УДК 512.643

ХАРАКТЕРИСТИКА ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Подгайский А. А. [1]*, студент гр.353501*

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З. Н. – канд. физ.-мат. наук

Аннотация. В работе рассмотрены матрицы, содержащие 1 и -1, на которых введена операция «переключения» столбца или строки, которая заменяет элементы ряда на им противоположные. Исследована такое свойство переключательных матриц, как характеристика, равная минимальному количеству -1 в матрице, в частности, приведен алгоритм её нахождения.

Ключевые слова. Матрицы, дискретная оптимизация, бинарные матрицы, минимизация.

Введение

Пусть дана матрица $M_{m\times n} = \left(a_{ij}\right), a_{ij} \in \{-1,1\}$ (на рисунках будем -1 обозначать как “-“, а +1 как “+”).

Определение. *Операцией переключения строки (столбца) матрицы будем называть преобразование матрицы, при котором каждый элемент строки (столбца) заменяется на ему противоположный.*

Определение. *Матрицу с определенными на ней операциями переключения строки и столбца будем называть переключательной матрицей.*

Далее строки и столбцы будем называть рядами матрицы.

Определение. *Характеристикой матрицы M будем называть минимальное число “-1”, которое может быть в матрице M после переключения произвольного количества рядов в произвольном порядке.*

Если матрицу B можно получить из матрицы A путем применения к рядам B операции переключения некоторое количество раз, такое отношение будем записывать как $A \sim B$. Вполне очевидно, что такое отношение матриц является отношением эквивалентности:

1. Рефлексивность: $A \sim A$.
2. Симметричность: если $A \sim B$, то $B \sim A$. Если матрицу B можно получить из A, то для того, чтобы получить A из B, необходимо применить операцию смены знаков к тем же рядам в обратном порядке.
3. Транзитивность: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Определение. ***Классом** матриц будем называть множество переключательных матриц, для любой пары $\{A, B\}$ матриц из которого выполняется $A{\sim}B$.*

Из определения характеристики матрицы ясно, что характеристики матриц одного класса равны.

В данной работе исследуется вопрос нахождения характеристики некоторой заданной матрицы, а также исследуется диапазон возможных характеристик для некоторых матриц, в частности, максимальная возможная характеристика переключательной матрицы заданной размерности.

Алгоритм нахождения характеристики заданной матрицы $m \times n$ с помощью производной матрицы

Производные матрицы

Отметим, что нахождение характеристики заданной матрицы равносильно нахождению матрицы с минимальным количеством -1 в классе этой переключательной матрицы.

Определение. *Правильной матрицей $M_{m \times n}$ будем называть матрицу, в которой количество минусов в каждом столбце не больше, чем $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.*

Ясно, что любую неправильную матрицу можно привести к правильному виду путем переключения столбцов: если в столбце минусов было больше, чем $\frac{m}{2}$, то после переключения их станет меньше.

Определение. *Пусть дан вектор $a = (a_1, \dots, a_n), \forall i\ a_i \in \{-1,1\}$. Вектором, производным вектору a называется вектор $b = (b_1, \dots, b_{n-1}), \forall i\ b_i = a_i \cdot a_{i+1}$.*

Определение. ***Матрицей, производной** данной переключательной матрице по строкам (столбцам) называется переключательная матрица, в которой векторы-строки (векторы-столбцы) являются производными по отношению к векторам-строкам (векторам-столбцам) данной.*

Если матрица B является производной для матрицы A, матрицу A будем называть исходной для матрицы B.

+	+	-	+	-	+
+	-	+	-	-	+
+	-	+	+	+	-
+	-	-	-	+	+

+	-	-	-	+	+
+	+	+	-	-	-
+	+	-	-	+	-

Рисунок 1 - Слева - матрица 4×6, справа - соответвтующая ей производная по столбцам матрица

Теорема 1. *Пусть дана переключательная матрица A. Если произвести с ней операцию переключения столбцов, ее производная по столбцам матрица не изменится.*

