

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.

Лосик М.В. студент группы 378105, Рапинчук А.В. студент группы 378105

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь

Леонович А.А. кандидат физико-математических наук

**Аннотация.** В работе рассматриваются экспериментальные исследования движения сферических тел в вязкой среде. Мы сравниваем полученные результаты с теоретическими предсказаниями, изучаем установившееся движение и определяем время его установления. Основные параметры - диаметр шарика и вязкость жидкости. Используются формула Стокса и число Рейнольдса. Рассматривается положение шарика в среде и факторы, влияющие на движение, такие как материал, масса и размеры шарика. Учитываются силы сопротивления, сила Архимеда, сила тяжести и трение. Исследуются влияние боковой поверхности и колбы. Полученные данные могут быть полезными для решения технических задач в физике и лабораторных работ.

**Ключевые слова.** Экспериментальные исследования, движение сферических тел, ограниченная вязкая среда, диаметр шарика, вязкость жидкости, разность плоскостей, формула Стокса, относительная погрешность, коэффициент сопротивления, число Рейнольдса, закон Стокса, центр, половина расстояния от стенки, постоянная, формула силы сопротивления, цилиндрические тела, устойчивость движения, масса, длина, диаметр, сила Архимеда, сила тяжести, трение, боковая поверхность, колба, времена опускания, коэффициенты сопротивления, технические задачи.

**Введение.** Целью данной работы является изучение движения тел различной формы в вязкой жидкости, определение коэффициента сопротивления и учет влияния стенок сосуда на движение сферических и цилиндрических тел. В данной работе анализируются перемещения тел в вязкой среде с фокусом на сферические и цилиндрические формы. Результаты исследований имеют важное значение для понимания движения объектов в жидкости, таких как погружения в моря и океаны или спуск в атмосферу. Особое внимание уделяется влиянию стенок сосуда на сопротивление движению тел. При движении у стенки формируется поток жидкости, и скорость жидкости вблизи стенки замедляется из-за прилипания. Это приводит к изменению коэффициента сопротивления и замедлению движения тела. В работе используется теория подобия и размерностей в механике для приближенного определения искомых величин, но для полного определения требуются экспериментальные исследования.

**Исследование коэффициента сопротивления сферы.** Для случая большой относительной скорости  $v$  Ньютоном была получена зависимость:

$$F = 0.22 \rho_{\text{ж}} \pi a^2 v^2, \quad (1)$$

В то же время, при относительно низких скоростях, Стокс предположил зависимость:

$$F = 6 \pi \eta a v, \quad (2)$$

Через конечную скорость свободного падения тела в жидкости можно выразить характеристики сопротивления.

Коэффициент сопротивления  $C_D$  можно найти по формуле:

$$C_D = \frac{F}{\pi a^2 \frac{1}{2} \rho_{\text{ж}} v^2}, \quad (3)$$

Для режима Стокса сопротивления  $C_D$  представляется в виде:

$$C_D = \frac{24}{2 \alpha v \rho_{\text{ж}}} = \frac{24}{Re}, \quad (4)$$

**Определение применимости формулы Стокса.** Формула Стокса будет верна в случае, когда сила сопротивления пропорциональна скорости движения частицы. Предположим, что у нас есть капля воды, которая падает в воздухе и то, что сила тяжести и сила сопротивления воздуха взаимно уравниваются значит силу сопротивления можно вычислить с использованием формулы Стокса, так что капля будет падать равномерно со скоростью  $U$ . Сила тяжести капли будет равна  $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho' g$ .

Приравнявая, силу тяжести и силу сопротивления Стокса, получим равенство:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho' g = 6\pi\mu U a.$$

Вводя  $\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$  - коэффициент кинематической вязкости, определяем скорость

$$U = \frac{2}{9} \frac{g a^2 \rho'}{\vartheta}.$$

Но, с другой стороны, вводя число Рейнольдса соотношением

$$Re = \frac{Ua}{\vartheta},$$

найдем, что

$$a^3 = \frac{2}{9} * \frac{\vartheta^2}{g} * \frac{\rho'}{\rho} * Re \quad \text{и} \quad U^3 = \frac{2}{9} g \vartheta Re^2 \frac{\rho'}{\rho}.$$

При изучении движения капель воздуха в маловязкой среде обнаружено, что они имеют малые размеры и скорости. Однако, при движении сферических тел в жидкостях с высокой вязкостью, размеры и скорости значительно больше.

