ИССЛЕДОВАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО СМЫСЛА ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Матюшенко А.Д., Ярохович Д.А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Самсонов П. А. – ассистент, кафедра высшей математики

В данной работе исследуется переход от линейных рекуррентных функций к комбинаторным определениям на примере чисел Фибоначчи и рекуррентных функций двух слагаемых. Выводятся формулы определения n-го члена линейных рекуррентных последовательностей двух слагаемых.

Как известно популярнейшая линейная рекуррентная функция – функция Фибоначчи.

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \tag{1}$$

Для неё можно сформулировать такое определение: функция каждый шаг которой, её значение равняется сумме значений на прошлом и позапрошлом шаге.

Из последнего можно сформулировать комбинаторный смысл ряда Фибоначчи как количество способов разложить n на сумму единиц и двоек с учётом перестановок слагаемых без повторений, поскольку F(n+1) можно представить как количество способов разложить F(n) + количество способов разложить F(n-1). Количество способов разложить на единицы и двойки n можно представить как целые решения диофантова уравнения вида:

$$n = 1 * x + 2 * y \tag{2}$$

А перестановки каждой пары корней как сочетание из y или x по x+y.

Такое выражения для чисел Фибоначчи может иметь вид:

$$\mathrm{Fibo(n)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\left[\frac{\mathrm{n}}{2}\right]} \mathrm{C}_{(\mathrm{n}-\mathrm{k})}^{\mathrm{k}} \tag{3}$$

Рассмотрим функцию вида $F(n) = F(n-1) + F(n-\beta)$.

В таком случае формула примет вид:

$$\mathrm{Fibo(n)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{Floor}\left[\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right]} \mathrm{C}_{(\mathrm{n}-\mathrm{k}(\beta-1))}^{\mathrm{k}} \tag{4}$$

Из рассуждений в пунктах (2) и (3) можно сформулировать комбинаторный смысл функции вида $F(n) = F(n-\alpha) + F(n-\beta)$: значение функции F в точке n можно представить как количество перестановок без повторений всех целых положительных корней уравнения:

$$n = \alpha x + \beta y \tag{5}$$

Корни уравнения (4) могут быть заданы явно:

$$\begin{cases} a, b, x, y, n \in \mathrm{N}_{+} \\ \mathrm{x_k} = \mathrm{na}^{\varphi(\mathrm{b})-1} + \mathrm{bk} \\ \mathrm{y_k} = \mathrm{n}\frac{1-\mathrm{a}^{\varphi(\mathrm{b})}}{\mathrm{b}} - \mathrm{ak} \end{cases} \tag{6}$$

Определим начальное значение y:

$$\mathrm{y_{нач}} = \mathrm{n}\frac{1-\mathrm{a}^{\varphi(\mathrm{b})}}{\mathrm{b}} - \mathrm{a}\left[\frac{\mathrm{n}\left(1-\mathrm{a}^{\varphi(\mathrm{b})}\right)}{\mathrm{ab}}\right] \tag{7}$$

В соответствии с формулами (5) и (6), общий вид комбинаторного определения рекуррентной функции вида $F(n) = F(n-\alpha) + F(n-\beta)$, будет иметь вид:

$$\mathrm{F(n)} = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{x}}{\left\lceil \frac{\text{НОК}(\alpha,\beta)}{\alpha} \right\rceil} \right\rfloor} \mathrm{C}_{x_{\text{нач}}+y_{\text{нач}}+k*\text{НОК}(\alpha,\beta)*\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)}^{y_{\text{нач}}+k*\frac{\text{НОК}(\alpha,\beta)}{\beta}} \quad \textit{(8)},$$

где, $(x_{\text{нач}}, y_{\text{нач}})$ – корни диофантова уравнения (5) при максимальном x подходящем по условию.

Выводы.

Для линейных рекуррентных функций можно сформулировать определение, основанное на комбинаторных перестановках. Нужно отметить, что в рамках разобранного комбинаторного смысла рекуррентных функций можно описать любую линейную рекуррентную функцию. Также была обобщена формула расчёта значения ряда линейных рекуррентных функций состоящих из двух слагаемых.

Список использованных источников:

1. *J. Ercolano, Matrix Generators of Pell Sequences, Fibonacci Quart, 1979, С. 71-77.*
2. *Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения С. 14-29.*