Доказательство. Пусть $a = \left(a_i : i = \underline{1, n}\right)$ - вектор столбец матрицы. Тогда вектор-столбец производной матрицы $b = \left(b_i : i = \underline{1, n-1}\right), b_i = a_i \cdot a_{i+1}$. После переключения столбца матрицы А элемент вектора-столбца производной матрицы

$$b_i^{'} = (-a_i) \cdot (-a_{i+1}) = a_i \cdot a_{i+1} = b_i$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть дана переключательная матрица $A_{m \times n}$. Рассмотрим ее производную по столбцам матрицу как переключательную матрицу размерности $m - 1 \times n$. Тогда переключение строки $2 \leq k \leq m - 1$ в матрице A соответствует переключению строк k и $k - 1$ в производной ей по столбцам матрице. А переключение строки $k = 1$ или $k = m$ соответствует переключению строк 1 или $m - 1$ соответственно в производной ей по столбцам матрице.*

Исходная матрица

1	1	-1	1
-1	-1	1	1
-1	-1	-1	1
1	-1	1	1
-1	-1	1	1

Производная матрица

-1	-1	-1	1
1	1	-1	1
-1	1	-1	1
-1	1	1	1

1	1	-1	1
1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1
1	-1	1	1
-1	-1	1	1

1	1	1	-1
-1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	1	1

Рисунок 2 - Иллюстрация последней теоремы. Желтым обозначена строка, которая была переключена

Доказательство. Пусть $a = (a_i : i = \underline{1, n})$ - вектор столбец матрицы. Тогда вектор-столбец производной матрицы $b = (b_i : i = \underline{1, n-1}), b_i = a_i \cdot a_{i+1}$. При переключении строки $2 \le k \le m-1$ в матрице А,

$$b'_{k-1} = a_{k-1} \cdot (-a_k) = -b_{k-1}$$

$$b'_k = (-a_k) \cdot a_{k+1} = -b_k$$

Это значит, что k-тый и k-1-й элемент в любом столбце производной матрицы был заменен на противоположный. А это равносильно тому, что в ней k-тая и k-1-ая строка были переключены.

При переключении первой или последней строки:

$$b'_1 = (-a_1) \cdot a_2 = -b_1$$

или

$$b'_{m-1} = a_{m-1} \cdot (-a_m) = -b_{m-1}$$

Это равносильно тому, что была переключена первая или последняя строка производной матрицы.

Что и требовалось доказать.

Таким образом при переключении строки исходной матрицы, в производной матрице может либо переключаться только первая строка, либо только вторая, либо любые две соседние.

Тогда по Теореме 1 и Теореме 2 для переключательных матриц одного класса существует не более, чем 2^{m-1} значений призводной матрицы, где m - количество строк (так как каждая строка производной матрицы имеет либо изначальный вид, либо она переключена, количество считается по правилу комбинаторного умножения: $2 \cdot 2 \dots \cdot 2 = 2^{m-1}$). Покажем, что, изменяя соседние пары строк или крайние строки, можно получить все 2^{m-1} значений производной матрицы.

Лемма 1. *Пусть дано упорядоченное множество, состоящее из n знаков + и - (например, $\{+ - + + - + + -\}$). Тогда, путем изменения любой соседней пары знаков или крайних знаков на противоположные, можно получить все 2^n возможных комбинаций знаков.*

Доказательство. Достаточно показать, что с помощью заданных операций можно изменить один знак в множестве на противоположный. Пусть заданное множество имеет вид $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $a_i = 1$, если на этом месте в множестве стоит "+", и $a_i = -1$, если стоит "-".

Изменить знак первого и последнего элемента можно напрямую (по условию леммы).

Чтобы изменить знак числа $a_i, i \ne 1, i \ne n$, достаточно сначала изменить пару (a_i, a_{i+1}), потом пару (a_{i+1}, a_{i+2}) и так далее до последней пары (a_{n-1}, a_n) (конечно, можно "шагать" и в сторону первого элемента, если это более рационально). После этих действий множество будет иметь вид $\{a_1, \dots, -a_i, \dots, a_{n-1}, -a_n\}$]. Осталось лишь изменить напрямую знак числа a_n, и мы получим множество, в котором изменен лишь знак числа a_i относительно изначальной конфигурации.

Отсюда следует, что для матриц одного класса существует ровно 2^{m-1} значений производной матрицы.