**Уравнения движения сферического тела в случае сопротивления Стокса.** Рассмотрим падение без начальной скорости тела сферической формы. На тело действуют: сила тяжести  $m \vec{g}$ , сила Архимеда  $\vec{F}_A = -V\rho_{ж}\vec{g}$  и сила сопротивления среды. Согласно 2-ому закону Ньютона:

$$(m + 0.5m_0)\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_{Тр} \quad (6)$$

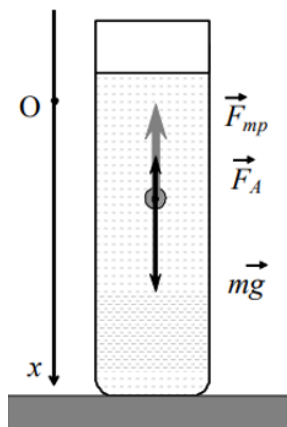


Рисунок 1 – Движение шарообразного тела в сосуде с жидкостью

Рассмотрим движение объекта в одном измерении. Проекция уравнения движения на ось OX выглядит следующим образом:

$$v' = k_1 - k_2 \cdot v \quad (8)$$

Решение этого уравнения с начальным условием  $v(0) = 0$  имеет вид:

$$v(t) = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) * (1 - e^{-k_2 t}) . \quad (9)$$

Ускорение объекта определяется как:

$$a(t) = (k_1) * (e^{-k_2 t}) . \quad (9')$$

Координата  $x$  объекта при падении без начальной скорости изменяется со временем по закону:

$$x(t) = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) * \left(t + \frac{1}{k_2} e^{-k_2 t}\right) . \quad (9'')$$

Проанализируем это движение. Величина скорости стремится к наибольшему и постоянному значению при больших временах:

$$v_{max} = \frac{9}{2} \frac{\rho_T - \rho_{ж}}{\mu} g R^2 . \quad (10)$$

В этом случае ускорение становится близким к нулю, а координата линейно растет со временем.

Определим интервал времени, за которое достигается устойчивое состояние движения сферы в густой жидкости, когда её скорость перестает изменяться и стабилизируется. Момент времени  $t$ , при котором  $e^{-k_2 t} \leq 0.001$  (11), можно оценить как  $t \geq \frac{7}{k_2}$ . Тогда время установления  $t_{уст}$  можно вычислить как:

$$t_{уст} = \frac{14}{9} \frac{\rho_T + 0.5 \rho_{ж}}{\mu} R^2 . \quad (12)$$

Проведем расчет времени установления стационарного режима. График на рисунке 2 демонстрирует изменение скорости в зависимости от времени для данных условий.

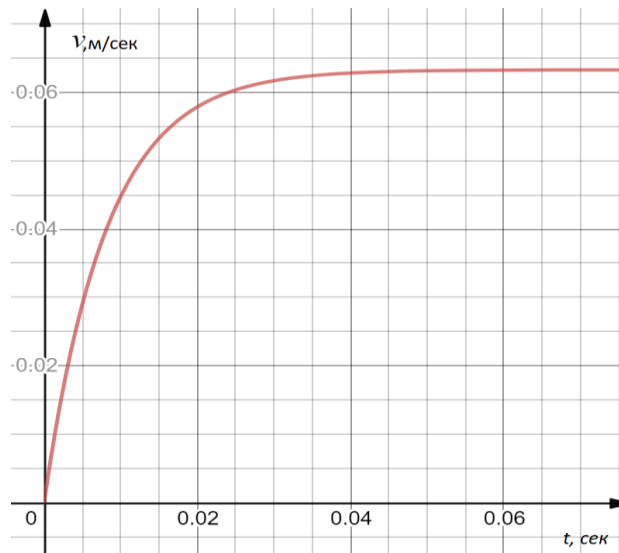


Рисунок 2 – Зависимость скорости падения шара от времени

Закон Стокса применяется при малых значениях числа Рейнольдса и движении сферических объектов в неограниченной жидкости. Коэффициент сопротивления  $k$  зависит от границы области, занятой жидкостью, и определяется уравнением:

$$kv = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_T - \rho_J)g . \quad (13)$$

$$k = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_T - \rho_J)g}{v} . \quad (14)$$

