И. Тавгень. – Мн.: Нар. асвета, 2003. – 272 с.

8. Высшая математика. Первый семестр. Курс лекций для студентов экономических специальностей вузов/ М.П. Дымков. – Минск: Мин.обр. РБ УО «БГЭУ», 2014. – 145 с.

9. Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2005. – 320 с.

10. Горбачев Н.В. Сборник задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.