Восстановление количества минусов в исходной матрице по столбцу производной матрицы

Из определения производной таблицы следует следующее:

Утверждение 1. *В матрице $B = (b_{ij})$, которая является производной для матрицы A по столбцам, элемент $b_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = a_{i+1,j}$, и $b_{ij} = -1$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = -a_{i+1,j}$*

Пусть дан вектор столбец производной матрицы $b = (b_i : i = \underline{1, n-1})$. Зафиксируем $a_{1j} = x \in \{-1,1\}$. Тогда по Утверждению 1 можно восстановить каждый следующий элемент исходной матрицы на основе предыдущего, зная производный столбец и первый элемент x. Например, если производный столбец матрицы $4 \times n$ имеет вид $b = (1, -1, 1)$, то, зафиксировав $a_1 = 1$, получим исходный вектор $(1, 1, -1, -1)$.

Поскольку первый элемент $x \in \{-1, 1\}$, его всегда можно выбрать так, чтобы количество -1 в матрице было не больше $\frac{n}{2}$. Поэтому *по производной по столбцам матрице можно однозначно восстановить соответствующую ей исходную правильную матрицу.*

Благодаря последнему замечанию можно построить алгоритм нахождения характеристики заданной матрицы.

Алгоритм нахождения характеристики

Для того, чтобы найти характеристику матрицы, необходимо найти матрицу с минимальным количеством -1 в классе этой матрицы. Поскольку классу матрицы соответствует ровно 2^{m-1} производных таблиц, то достаточно перебрать все производные таблицы и найти матрицу с минимальным числом -1, соответствующую каждой из них. Этой матрицей является правильная матрица, которая, как мы ранее показали, однозначно восстанавливается из производной таблицы.

Пусть задана матрица $m \times n$. Для того, чтобы найти ее характеристику, необходимо произвести следующие шаги:

1. Построить производную матрицу для этой матрицы
2. Перебрать всевозможные производные матрицы, которые можно получить путем переключения строк ней (2^{m-1} матриц).
3. Для каждой возможной производной матрицы восстановить соответствующую ей правильную матрицу и вычислить количество -1 в ней.
4. Среди полученных количеств -1 в правильных матрицах найти минимальное. Оно и будет являться характеристикой.

Реализацию этого алгоритма на C++ см. по ссылке

https://github.com/artemious3/characteristics_of_tables.

Максимальная характеристика матрицы $3 \times n$.

Рассмотрим все возможные варианты расстановки минусов в столбце производной по столбцам матрицы для матрицы $3 \times n$. Ясно, что производная матрица имеет размерность $2 \times n$

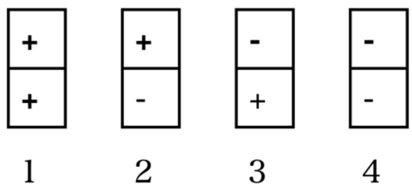

Рисунок 3 - Все возможные расположения знаков в столбцах матрицы $3 \times n$

Восстановим количество ”-1” в таких столбцах по алгоритму из пункта предыдущего раздела. Пусть числа в столбце исходной таблицы $b_1, b_2, b_3; \forall b_i \in \{-1, 1\}$.

4. Случай 1 на рис. 3. Если зафиксируем $b_1 = 1$, то получим ноль ”-1” в столбце. Поскольку $0 < \frac{3}{2}$, то это соответствует правильной таблице.
5. Случай 2. Если зафиксируем $b_1 = 1$, то получим одну ”-1” в столбце. $1 < \frac{3}{2}$, соответствует правильной таблице.
6. Случай 3. Если зафиксируем $b_1 = -1$, то получим одну ”-1” в столбце. $1 < \frac{3}{2}$, соответствует правильной таблице.

7. Случай 4. Если зафиксируем $b_1 = 1$, то получим одну ”-1” в столбце. $1 < \frac{3}{2}$, соответствует правильной таблице.

Случаи пронумерованы и представлены на Рисунке 3.

Отметим, какие столбцы правильной матрицы соответствуют приведенным случаям.