Теоретический коэффициент сопротивления  $k_{\text{теор}}$  по закону Стокса вычисляется как:

$$k_{\text{теор}} = 6\pi\mu R . \quad (15)$$

Скорость  $v$  можно определить, измерив расстояние  $S$  и время  $t$  движения объекта:  $v = \frac{S}{t}$ .

**Вывод формул сопротивления при движении тел в ограниченном объеме вязкой жидкости методом теории размерностей.** В данном исследовании усовершенствован метод определения коэффициента сопротивления тел при движении с использованием теории размерностей. Сведения по этой теории даны в книге Л.И. Седова [1]. Форма тела произвольная, исследуется его обтекание вязкой жидкостью с учетом влияния твердой границы.

Сила сопротивления зависит от скорости потока, вязкости среды, плотности, размеров тела, угла атаки и расстояния до стенки. Это выражается формулой:

$$F = f(v, \mu, \rho, d, l, \alpha) \quad (16)$$

Используя теорию размерностей, можно упростить это соотношение на три безразмерные комбинации, такие как число Рейнольдса, отношение размеров и угол атаки.

$$\frac{F}{d^2 v^2 \rho} = f(Re, l_0, \alpha) . \quad (17)$$

Отсюда:

$$F = d^2 v^2 \rho f(Re, l_0, \alpha). \quad (18)$$

Согласно полученной формуле, сила сопротивления зависит от квадрата скорости, плотности и других параметров. Если не учитывать воздействие стенки, то формула может быть упрощена до следующей формулы:

$$F = d^2 v^2 \rho f(Re, \alpha). \quad (19)$$

Для обтекания шара вязкой жидкостью и при отсутствии угла атаки, сила сопротивления описывается формулой:

$$F = d^2 v^2 \rho f(Re). \quad (20)$$

При учете воздействия стенок формула примет вид:

$$F = d^2 v^2 \rho f(Re, l_0). \quad (21)$$

Для определения зависимости параметров можно проводить эксперименты или использовать теоретические методы, решая соответствующие задачи по обтеканию тела. В случае медленного движения тела через жидкость можно пренебрегать инерционными членами уравнений движения, что эквивалентно неучету плотности жидкости.

Для медленного обтекания сферы вязкой жидкостью с учетом стенок, формула сила сопротивления выражается:

$$F = f(v, \mu, d, l, \alpha). \quad (22)$$

Без учета воздействия стенок, формула принимает вид:

$$F = c v \mu R. \quad (23)$$

Известная как формула Стокса, где  $c=6\pi$ .

**Экспериментальные исследования движения сферических тел в ограниченной вязкой среде и их сопоставления с теоретическими.** Из теоретических исследований следует, что установившееся движение сферического тела начинается быстро, почти мгновенно, за доли секунды. Например, при движении шарика диаметром  $D=0.8$  см время установления составляет 0.23 секунды и уменьшается пропорционально квадрату радиуса шарика.

По результатам экспериментов можно определить вязкость жидкости по формуле, что следует из (13) и формулы Стокса

$$\mu = \frac{2 \Delta \rho R^2 g}{9 v}, \quad v = \frac{s}{t} \quad (25)$$

, где  $\Delta \rho$  – разность плотностей материала сферического тела и жидкости.

Сравнив экспериментальное и теоретическое значения вязкости, определенное на основании результатов движения железного шара, так называемым методом падающего шара, получим относительную погрешность результатов равную 6%.

