УДК 514.112.6

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧИСЛА «π»

Шилов А.А·, студент гр.328501

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Цегельник В.В. – доктор. физ.-мат. наук, профессор кафедры ВМ

Аннотация. В статье рассмотрены два основных метода для вычисления числа п. Метод Архимеда, метод Ньютона.

Ключевые слова. Константа п, геометрический подход, интегральный подход.

Все мы знаем, что число $\boldsymbol{\pi}$ — это отношение длины окружности к ее диаметру. Обозначается оно буквой греческого алфавита π и равно 3.1415926…… Люди начали понимать, что число π представляет собой отношение длины окружности к её диаметру, еще в древние времена. Однако формально это было доказано несколько веков назад. Но как же вычисляли эту константу раньше? В этой работе мы разберём несколько методов вычисления числа π.

Метод основан на вычислении длины окружности с помощью вписанных и описанных многоугольников. Несложно доказать, что значение π больше 3, но меньше 4. Чертим круг. Внутри него шестиугольник с длиной стороны 1. Правильный шестиугольник можно разделить на 6 равносторонних треугольников. Диаметр круга составит 2. Периметр шестиугольника — 6, а длина окружности, очевидно, больше. $2\pi r > 6 \rightarrow \pi > 3$ (так как $r = 1$). Опишем около круга квадрат. Периметр квадрата – 8, и это больше длины нашей окружности, а значит $2\pi r < 8 \rightarrow \pi < 4$

В итоге π больше 3, но меньше 4. (рисунок 1)

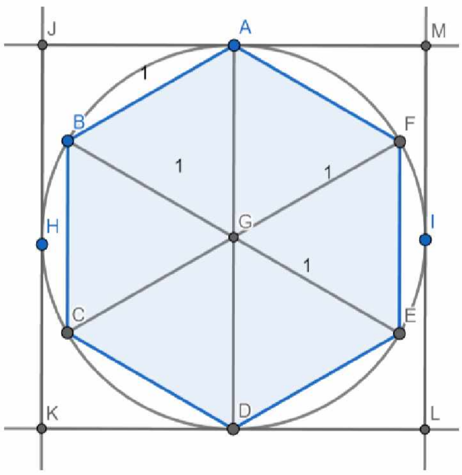

Рисунок 1

Теперь впишем и опишем додекагон (рисунок 2) (правильный двенадцатиугольник). После вычисления периметра, для π соблюдается следующее неравенство:

$6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi < 12(2-\sqrt{3})$

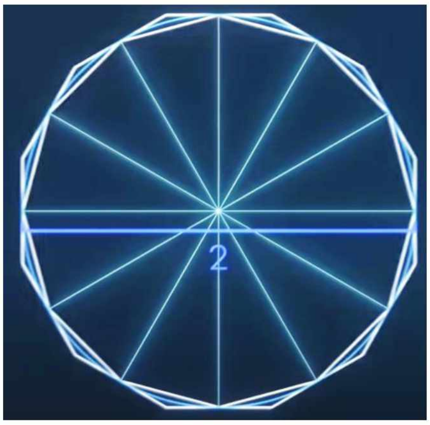

Рисунок 2

Следовательно, π <3.215 и π >3.106 Таким образом, если увеличивать в два раза количество сторон во вписанных и описанных многоугольниках, можно высчитать число π с нужной нам точностью. Рассмотрим уравнение единичной окружности: $x^2 + y^2 = 1$. Выразим y и получим уравнение единичной полуокружности $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Разложим функцию $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ с помощью биномиального разложения (ряда Тейлора):

$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 \ldots$

Теперь возьмём определённый интеграл от 0 до 1 и таким образом посчитаем площадь четверти окружности:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 [1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 \ldots] dx$$

С другой стороны, площадь четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{4}$ то есть

$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 [1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 \ldots] dx$

После интегрирования и умножения на 4 получим:

$$\pi = 4(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 \ldots)$$

получаем x равным единице и высчитываем π с любой нужной нам точностью.

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} \ldots)$$

Если взять определённый интеграл от 0 до 1/2, то при x = ½ так как слагаемые уменьшатся пропорционально x^2 процесс подсчёта пойдет быстрее, в данном случае в 4 раза. На рисунке 3 изображена площадь под кривой от 0 до ½.

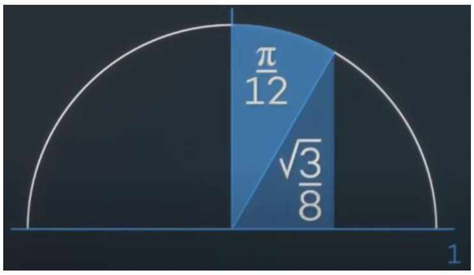

Рисунок 3

Её можно представить как сектор в 30^0 с площадью $\pi/12$ и треугольник с основанием ½ и высотой равной $\frac{\sqrt{3}}{2}$.В итоге мы получим следующее выражение

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \int_0^{1/2} [1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 \ldots] dx$$

Выразив π получим:

$$\pi = 12(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 \ldots - \frac{\sqrt{3}}{8})$$

подставляем x=½. И получаем

$$\pi = 12(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{1}{2}^3 - \frac{1}{40}\frac{1}{2}^5 - \frac{1}{112}\frac{1}{2}^7 - \frac{5}{1152}\frac{1}{2}^9 \ldots - \frac{\sqrt{3}}{8})$$

Если рассмотреть только первые 5 множителей, получим π = 3.14161, это отличается всего на две стотысячных. Чтобы достичь точности в 2^{62} знаков после запятой, достаточно посчитать 50 множителей по методу Ньютона.

Список использованных источников:

1. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) – Дата доступа: 30.04.2024.

2. Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) – Дата доступа: 30.04.2024.

3. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: **https://youtu.be/A3PL61fHzjs?si=4ooTdBey6PcS_oAy**– Дата доступа: 30.04.2024.

UDC 514.112.6

Methods for calculating π

Shilov A.A., student group 328501

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
Minsk, Republic of Belarus

Tsegelnik V.V. - doctor. physics and mathematics sciences, Professor of the Department of HM

Annotation. The article discusses two main methods for calculating the number n. Archimedes' method, Newton's method.

Keywords. Constant n, geometric approach, integral approach.