- Случаю 1 соответствует столбец только с ”1”
- Случаю 2 соответствует столбец с одной ”-1” в нижней клетке
- Случаю 3 соответствует столбец с одной ”-1” в верхней клетке
- Случаю 4 соответствует столбец с одной ”-1” в средней клетке

Определение. *Пусть A - переключательная матрица. A' - матрица, полученная переключением только строк матрицы A'. Маской строк матрицы A' относительно A называется последовательность $(x_i, \ldots, x_n); \forall i: x_i \in \{0,1\}$, причем $x_i = 1$ только если в A' переключена строка i относительно A, и $x_i = 0$ в противном случае.*

Ясно, что маской строк матрицы A относительно A равна $(0,0,\ldots,0)$

Как мы показали в Лемме 1, переключая строки исходной матрицы, можно получить все 2^{m-1} конфигураций производной матрицы. Поэтому, если рассмотреть производную по столбцам матрицу матрицы $3 \times n$ как переключательную, то ее маска принимает значения ”00”, ”01”, ”10”, ”11”. И каждая маска производной матрицы соответствует некоторой правильной исходной матрице $3 \times n$.

Определение. *Столбец переключательной матрицы будем называть пустым, если в нем отсутствуют ”-1”, непустым - если есть хотя бы одна ”-1”.*

Возвращаясь к рисунку 3 и восстановленным по ним количествам -1, заметим, что:

Утверждение 2. *В столбце исходной правильной матрицы $3 \times n$ есть одна -1 только если столбец производной матрицы непустой.*

Теорема 3. *Пусть дана правильная переключательная матрица $3 \times n$, назовем ее A. Пусть a - количество столбцов с одной -1 в 3-й строке, b - с одной -1 в первой строке , c - с одной -1 во 2-й строке в матрице A. Тогда для нее характеристика $w = \{a + b + c, n - a, n - b, n - b\}$.*

Доказательство. Пусть B - производная матрице A по столбцам матрица. Пусть y_1 - количество столбцов в B с одной -1 внизу (случай 2 на рисунке 3), y_2 - с одной -1 вверху (случай 3), y_3 - с двумя -1 (случай 4). Поскольку случаи 2,3,4 соответствуют непустым столбцам производной матрицы, то по утверждению 2, количество -1 в исходной правильной матрице для нее равно $1 \cdot (y_1 + y_2 + y_3)$.

Теперь переберем все возможные производные таблицы в классе этой матрицы. То есть маски 00, 01, 10, 11. Маска 00 - матрица B - была только что рассмотрена.

1. Маска "01". Тогда все столбцы с одной -1 внизу (т.е случай 2) переходят в пустые столбцы. А все остальные случаи переходят в непустые столбцы (Рисунок 4). Тогда, поскольку столбцов случая 2 было y_1, всех остальных было $n - y_1$. Тогда по утверждению 1, количество -1 в исходной правильной таблице при маске производной матрицы 01 равно

$$1 \cdot (n - y_1).$$

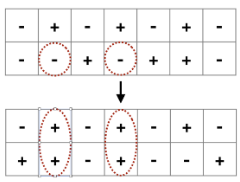

Рисунок 4 - При переключении нижней строки, столбец становится пустым, если в нем внизу была -1, а все остальные становятся непустые

2. Маска "10". Все столбцы с одной -1 вверху (случай 3) переходят в пустые, а все остальные в непустые. В исходной правильной таблице $n - y_2$ ”-1”.

+	+	-	+	-	-	+
-	+	+	-	+	-	-

$\downarrow$

-	-	+	-	+	+	-
-	+	+	-	+	-	-

Рисунок 5 - При переключении верхней строки, столбец становится пустым, если в нем вверху был минус

3. Маска "11". Все столбцы с двумя -1 вверху и внизу (случай 4) переходят в пустые, а все остальные в непустые. В исходной правильной таблице $n - y_3$ ”-1”.

+	+	-	-	+	-	+
-	-	-	+	-	-	+

$\downarrow$

-	-	+	+	-	+	-
+	+	+	-	+	+	-

Рисунок 6 - При переключении обеих строк, столбец становится пустым, если в нем были все минусы

Тогда ясно, что характеристика равна $w = \{y_1 + y_2 + y_3, n - y_1, n - y_2, n - y_3\}$.