В таблицах 1-3 представлены результаты экспериментальных исследований и теоретических результатов определения коэффициента сопротивления  $k$  (кг/с) при различных случаях опускания шарика без начальной скорости. Коэффициенты сопротивления определены по формулам (14), (15). Проверим выполнимость закона Стокса. Определим число Рейнольдса для самого тяжелого шарика радиусом 2.4 мм по формуле

$$Re = \frac{vR\rho}{\mu}$$

3. Оно равно 0.23 и меньше 0.5, значит, закон Стокса выполняется для всех случаев из таблиц 1-

Таблица 1. Сравнение результатов экспериментов и теоретических результатов при опускании шара в центре

№ <sub>эксп</sub>	d, мм	t, с	t <sub>ср</sub> , с	v, м/с	k <sub>теор</sub> , кг/с	k <sub>эксп</sub> , кг/с	Δk <sub>абс</sub> , кг/с	Δk <sub>отн</sub>
1		12.2						
2	3.2	12.1	12.1	0.029	0.034	0.038	0.004	11.7%
3		12.0						
4		6.1						
5	4.4	6.0	6.0	0.058	0.047	0.050	0.003	6%
6		6.0						
7		4.1						
8	4.8	4.0	4.1	0.085	0.051	0.044	0.007	13.7%
9		4.2						

Таблица 2. Сравнение результатов экспериментов и теоретических результатов при опускании шара на половине расстояния от стенки

№ <sub>эксп</sub>	d, мм	t, с	t <sub>ср</sub> , с	v, м/с	k <sub>теор</sub> , кг/с	k <sub>эксп</sub> , кг/с	Δk <sub>абс</sub> , кг/с	Δk <sub>отн</sub>
1		12.2						
2	3.2	12.3	12.3	0.0285	0.039	0.034	0.005	13.8%
3		12.4						
4		6.2						
5	4.4	6.3	6.2	0.056	0.051	0.046	0.005	9.8%
6		6.1						
7		4.2						
8	4.8	4.3	4.2	0.083	0.045	0.051	0.006	11.8%
9		4.1						

Таблица 3. Сравнение результатов экспериментов и теоретических результатов при опускании шара у стенки

№ <sub>эксп</sub>	$d$ , мм	$t$ , с	$t_{cp}$ , с	$v$ , м/с	$k_{теор}$ , кг/с	$k_{эксп}$ , кг/с	$\Delta k_{абс}$ , кг/с	$\Delta k_{отн}$
1	3.2	12.4	12.5	0.028	0.037	0.032	0.005	13.6%
2		12.5						
3		12.5						
4	4.4	6.6	6.5	0.054	0.053	0.044	0.009	17%
5		6.5						
6	4.8	6.3	4.3	0.081	0.046	0.048	0.002	4.2%
7		4.2						
8		4.3						
9		4.4						

После сопоставления теоретических и экспериментальных результатов стало ясно, что при бросании шарика в центре канала различие в результатах существенно меньше. Это обусловлено влиянием вязких сил при движении у стенки, требующим уточнения закона сопротивления по Стоксу.

При сравнении опытных данных с результатами теории размерности была определена постоянная  $c$  в формуле (24). Установлено, что теоретически по Стоксу  $c=6\pi$ . Для конкретного опыта №5 из таблицы 1 было вычислено значение  $c$  по формуле  $c=k/\mu R$ . Подстановка данных из таблицы дала  $c=19.01$ , что согласуется с теоретическим значением  $c=6\pi=18.85$  с точностью до 0.8%.