Теперь заметим, что восстанавливая столбец правильной таблицы по столбцу производной, получаем следующее

$$(1 \ -1\,) \rightarrow (1\ 1\ -1\,)$$

$$(-1\ 1\,) \rightarrow (-1\ 1\ 1\,)$$

$$(-1\ -1\,) \rightarrow (1\ -1\ 1\,)$$

Тогда, $y_1 = a; y_2 = b; y_3 = c$. Характеристика равна $\{a + b + c, n - a, n - b, n - b\}$

Лемма 3. *Для чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$, верно $max(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \frac{A}{n}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{A}{n}$*

Доказательство. Предположим противное: максимальное число a_i меньше, чем $\frac{A}{n}$. Тогда все остальные числа $a_j \leq a_i < \frac{A}{n}$. Тогда в сумме $a_1 + a_2 + \cdots a_i + \cdots + a_n < n \cdot \frac{A}{n} = A$ равенство не достигается - противоречие. Значит максимальное число $a_i \geq \frac{A}{n}$ Теперь покажем, что равевенство достигается только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{A}{n}$. Предположим противное: $max(a_1, a_2, \dots, a_4) = \frac{A}{n}$, и есть какое-то $a_i \neq \frac{A}{n}$. Тогда в сумме $a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_n < n \cdot \frac{A}{n}$ равенство не достигается. □

По *Теореме 3* характеристика заданной матрицы $3 \times n$ равна $w = min(y_1 + y_2 + y_3, n - y_1, n - y_2, n - y_3)$. Пусть $a = n - (y_1 + y_2 + y_3)$. Тогда $w = min(n - a, n - y_1, n - y_2, n - y_3) = n - max(a, y_1, y_2, y_3)$. Заметим, что $a + y_1 + y_2 + y_3 = n - (y_1 + y_2 + y_3) + y_1 + y_2 + y_3 = n$. Поэтому по *Лемме 1* $max(a, y_1, y_2, y_3) \geq \frac{n}{4}$. Поэтому $w = n - max(a, y_1, y_2, y_3) \leq n - \frac{n}{4} = \frac{3}{4}n$

Утверждение 2. *Для характеристики матрицы* $3 \times n$ *справедлива оценка* $w \leq \frac{3}{4}n$

Осталось показать, что существует переключательная матрица $3 \times n$ с характеристикой $\lfloor\frac{3}{4}n\rfloor$.

Лемма 2. *Для чисел* $a, b, c > 0$, $c \in Z$ *таких, что* $a + b = c$ *справедливо равенство* $\lfloor a\rfloor + \lceil b\rceil = c$

Доказательство. За $\{x\}$ будем обозначать дробную часть числа x. Для целых a и b равенство очевидно. Пусть теперь a и b нецелые. $\lfloor a\rfloor + \lceil b\rceil = [a] + [b] + 1 = a - \{a\} + b - \{b\} + 1 = a + b + 1 - (\{a\} + \{b\})$. Заметим, что так как в суммме $c = a + b = [a] + [b] + \{a\} + \{b\}$ число $[a] + [b]$ целое, то и число $\{a\} + \{b\}$ целое. Но так как числа a и b нецелые, единственное целое значение, которое принимает число $\{a\} + \{b\}$ = 1. Поэтому $a + b + 1 - (\{a\} + \{b\}) = a + b = c$

Построим матрицу $3 \times n$, характеристика которой равна $\lfloor\frac{3}{4}n\rfloor$. Для этого возьмем $a = \lceil\frac{n}{4}\rceil$, $b = \lceil\frac{n}{4}\rceil$, а $c = \lfloor\frac{3}{4}n\rfloor - 2\lceil\frac{n}{4}\rceil$.

Характеристика такой матрицы равна

$$w = \{a + b + c, n - a, n - b, n - c\} = \left\{\lfloor\frac{3}{4}n\rfloor, \lfloor\frac{3}{4}n\rfloor, \lfloor\frac{3}{4}n\rfloor, 3\lceil\frac{n}{4}\rceil\right\} = \lfloor\frac{3}{4}n\rfloor$$

Оценка характеристики для матрицы $n \times m$ с помощью ранга матрицы

Лемма 3. *Операция переключения ряда матрицы не изменяет ранга матрицы.*

Доказательство. Достаточно показать, что не изменится ранг системы строк. Не нарушая общности, скажем что базис системы строк составляет подсистема $\widetilde{A} = (A_1, A_2, \dots, A_q)$. Тогда уравнение $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_i A_i + \cdots \alpha_q A_q = 0$ имеет место только на нулевом наборе α_i. Умножим строку A_i на -1. Тогда ясно, что и уравнение $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots - \alpha_i A_i + \cdots \alpha_q A_q = 0$ тоже имеет место только на нулевом наборе α_i. Первое условие независимости систем выполнено. Возьмём строку $A_p, A_p \notin \widetilde{A}$. Тогда, поскольку $\widetilde{A}$ система - базис, для системы $\widetilde{A}$ уравнение $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_i A_i + \cdots \alpha_q A_q = A_p$ имеет место на наборе $\widetilde{\alpha}_i$, таком что $\widetilde{\alpha_1}^2 + \widetilde{\alpha_2}^2 + \cdots + \widetilde{\alpha_q}^2 > 0$ (т.е среди них есть хотя бы одно $\alpha_k \neq 0$). Тогда при умножении строки A_i на -1 положим в предыдущем равенстве $\alpha_i = -\alpha_i$. Ясно, что тогда равенство всё равно будет выполнено и для строки $-1 \cdot A_i$ как и условие $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_q^2 > 0$. Таким образом выполнено и условие 2) значит новая система тоже составляет базис, а следовательно ранг матрицы не изменился.

Теорема 4. *Для любых размерностей* $n \times k$ *существует матрица с любой характеристикой от* 0 *до* $min(n, k) - 1$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Обозначим количество -1 как t, и пусть обе размерности A не меньше $t + 1$ (в таком случае есть как минимум одна строка, состоящая из одних 1). Также не нарушая общности скажем, что количество строк в матрице не меньше количества столбцов. Покажем, что система B, состоящая из первых $t+1$ строк, составляет базис. Действительно, обозначим строку, в которой -1 расположена в столбце i за Q_i. За Q_0 обозначим строку, следующую после строки Q_t(строка Q_0 состоит только из единиц). Тогда систему B составляютс строки $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$.

Покажем, что равенство $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \dots + \alpha_t Q_t + \alpha_{t+1} Q_0 = 0$ выполняется только на нулевом наборе α_i-ых.

Для выполнения равенства необходимо выполнение системы уравнений;

$$\{\alpha_2 + \dots + \alpha_t + \alpha_{t+1} = \alpha_1 \ \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_t + \alpha_{t+1} = \alpha_2 \ \dots \ \alpha_1 + \dots + \alpha_{t-1} + \alpha_{t+1} = \alpha_t \ \alpha_1 + \dots + \alpha_{t-1} + \alpha_t = -\alpha_{t+1}$$

Попарно отняв от первого уравнения каждое уравнение системы, получим.

$$\{\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \ \alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_3 \ \dots \ \alpha_t - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_t \ \alpha_{t+1} - \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_{t+1}$$

Откуда получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_t = \alpha$, а из последнего получаем $\alpha = 0$. Следовательно равенство $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \dots + \alpha_t Q_t + \alpha_{t+1} Q_0 = 0$ выполняется только на нулевом наборе α_i-ых.

Теперь покажем, что добавление любой строки матрицы А в нашу выбранную систему В сделает ее линейно зависимой. По нашему построению в матрице А остались лишь строки, состоящие только из 1. Но в выбранной систему уже есть строка, состоящая только из 1, поэтому равенство $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \dots + \alpha_t Q_t + \alpha_{t+1} Q_0 = Q_p$, Q_p - строка из единиц, $p \neq 0$, выполняется для $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0$ и $\alpha_{t+1} = 1$ Поэтому добавление в выбранную систему строки из А сделает её линейно зависимой. Таким образом первые $t+1$ строк действительно составляют базис и соответственно её ранг – $t+1$.

Покажем, что с помощью данных нам операций не получится уменьшить число минусов у такой матрицы. Для этого предположим противное. Рассмотрим такую матрицу, в которой мы получили количество -1 меньше t. Тогда по принципу Дирихле у нас будет минимум $n-t+1$ строк, состоящих из одних единиц. Но тогда ясно, что ранг такой матрицы будет меньше $t+1$(т.к. будет минимум $n-t+1$ одинаковых строк, только одна из которых может входить в базис). Из *Леммы 2* получаем противоречие. Поэтому характеристика матрицы равна t.