Применим теорию размерностей для вывода формул силы сопротивления с учетом границ стенок сосуда. При движении в ограниченном пространстве сила сопротивления несколько увеличивается вследствие большого влияния сил трения у стенок границ областей движения тел. Формулу (23) теории размерностей запишем в следующем виде

$$F = c(1 + a\left(\frac{d}{d_1}\right) + b\left(\frac{d}{d-d_1}\right)) \cdot \mu R v. \quad (26)$$

Эта формула учитывает влияние двух стенок на силу сопротивления. В ней  $d_1$  - расстояние до одной стенки сосуда,  $2R-d_1$  - расстояние до другой стенки,  $d=2R$  - диаметр бросаемого шарика. Если шарик бросаем в центре цилиндрического сосуда, то формула переписывается в виде:

$$F = c(1 + a\left(\frac{d}{R}\right)) \cdot \mu R v. \quad (27)$$

Неопределенные в формулах (26) и (27) постоянные можно найти из экспериментальных результатов

$$c(1 + a\left(\frac{d}{d_1}\right) + b\left(\frac{d}{d-d_1}\right)) \cdot \mu R = k_{эксп}.$$

записав последнюю формулу для трех различных опытов из таблиц 2 или 3.

Формула (27) после обработки таблицы 1 позволяет получить следующую зависимость для формулы сопротивления при бросании шарика в центре сосуда,

$$F = 19.23(1 + 1.073\left(\frac{d}{R}\right)) \cdot \mu R v. \quad (28)$$

Число 19,23 близко к  $6\pi$ , что вполне реально.

**Исследования движения тел цилиндрических формы в вязких средах.** Были проведены практические исследования движения цилиндрических тел в вязкой среде. В опытах использовались тела из разного материала, различной длины и плотности. Было замечено, что тела большей длины сохраняют свое вертикальное, устойчивое положение на всем участке движения. Результаты приведены в таблице 4.

Таблица 4- Результаты движения цилиндрических тел в глицерине

Материал	d, мм	$l = 20$ , мм	$l = 15$ , мм	$l = 10$ , мм
Алюминий	1	Устойчивое	Устойчивое	Неустойчивое
Медь	1.3	Устойчивое	Устойчивое	Неустойчивое
	2	Устойчивое	Слабо неустойчивое	Неустойчивое
Сталь	1	Устойчивое	Слабо неустойчивое	Неустойчивое

В устойчивости движения тела слабо влияют его материал и масса, но зависит от его длины. Для разных тел, разной плотности и диаметра, движение становится неустойчивым при длине около 10 мм. При отношении длины цилиндра к диаметру ( $l/d$ ) $\geq 20$  цилиндр остается вертикальным в начале движения, что говорит о его устойчивости. Движение начинается почти мгновенно со скоростью, пропорциональной силе сопротивления, которая зависит от скорости.

При движении тела сила сопротивления и сила Архимеда компенсируют силу тяжести. Сопротивление складывается из трения о боковую поверхность цилиндра и лобового сопротивления в жидкости, обозначаемого общим коэффициентом  $k$  в уравнении силы сопротивления  $F_c = kv$ . Имеем:

$$\pi R^2 l (\rho_T - \rho_{ж}) = kv, \quad v = S/t. \quad (26)$$

$$k = \frac{\pi R^2 l (\rho_T - \rho_{ж}) t}{S}. \quad (27)$$

В экспериментах использовался стальной цилиндр диаметром  $2R = 1$  мм и длиной  $l = 40$  мм. За время 13.2 сек он опустился на глубину  $S = 35$  см при движении по центру цилиндрической колбы, наполненной глицерином. При движении у стенки время опускания составило 15 секунд.

Тогда коэффициент сопротивления при движении по центру сосуда равен  $k = 0.00078$  кг/с. При движении у стенки коэффициент сопротивления больше и равен  $k = 0.00089$  кг/с. Данный эффект объясняется тем фактом, что опускающийся цилиндр вызывает движение жидкости, которая тормозится у стенки. Вследствие этого увеличивается сила сопротивления движению.

**Заключение.** Результаты работы могут найти применение в технических задачах определения коэффициентов сопротивления. На основе результатов работы может быть составлена лабораторная работа и задачи в курсе физики с реальными значениями коэффициентов сопротивления.



**Список использованных источников:**

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
2. С. Соу. Гидромеханика многофазных систем. –М.Мир, 1971. -533.
3. Кочин Н.Е., Кибель Н.В., Розе. Теоретическая гидромеханика. –Т.2-М.: Физматгиз, 1963. -728с.