Матрицу такого вида мы можем составить для любых t от 1 до $min(n,k)-1$, следовательно для матрицы $m \times n$ существуют характеристики от 1 до $min(n,k)-1$.

Нетрудно заметить, что, если в матрице в каждом ряду либо ровно по одному минусу, либо все плюсы (при этом есть как минимум одна строка и один столбец с одними +1), характеристика такой матрицы равна числу -1 в ней. Пример - рисунок 7.

+	+	-	+	+	+
+	+	+	-	+	+
+	+	+	+	+	-
+	+	+	+	+	+

Рисунок 7 - Характеристика такой матрицы равна 3

Утверждение 4. *Если в классе заданной матрицы B есть матрица A, переменой местами строк и столбцов в которой, можно получить матрицу вида (1), то характеристика матрицы B равна количеству минусов в матрице A.*

Доказательство. Если в классе есть матрица, переменой местами строк и столбцов которой получается матрица вида (1), то, как мы показали в доказательстве последней теоремы, в ней невозможно уменьшить количество минусов. Аналогичные рассуждения для любых матриц, в которых в каждом строке и строке максимум 1 минус. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Из утверждения 4 имеем **способ нахождения характеристики матрицы в матричном виде**. Он заключается в том, что если удалось привести матрицу к виду из утверждения 4, то мы найдём её характеристику. Таким способом можно быстро искать характеристики некоторых матриц.

Оценка максимальной характеристики матрицы $m \times n$ с помощью программного перебора

Для нахождения максимальной характеристики таблиц небольшой размерности была создана программа, которая находит максимальную характеристику среди характеристик 3000 случайно заданных матриц. Так как рассматриваемые матрицы имеют относительно небольшие размеры, то среди 3000 случайно заданных матриц с высокой вероятностью встретится максимально возможная характеристика.

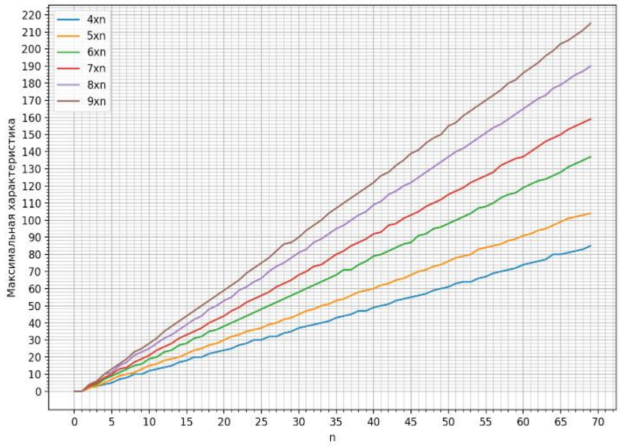

Рисунок 8 - Максимальные найденные характеристики для матриц $i \times j; i \in [4; 10); j \in [1; 79)$

С помощью полученных данных (см. **Приложение**), построен следующий график (Рисунок 8).

Также построен график отношения максимальной характеристики к произведению размерностей $m \cdot n$.

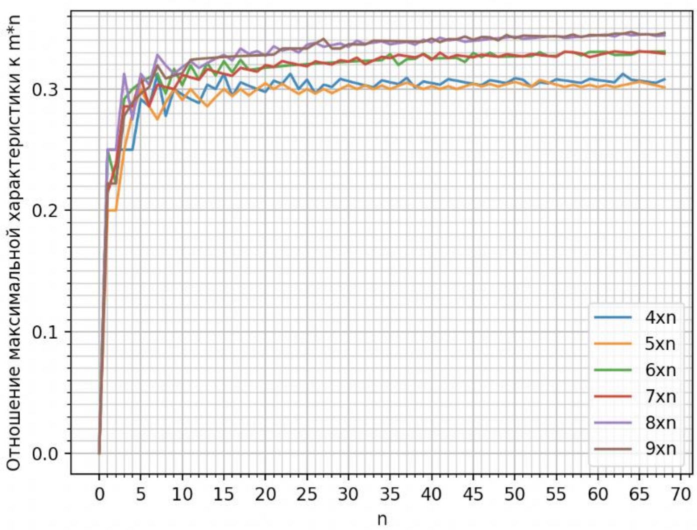

Рисунок 10 - Отношение максимальной характеристики к $m \times n$

На основании этого можно выдвинуть гипотезу о том, что для фиксированного m предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{w(m,n)}{m \cdot n}$$

существует и конечен, где $w(m,n)$ - максимальная характеристика переключательной матрицы $m \times n$. Если это так, можно приблизительно оценить характеристику матрицы $m \times n$ для больших n, лишь один раз посчитав отношение $\frac{w_{max}}{m \cdot n}$ для некоторого большого n. Например, из графика видно, что для матрицы $4 \times n$ и $5 \times n$ справедлива оценка

$$\frac{w(4,n)}{m \cdot n} \approx 0.3$$

Поэтому для таких матриц, вероятно,

$$w(4,n) \approx 0.3mn$$

Приложение.

Файл с данными, по которым был построен график с Рисунка 8. В первом столбце расположены значения переменной n. В столбцах со 2 по 6 расположены максимальные найденные характеристики матриц от $4 \times n$ до $9 \times n$ соответственно.

2 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0
2 2 2 3 3 4 4
3 3 3 4 5 6 6
4 4 5 7 8 10 10
5 5 7 9 10 11 13
6 7 9 11 13 15 16
7 8 10 13 14 17 19
8 10 11 15 17 21 23
9 10 13 16 19 23 25
10 12 15 19 21 25 28
11 13 16 20 24 28 31
12 14 18 23 26 31 35
13 15 19 24 28 33 38
14 17 20 27 31 36 41
15 18 22 28 33 39 44
16 20 24 31 35 42 47
17 20 25 32 37 44 50
18 22 27 35 40 48 53
19 23 28 36 42 50 56
20 24 30 38 44 53 59
21 25 32 40 47 55 62
22 27 33 42 49 59 65
23 28 35 44 52 61 69
24 30 36 46 54 64 72
25 30 37 48 56 66 75
26 32 39 50 58 70 78
27 32 40 52 61 73 82
28 34 42 54 63 75 86
29 35 43 56 65 78 87
30 37 45 58 68 81 90
31 38 47 60 70 83 94
32 39 48 62 73 87 97
33 40 50 64 74 89 100
34 41 51 66 77 92 104
35 43 53 68 80 95 107
36 44 54 71 82 97 110
37 45 56 71 85 100 113
38 47 58 74 87 103 116
39 47 59 76 89 105 119
40 49 60 79 92 109 122
41 50 62 80 93 111 126
42 51 63 82 97 115 128
43 53 65 84 98 117 132
44 54 66 86 101 120 135
45 55 68 87 103 122 139
46 56 70 91 105 125 141
47 57 71 92 108 128 145

48 59 73 95 110 131 148
49 60 74 96 112 134 150
50 61 76 98 115 137 155
51 63 78 100 117 140 157
52 64 79 102 119 142 161
53 64 80 104 122 145 164
54 66 83 107 124 148 167
55 67 84 108 126 151 170
56 69 85 110 128 154 173
57 70 86 113 132 156 176
58 71 88 115 134 159 180
59 72 89 116 136 162 182
60 74 91 119 137 165 186
61 75 92 121 140 168 189
62 76 94 123 143 171 192
63 77 95 124 146 173 196
64 80 97 126 148 177 199
65 80 99 128 150 179 203
66 81 101 131 153 182 205
67 82 102 133 155 185 208
68 83 103 135 157 187 211
69 85 104 137 159 190 215

Список использованных источников:

1. Введение в алгебру. Часть II. Линейная Алгебра: Учебник для вузов / А.И. Кострикин. М.: Физико-математическая литература, 2000. 368 с.
2. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. М.: Физматлит, 2007. 480 с.

UDC 512.643

PARAMETER OF SWITCH MATRICES

Padhaiski A.A. [1]

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics[1]*, Minsk, Republic of Belarus*

Primicheva Z.N.– PhD in Physics and Mathematics

Annotation. In the article matrices of 1 and -1, on which the operation of switching rows and column is defined, are considered. The switch operation replaces the element of row/column with the opposite. The parameter of switch matrix is defined as minimal number of -1 one can get by switching rows and columns. In the article this property was explored and, in particular, and algorithm finding the parameter is suggested.

Keywords. Matrix, discrete optimization, binary matrices, minimization.